Б.П.吉米多维奇

数学分析习题全解 1

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系
廖良文 许 宁 编著

分析引论

A·P·G 安徽人民出版社
安徽出版集团
ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

责任编辑/王玉法　封面设计/王国亮

经典名著最新版本
全书增补数百新题
题型最全题量最大
数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全解（一）——分析引论
吉米多维奇数学分析习题全解（二）——一元函数的微分学
吉米多维奇数学分析习题全解（三）——不定积分　定积分
吉米多维奇数学分析习题全解（四）——级数
吉米多维奇数学分析习题全解（五）——多元函数的微分学　带参数的积分
吉米多维奇数学分析习题全解（六）——重积分和曲线积分
吉米多维奇数学分析习题全集


ISBN 978-7-212-02695-0
定价：20.00 元

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题全解
（一）

南京大学数学系
廖良文　许　宁　编著
杨立信　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 1/(苏)吉米多维奇著. 廖良文, 许宁编著. 一合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978—7—212—02695—0

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②廖…③许… Ⅲ.数学分析－高等学校－解题 Ⅳ.017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113600 号

吉米多维奇数学分析习题全解(一)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 杨立信 译

责任编辑 王玉法 **封面设计** 王国亮
出版发行 安徽人民出版社
地　　址 合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场
邮编:230071
发 行 部 0551—3533258 0551—3533292(传真)
经　　销 新华书店
印　　刷 南京新洲印刷有限公司
开　　本 880×1230 1/32 **印张** 14.5 **字数** 350 千
版　　次 2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)
标准书号 ISBN978—7—212—02695—0
定　　价 20.00 元

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第13版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第一章 分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法 为了证明某定理对任意自然数n是正确的，只要证明下面两点：

(1) 该定理对$n=1$是正确的；(2) 若该定理对任何一个自然数n是正确的，则它对其后的一个自然数$n+1$也是正确的.

2. 分割 若把有理数分为A、B两类，使其满足下列条件：(1) 两类均非空集；(2) 每个有理数必属于一类，且仅属于一个类；(3) 属于A类(下类)的任何数都小于属于B类(上类)的任意数，此分类法被称之为分割. (a) 若或者下类A有最大数，或者上类有最小数，则分割A/B确定一个有理数；(b) 若A类没有最大数，而B类没有最小数，则分割A/B确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数[①].

3. 绝对值 若x为实数，则由下列条件所确定的非负数$|x|$，称为x的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}-x, & 若\ x<0;\\ x, & 若\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何实数x和y，下列不等式成立

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4. 上确界和下确界 设$X=\{x\}$为实数的有界集，若：

(1) 每一个$x\in X$[②]满足不等式

$$x\geqslant m,$$

① 今后如没有相反的说明，我们把所研究的数都理解为实数.

② 符号$x\in X$表示数字x属于集X.

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$,存在有 $x' \in X$,使得

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集 X 的下确界.

同样,若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$,存在有 $x'' \in X$,使得

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集 X 的上确界.

若集 X 下方无界,则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty,$$

若集 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差 若 $a(a \neq 0)$ 是被测量的准确值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta = | x - a |,$$

称为绝对误差,而

$$\delta = \frac{\Delta}{| a |},$$

称为被测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的单位的一半,则说明 x 有 n 位准确的数字.

运用数学归纳法证明:下列等式对任何自然数 n 都成立.

【1】 证明 $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

证 当 $n = 1$ 时,等式显然成立.

设当 $n = k$ 时等式成立,即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则当 $n = k + 1$ 时,有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对 $n=k+1$ 等式也成立.

于是由数学归纳法知,对任何自然数 n,有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【2】 证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设当 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1],$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是由数学归纳法,对任何自然数 n,有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

【3】 证明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n=1$ 时,等式显然成立.

设当 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 \\
&=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3 \\
&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3 \\
&=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4} \\
&=[1+2+\cdots+k+(k+1)]^2,
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

【4】 证明 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k \\
&=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是对任何自然数 n,有

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^n-1.$$

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 和 $a^{[0]}=1$.

证明:$(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$,式中 C_n^m 为由 n 个元素中选取 m 个的组合数,由此推导出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时,有 $(a+b)^{[1]}=a+b$,

$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立.即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]},$$

则对于 $n=k+1$，有

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]}\\
&=(a+b)^{[k]}(a+b-kh)\\
&=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}\\
&\quad+\{(a-(k-1)h)+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\\
&=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},
\end{aligned}
$$

即对 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}, \qquad ①$$

令 $h=0$，则有 $a^{[n]}=a^n$. ②

将 ② 式代入 ① 式，得牛顿二项式公式 $(a+b)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m$.

【6】 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时，不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\\
&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,
\end{aligned}
$$

则当 $n=k+1$ 时,由于

$$x_i>-1\qquad(i=1,2,\cdots,k+1),$$

所以 $1+x_i>0$,因此有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\quad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

又由于 $x_ix_j\geqslant 0\qquad(i,j=\overline{1,2,\cdots,k+1})$,

所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】 证明:如果 $x>-1$,则不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (n>1)$ 成立,且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

证 当 $n=2$ 时,

$$(1+x)^2=1+2x+x^2\geqslant 1+2x.$$

即不等式成立,当等号成立时,有 $x=0$.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即 $(1+x)^k\geqslant 1+kx$ 且等号仅当 $x=0$ 时才成立.

则当 $n=k+1$ 时,由于 $1+x\geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}&(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\\&\geqslant(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x,\end{aligned}$$

且等号仅当 $x=0$ 时,才成立.

于是,由数学归纳法,对任何自然数 $n(n>1)$,不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 成立,且仅当 $x=0$ 时等号成立.

【8】 证明:当 $n>1$ 时,$n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

提示:利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

证 当$n=2$时,因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$. 故不等式成立.

设$n=k$时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则当$n=k+1$时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

而
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \qquad (k=1,2,\cdots),$$

从而
$$(k+1)!<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}=\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即当$n=k+1$时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数$n\geqslant 2$有$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【9】 证明:当$n>1$时,$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n$.

证 当$n=2$时,显然有$2!4!=48>[(2+1)!]^2=36$.

设$n=k$时,不等式成立,即

$$2!4!\cdots(2k)!>[(k+1)!]^k.$$

则当$n=k+1$时,有

$$\begin{aligned}&2!4!\cdots(2k)!(2k+2)!\\&>[(k+1)!]^k(2k+2)!\\&=[(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\&>[(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1}\\&=[(k+2)!]^{k+1},\end{aligned}$$

即当$n=k+1$时,不等式也成立.

因此对任何大于1的自然数有

$$2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n.$$

【10】 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时,显然有$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

而 $$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

事实上,我们有 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$,

即 $$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2,$$

从而我们有$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$,

因此

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立.

由数学归纳法,命题证毕.

【10.1】 证明不等式

(1) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\qquad(n\geqslant 2)$;

(2) $n^{n+1}>(n+1)^n\qquad(n\geqslant 3)$;

(3) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k$

$(0\leqslant x_k\leqslant\pi,k=1,2,\cdots,n)$;

(4) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

证　(1) 当 $k=2$ 时,因为

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2} > 2 = (\sqrt{2})^2,$$

所以不等式成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k},$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

而当 $k\geqslant 2$ 时,$2\sqrt{k}\geqslant\sqrt{k+1}$,所以有

$$\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = k+2\sqrt{k}\,\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\geqslant k+1.$$

因此　$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立.由数学归纳法,命题证毕.

(2) 事实上,我们只需证明

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < n \qquad (n\geqslant 3),$$

而　$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

而当 $k>2$ 时,$\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)<1$,$\dfrac{1}{k!}<\dfrac{1}{2^{k-1}}$,

所以 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3\leqslant n.$$

因此 $$(n+1)^n<n^{n+1}.$$

(3) 因为当 $0\leqslant x_k\leqslant\pi$ 时，$\sin x_k\geqslant 0$，

所以当 $n=1$ 时，不等式显然成立。

设当 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sin x_i,$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)\right|$$
$$=\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\cdot\cos x_{k+1}+\cos\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\sin x_{k+1}\right|$$
$$\leqslant\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\cdot|\cos x_{k+1}|+\left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right||\sin x_{k+1}|$$
$$\leqslant\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|+\sin x_{k+1}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}\sin x_i,$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式成立. 由数学归纳法，命题证毕.

(4) $$(2n)!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times2\times4\times\cdots\times(2n)$$
$$<(2\times4\times\cdots\times2n)^2$$
$$=2^{2n}(n!)^2.$$

【11】 设 c 为正整数，而且不是整数的平方，$\dfrac{A}{B}$ 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含 $b^2>c$ 这样的所有正有理数 b，而 A 类包含其余的所有有理数，证明：A 类中无最大数，而 B 类中无最小数.

证 我们要证明对任意 $a\in A$，存在 a' 使得 $a'>a$ 且 $a'\in A$.

若 $a\leqslant 0$，则显然存在 $a'>0\geqslant a$ 且 $a'\in A$. 故不妨设 $a>0$，于是 $a^2\leqslant c$ 但 $a^2\neq c$，倘若不然，$a^2=c$. 设 $a=\frac{p}{q}$，其中 p,q 为互质的正整数，则 $\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数，而 p^2 与 q^2 也是互质的，故必有 $q=1$，从而 $c=p^2$，这与题设矛盾. 因此 $a^2<c$. 下面我们证明，当 n 充分大时，$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c$，即

$$a+\frac{1}{n}\in A,$$

上述不等式等价于 $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2$，

而 $$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{2a+1}{n},$$

故只需取 n 使得 $\frac{2a+1}{n}<c-a^2$，

为此只需取 $n>\frac{2a+1}{c-a^2}$，

因此当 $n>\frac{2a+1}{c-a^2}$ 时，$a+\frac{1}{n}\in A$.

故 A 类中无最大数.

应用相同的方法，可证明 B 类中无最小数，实质上，此分割 $\frac{A}{B}$ 确定一个无理数 $\sqrt{c}$.

【12】 用下列方法建立确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 $\frac{A}{B}$：A 类包含符合 $a^3<2$ 条件的所有有理数 a；而 B 类含有其它的所有有理数，证明 A 类中无最大数，而 B 类中无最小数.

证　设 $a\in A$，即 $a^3<2$，下面我们证明存在正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式等价于 $\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$，

若 $a \leqslant 0$,取 $n=1$ 即可. 不妨设 $a>0$.

由于$\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{3a^2+3a+1}{n}$,故只需取 n 使得

$$\frac{3a^2+3a+1}{n}<2-a^3,$$

即 $$n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}\text{ 即可.}$$

当 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$ 时,$a+\frac{1}{n}\in A$.

故 A 类中无最大数.

下面证明 B 类中无最小数,设 $b\in B$,则 $b^3\geqslant 2$. 首先证明 $b^3\neq 2$。若 $b^3=2$,设 $b=\frac{p}{q}$,p 与 q 为互质的正整数,则$\frac{p^3}{q^3}=2$,$p^3=2q^3$,从而 p^3 为偶数,因此 p 必为偶数。设 $p=2r$,r 为正整数,由于 $(p,q)=1$,故 q 必为奇数,从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$,矛盾. 因此 $b^3>2$. 下面证明存在充分大的正整数 n,使得$\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$。事实上,上式等价于

$$\frac{3b^2}{n}-\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3}<b^3-2,$$

而 $$\frac{3b^2}{n}-\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{3b^2+1}{n},$$

因此,取 $$n>\frac{3b^2+1}{b^3-2},$$

则 $$\frac{3b^2}{n}-\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{3b^2+1}{n}<b^3-2.$$

从而 $$\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2,$$

即 $$b-\frac{1}{n}\in B.$$

因此,B 类中无最小数. 事实上,此分割$\frac{A}{B}$ 确定了一个无理数$\sqrt[3]{2}$.

【13】 作出适当的分割,证明等式

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$;

(2) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (1) 作确定$\sqrt{2}$的分割$\frac{A}{B}$:其中B类包含所有满足条件$b^2>2$的正有理数,而其余有理数归入A类. 再作确定$\sqrt{8}$的分割$\frac{A'}{B'}$:B'类包含所有满足条件$b'^2>8$的正有理数,而其余有理数归入A'类. 根据实数加法的定义,满足不等式$a+a'<c<b+b'$(对任何$a\in A,b\in B,a'\in A',b'\in B'$)的唯一实数$c$就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此要证$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$,我们只需证明$(b+b')>18(\forall b\in B,b'\in B')$及$(a+a')^2<18(\forall a\in A,a'\in A'$且$a+a'>0)$.

因为$b^2>2,b'^2>8,b>0,b'>0$,故$b^2b'^2>16,bb'>4$,从而

$$\begin{aligned}(b+b')^2&=b^2+b'^2+2bb'\\&>2+8+8=18.\end{aligned}$$

又 $a+a'>0$,

则a与a'中至少有一个为正,从而由$a^2a'^2<2\times8=16$,知$aa'<4$.

因此$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$,证毕.

(2) $\sqrt{2}$的分割$\frac{A}{B}$如(1)中所示,再作确定$\sqrt{3}$的分割$\frac{A^*}{B^*}$:其中B^*类中包含所有满足条件$b^{*2}>3$的正有理数,而其余有理数a^*归入A^*类. 根据实数乘法的定义,满足$aa^*<c<bb^*$(对任何$a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0,b\in B,b^*\in B^*$)的实数$c$唯一存在且$c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

但由于$a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0$,从而$a^2<2,a^{*2}<3$所以$(aa^*)^2<6$而当$b\in B,b^*\in B^*$时,$(bb^*)^2>6$;故$aa^*<\sqrt{6}<bb^*$(对任何$a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0,b\in B,b^*\in B^*$);因此$\sqrt{6}=c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

【14】 建立确定数$2^{\sqrt{2}}$的分割.

解　如题 13(1),作确定$\sqrt{2}$的分割$\frac{A}{B}$,其次作分割$\frac{A_1}{B_1}$,其中B_1包含所有满足如下条件的正有理数b_1:

存在$b=\frac{p}{q}$(p,q互质)属于B使得$b_1^q>2^p$,而其余有理数归入A_1类.

这样的分割确定了数$2^{\sqrt{2}}$.

【15】 证明:任何非空并且下方有界的数集有下确界,而任何非空并且上方有界的数集有上确界.

证　设A是下方有界的数集,即存在实数α使得$a>\alpha$($\forall a\in A$).下面我们证明A有下确界.

我们讨论两种情况:

(1) A中有最小数$\bar{a}$.此时,$\forall a\in A$都有$a\geqslant\bar{a}$,即$\bar{a}$是A的下界,又因为$\bar{a}\in A$,故对任何A的下界m,均有$\bar{a}\geqslant m$,故$\bar{a}$为A的下确界.

(2) A中无最小数.此时,作分割$\frac{A'}{B'}$:将A的所有下界归入A'类,而其余数归入B'类,这样$A\subset B'$,A'、B'均为非空集,且A'中的数小于B'中的数,故$\frac{A'}{B'}$是一个实数分割.易知由此分割产生的实数β是A'类中的最大数,即β是A的最大下界.因此β是A的下确界.

同理可证,上方有界的数集必有上确界.

【16】 证明一切有理真分式$\frac{m}{n}$(其中m和n为自然数,且$0<m<n$)的集无最小和最大元素.并求该集的上确界和下确界.

证　令$E=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\text{为自然数,且}0<m<n\right\}$,

若$\frac{m}{n}\in E$,则$\frac{m+1}{n+1}\in E$,且$\frac{m+1}{n+1}>\frac{m}{n}$.因此$E$中无最大元素.

又若$\frac{m}{n}\in E$，则$\frac{m^2}{n^2}\in E$，且$\frac{m^2}{n^2}<\frac{m}{n}$，故$E$中无最小元素. 显然$\sup E=1$，$\inf E=0$.

【17】 求出满足不等式$r^2<2$的有理数r所成集合的下确界和上确界.

解 设$E=\{r\mid r$为有理数，且$r^2<2\}$. 由13(1)知分割$\frac{A}{B}$确定无理数$\sqrt{2}$，其中A是由所有非正有理数以及满足$r^2<2$的正有理数r组成的类，B类包含所有其余的有理数. 于是$\sup E=\sup A=\sqrt{2}$.

同样，分割$\frac{A'}{B'}$确定无理数$-\sqrt{2}$，其中B'是由所有非负有理数及满足条件$r^2<2$的负有理数r组成的类，A'是由其余有理数组成的类. 于是有$\inf E=\inf B'=-\sqrt{2}$.

【18】 $\{x\}$为数集，$-x$为x的相反数，证明：(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$；(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证 (1) 设$\inf\{-x\}=m$，则有：

(a) 当$-x\in\{-x\}$时，$-x\geqslant m$；

(b) 对任何$\varepsilon>0$，存在$-x'\in\{-x\}$，使

$$-x'<m+\varepsilon,$$

因此由(a)及(b)得：

(c) 当$x\in\{x\}$时，$x\leqslant -m$；

(d) 对任何$\varepsilon>0$，存在$x'\in\{x\}$使得

$$x'>-m-\varepsilon.$$

因此 $\sup\{x\}=-m$，

即 $m=-\sup\{x\}$，

所以 $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

(2) 设$\sup\{-x\}=M$，则由上确界的定义有

(a) 当$-x\in\{-x\}$时，$-x\leqslant M$.

(b) 对任何$\varepsilon>0$，存在$-x'\in\{-x\}$，使

$-x' > M-\varepsilon,$

因此由(a)及(b)得:

(c) 当 $x \in \{x\}$ 时,$x \geqslant -M$.

(d) 对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $x' \in \{x\}$ 使得

$x' < -M+\varepsilon.$

因此 $\inf\{x\} = -M,$

即 $M = -\inf\{x\},$

亦即 $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$

【19】 设 $\{x+y\}$ 是所有 x,y 的和的集,其中 $x \in \{x\}$ 和 $y \in \{y\}$. 证明下列等式成立:

(1) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (1) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$,则有

(a) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时 $x \geqslant m_1, y \geqslant m_2$,

从而 $x+y \geqslant m_1+m_2.$

(b) 对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$,使得 $x' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2}, y' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}$ 从而 $x'+y' < (m_1+m_2)+\varepsilon.$

因此 $\inf\{x+y\} = m_1+m_2;$

即 $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$

(2) 同理可证:

$\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$

【20】 设 $\{xy\}$ 是所有 x,y 乘积的集合,其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$,且 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 证明:

(1) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

证 (1) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$,因为 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$,故 $m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0$,于是我们有:

(a) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时

$x \geqslant m_1 \geqslant 0, y \geqslant m_2 \geqslant 0$

从而　$xy \geqslant m_1 m_2$;

(b) 对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$,使得

$$0 \leqslant x' < m_1 + \varepsilon, \quad 0 \leqslant y' < m_2 + \varepsilon,$$

从而存在 $x'y' \in \{xy\}$ 使

$$0 \leqslant x'y' < (m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中　$\varepsilon' = (m_1+m_2)\varepsilon + \varepsilon^2$,

因此　$\inf\{xy\} = m_1 \cdot m_2 = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$,

(2) 同理可证:

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}.$$

【21】 证明不等式:

(1) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$;

(2) $|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|)$

证 (1) 由

$$|x-y| \geqslant |x|-|y|,$$

及　$|x-y| = |y-x| \geqslant |y|-|x| = -(|x|-|y|)$,

得　$-|x-y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x-y|$,

即　$|x-y| \geqslant ||x|-|y||$.

(2) $|x+x_1+\cdots+x_n| > |x| - |x_1+\cdots+x_n|$,

而　$|x_1+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+\cdots+|x_n|$,

因此　$|x+x_1+\cdots+x_n| > |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

【22】 解不等式 $|x+1| < 0.01$.

解 由 $|x+1| < 0.01$

得 $-0.01 < x+1 < 0.01$

所以　$-1.01 < x < -0.99$.

【23】 解不等式 $|x-2| \geqslant 10$.

解 由 $|x-2| \geqslant 10$ 得

$$x-2 \geqslant 10 \text{ 或 } x-2 \leqslant -10$$

因此不等式的解为

$$x \geqslant 12 \text{ 或 } x \leqslant -8.$$

【24】 解不等式 $|x| > |x+1|$.

解 将不等式两边平方得$(x+1)^2<x^2$,即$2x+1<0$.所以,不等式的解为$x<-\frac{1}{2}$.

【25】 解不等式$|2x-1|<|x-1|$.

解 将不等式两边平方,得$(2x-1)^2<(x-1)^2$,即$3x^2-2x<0$.解之得$0<x<\frac{2}{3}$.

【26】 解不等式$|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

解 令$x+2=t$,则有

$$|t|+|t-4|\leqslant 12,$$

即
$$|t-4|\leqslant 12-|t|.$$

两边平方得$t^2-8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2$,

即
$$3|t|\leqslant 16+t.$$

将上式两边平方,化简得$t^2-4t-32\leqslant 0$,

解之得
$$-4\leqslant t\leqslant 8,$$

即
$$-4\leqslant x+2\leqslant 8.$$

因此
$$-6\leqslant x\leqslant 6.$$

【27】 解不等式$|x+2|-|x|>1$.

解 原式可化为$|x|+1<|x+2|$,两边平方并化简得$2|x|<4x+3$,再将上式两边平方得$4x^2<16x^2+24x+9$,即$4x^2+8x+3>0$.

解之得
$$x>-\frac{1}{2}\text{ 或 }x<-\frac{3}{2}.$$

但容易验证,当$x<-\frac{3}{2}$时有$|x+2|<|x|$,故$x<-\frac{3}{2}$不是原不等式的解.

因此,原不等式的解为$x>-\frac{1}{2}$.

【28】 解不等式$||x+1|-|x-1||<1$.

解 将不等式两边平方并化简得

$$x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|,$$

即 $$x^2+\frac{1}{2}<x^2-1,$$

或 $$x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right),$$

显然 $x^2+\frac{1}{2}<x^2-1$ 不成立. 故

$$x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right),$$

即 $$x^2<\frac{1}{4}.$$

解之得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

【29】 解不等式 $|x(1-x)|<0.05$.

证 由 $|x^2-x|<\frac{1}{20}$ 得

$$-\frac{1}{20}<x^2-x<\frac{1}{20},$$

故原不等式可化为

且 $$\begin{cases} x^2-x-\frac{1}{20}<0, \\ x^2-x+\frac{1}{20}>0. \end{cases} \qquad (*)$$

由 $$x^2-x-\frac{1}{20}<0,$$

可得 $$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{5}.$$

由 $$x^2-x+\frac{1}{20}>0,$$

可得 $$x<\frac{5-\sqrt{20}}{10},$$

或 $$x>\frac{5+\sqrt{20}}{10},$$

因此使(*)式中两个不等式同时成立的 x 为

$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10},$$

或
$$\frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【30】 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

证 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$

$$=\frac{x^2+2x|x|+x^2}{4}+\frac{x^2-2x|x|+x^2}{4}=x^2.$$

【31】 测量长度 10 厘米时,绝对误差为 0.5 毫米;测量距离 500 千米时,绝对误差等于 200 米.哪种测量较为精确?

解 用相对误差 $\delta=\frac{\Delta}{|a|}$ 进行比较,其中 a 为被测量的精确值,Δ 为绝对误差.

对于前者:$\delta=\frac{0.5\times0.1}{10}=0.5\%$,

对于后者:$\delta=\frac{200}{500\times1000}=0.04\%$,

所以,测量距离 500 千米时,测量较为精确.

【32】 数 $x=2.3752$,若这个数的相对误差为 1%,试求此数包含几位精确数字?

解 因为 $\frac{\Delta}{2.3752}=0.01$,所以 $\Delta=0.023752<0.05=\frac{0.1}{2}$.

因此,此数包含两位准确数字.

【33】 数 $x=12.125$,含有 3 位精确数字,试求此数的相对误差是多少?

解 因为 x 包含三位准确数字,所以 $\Delta<0.05$.于是

$$\delta=\frac{\Delta}{|x|}<\frac{0.05}{12.125}<0.42\%.$$

【34】 矩形的边为 $x = 2.50$ 厘米 ± 0.01 厘米，$y = 4.00$ 厘米 ± 0.02 厘米. 问这个矩形的面积 S 在什么范围内？如果其边长取平均值时，矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少？

解　$S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02) = 9.9102(\text{cm}^2)$,

$S_{\max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02) = 10.0902(\text{cm}^2)$,

故　$9.9102 \leqslant S \leqslant 10.0902$,

$S_{\text{平均}} = 2.50 \times 4.00 = 10(\text{cm}^2)$,

$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(\text{cm}^2)$,

$\Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(\text{cm}^2)$,

故　$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902(\text{cm}^2)$,

$$\delta = \frac{\Delta}{10} \leqslant \frac{0.0902}{10} = 0.902\%.$$

【35】 物体的重量为 $p = 12.59$ 克 ± 0.01 克，体积为 $V = 3.2$ 厘米^2 ± 0.2 厘米^3，若物体的重量和体积都取其平均值，求物体的比重，并估算比重的绝对误差和相对误差.

解　比重

$$C_{\text{平均}} = \frac{12.59}{3.2}\ \text{g/cm}^3 = 3.93\ \text{g/cm}^3,$$

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0}\ \text{g/cm}^3 = 4.20\ \text{g/cm}^3,$$

$$C_{\min} = \frac{12.58}{3.2}\ \text{g/cm}^3 = 3.70\ \text{g/cm}^3,$$

$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27\ \text{g/cm}^3$,

$\Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23\ \text{g/cm}^3$,

$C_{\min} \leqslant C \leqslant C_{\max}$,

故

$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27\ \text{g/cm}^3$,

$$\delta = \frac{\Delta}{C} \leqslant \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%.$$

【36】 圆半径 $r = 7.2$ 米 ± 0.1 米. 若取 $\pi = 3.14$,求出的圆面积的最小相对误差?

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 162.78$(米^2),

$$\Delta_1 = \pi \times (7.2 + 0.1)^2 - \pi \times 7.2^2 = 1.45\pi,$$

$$\Delta_2 = \pi \times 7.2^2 - \pi \times (7.2 - 0.1)^2 = 1.43\pi,$$

故 $\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi \approx 4.55$(米^2),

即一般圆面积 A 为 162.78 米^2 $\pm$ 4.55 米^2,$\delta \leqslant \dfrac{4.55}{162.78} < 2.8\%$.

【37】 测得直角平行六面体 $x = 24.7$ 米 ± 0.2 米;$y = 6.5$ 米 ± 0.1 米;$z = 1.2$ 米 ± 0.1 米;这个平行六面体的体积 V 在什么范围内?若其测量都取其平均值,求出的这个平行六面体的体积为多少绝对误差和相对误差?

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leqslant V \leqslant 24.9 \times 6.6 \times 1.3$,

即 172.480(米^3) $\leqslant V \leqslant 213.642$(米^3).

当 x、y、z 均取平均值时,

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660(\text{米}^3),$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{米}^3),$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{米}^3),$$

故 $\Delta \leqslant 20.982$(米^3),

$$\delta \leqslant \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

【38】 正方形的边长为 x,其中 2 米 $< x <$ 3 米,问边长的绝对误差应为多小时,才能使确定这个正方形的面积精确到 0.001 米^2?

解 由题设我们有

$$0 < x^2 - 4 < 0.001, 0 < 9 - x^2 < 0.001,$$

解之得 $2 < x < 2.00024$,

或 $2.99983 < x < 3$,

因此,Δ 取二者中误差较小者,即

$$\Delta \leqslant 0.00017(\text{米}) = 0.17(\text{毫米}).$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米时,能使此正方形的面积

精确到 0.001 米^2.

【39】 若矩形每边边长均不超过 10 米，为了使它的面积能精确到 0.01m^2 来计算，求在测量矩形的边长 x 和 y 时所能允许的绝对误差 Δ.

解 根据题设，我们有

$$(x+\Delta)(y+\Delta)-xy\leqslant 0.01,$$

即 $$\Delta^2+(x+y)\Delta\leqslant 0.01.$$

由于 $x\leqslant 10, y\leqslant 10$，所以只要

$$\Delta^2+20\Delta-0.01\leqslant 0,$$

解之得（注意 $\Delta>0$），

$$\Delta\leqslant\frac{-20+\sqrt{20^2+0.04}}{2}=-10+\frac{20.000999975}{2}$$

$$=0.0004999875(\text{米}).$$

【40】 假设 $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$ 为数 x 及 y 的相对误差，$\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差，证明：$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y)$.

证 $x=a+\Delta_x, y=b+\Delta_y$,

其中 a 与 b 分别是 x 和 y 的精确值，Δ_x 与 Δ_y 是 x 和 y 的绝对误差，则有，xy 的绝对误差

$$\begin{aligned}\Delta&=|xy-ab|\\&=|b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\Delta_y|\\&\leqslant|b|\Delta_x+|a|\Delta_y+\Delta_x\Delta_y.\end{aligned}$$

于是 $$\begin{aligned}\delta(xy)&=\frac{\Delta}{|ab|}\\&\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|}\\&=\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).\end{aligned}$$

§ 2. 序列的理论

1. 序列极限的概念

假设对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

则称序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$ 或 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有极限 a(简称收敛于 a),即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,特别是若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则称 x_n 为无穷小.

没有极限的序列称为发散的.

2. 极限存在的准则

(1) 如果 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

(2) 单调且有界的序列具有极限.

(3) 柯西判别法　序列 x_n 极限存在的必要且充分条件是:对于任何的 $\varepsilon>0$ 都存在数 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时:$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$.

3. 序列极限的基本定理

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在,则有

(1) 如果 $x_n\leqslant y_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(4) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4. 数 e.

序列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$ 具有有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots.$$

5. 无穷极限

符号 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 表示:对于任何的 $E>0$,都存在数 $N=N(E)$,使当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$.

6. 极限点(聚点)

若存在子序列:

$$x_{p_1},x_{p_2}\cdots,x_{p_n},\cdots\qquad(1\leqslant p_1<p_2<\cdots)$$

使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}=\xi$,则数$\xi$(或符号$\infty$)称为已知序列$x_n(n=1,2,\cdots)$的聚点.

任何有界序列至少有一个有穷的聚点(**布尔查诺－威尔斯特拉斯原理**),如这个聚点是惟一的,则它就是该序列的有穷极限.

序列x_n的最小聚点(有穷的或无穷的)$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$称作下极限;而其最大聚点$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$称为此序列的上极限.等式$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$是序列$x_n$的(有穷的或无穷的)极限存在的必要且充分的条件.

【41】 假设$x_n=\dfrac{n}{n+1}(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

对任一给定的$\varepsilon>0$,确定数$N=N(\varepsilon)$,使得若$n>N$时,

$$|x_n-1|<\varepsilon.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N					

证 因为

$$|x_n-1|=\frac{1}{n+1},\qquad \forall\varepsilon>0^{(*)},$$

要使$|x_n-1|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$,即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.故取

$$N=N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

则当$n>N$时,$|x_n-1|<\varepsilon$.因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N	10	100	1000	10000	…

* 记号$\forall$表示"对于任给的",记号$\exists$表示"存在".

【42】 若

(1) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(2) $x_n=\dfrac{2n}{n^3+1}$;

(3) $x_n=\frac{1}{n!}$;　　　　(4) $x_n=(-1)^n\cdot 0.999^n$.

证明 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 是无穷小(即极限等于 0).

对任一给定的 $\varepsilon>0$,确定 $N=N(\varepsilon)$ 使得当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$.

对应上述四种情况,填下表:

ε	0.1	0.001	0.0001	$\cdots$
N				

证　(1) 因为 $|x_n|=\frac{1}{n}$,所以,$\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$. 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 因为 $|x_n|=\frac{2n}{n^2+1}<\frac{2}{n}$,所以,$\forall\varepsilon>0$,要 $|x_n|<\varepsilon$,只要 $\frac{2}{n}<\varepsilon$. 即 $n>\frac{2}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(3) $|x_n|=\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{n}$,$\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(4) $|x_n|=0.999^n$,$\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n|<\varepsilon$,只要 $0.999^n<\varepsilon$,即 $n\lg 0.999<\lg\varepsilon$,由于 $\lg 0.999<0$,故只要

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.999}\approx 2302\lg\frac{1}{\varepsilon},$$

取　　$N=\left[2302\lg\frac{1}{\varepsilon}\right].$

则当 $n>N$ 时，$|x_n|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

填表：

ε		0.1	0.001	0.0001	…
(1)	N	10	1000	10000	…
(2)	N	20	2000	20000	…
(3)	N	10	1000	10000	…
(4)	N	2302	6906	9208	…

【43】 证明序列

(1) $x_n=(-1)^n n$;　　　(2) $x_n=2^{\sqrt{n}}$;

(3) $x_n=\lg(\lg n)\quad(n\geqslant 2).$

当 $n\to\infty$ 时，有无穷极限(亦即是无穷大)，即对于任意的 $E>0$，确定数 $N=N(E)$，使得当 $n>N$ 时，$|x_n|>E.$

对应上述各种情况，填下表：

E	10	100	1000	10000	…
N					

证　(1) $|x_n|=n$，$\forall E>0$，要使 $|x_n|>E$，只要 $n>E$，取 $N=[E]$，则当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty.$

(2) $|x_n|=2^{\sqrt{n}}$. $\forall E>0$，要使 $|x_n|>E$，只要 $2^{\sqrt{n}}>E$. 即

$$n>\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2,$$

取　　$N=\left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right],$

则当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty.$

(3) 当 $n>10$ 时，$\lg(\lg n)>0$，

故此时　$|x_n|=\lg(\lg n)$

$\forall E>0$，要 $|x_n|>E$，只要 $\lg(\lg n)>E$，

即　　$n>10^{10^E}$，

取 $N=[10^{10^E}]$,
则当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

填表:

E		10	100	1000	10000	…
(1)	N	10	100	100	10000	…
(2)	N	11	44	99	176	…
(3)	N	$10^{10^{10}}$	$10^{10^{100}}$	$10^{10^{1000}}$	$10^{10^{10000}}$	…

【44】 证明:$x_n=n^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$ 无界,但是当 $n\to\infty$ 时,它并不是无穷大.

证 因为

$$x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & \text{当 } n=2k \text{ 时},\\ \dfrac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时},\end{cases}$$

所以 $x_{2k}\to\infty$,$x_{2k+1}\to 0(k\to\infty)$,故 x_n 无界,且不趋于无穷大.

【45】 用不等式表示下列各式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

解 (1) $\forall E>0,\exists N=N(E)$,使得当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$,此即,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

(2) $\forall E>0,\exists N=N(E)$,使得当 $n>N$ 时,$x_n<-E$,此即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

(3) $\forall E>0,\exists N=N(E)$,使得当 $n>N$ 时,$x_n>E$,此即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

假设 n 为自然数列,求下列各式(46 ~ 57) 的值:

【46】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000}{n+\dfrac{1}{n}}=0.$

【47】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $|\sin n!|\leqslant 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

【49】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

【50】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$　　$(|a|<1,\ |b|<1)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}$.

【51】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

解 $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

【52】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

解 当 $n=2k$ 时(k 为自然数)

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$
$$=\left(\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}\right)+\left(\frac{3}{2k}-\frac{4}{2k}\right)+\cdots+\left(\frac{2k-1}{2k}-\frac{2k}{2k}\right)$$
$$=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2}.$$

当 $n=2k+1$ 时,

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$
$$=\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}\right)+\left(\frac{3}{2k+1}-\frac{4}{2k+1}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{2k-1}{2k+1}-\frac{2k}{2k+1}\right)+\frac{2k+1}{2k+1}$$
$$=-\frac{k}{2k+1}+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\longrightarrow\frac{1}{2}(k\to\infty).$$

由于不同子列的极限值不同,所以极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right],$$

不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 因为

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)-\left(\frac{2^2}{n^3}+\frac{4^2}{n^3}+\cdots\frac{(2(n-1))^2}{n^3}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)-4\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6n^3}-4\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\right]$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$

解 设$f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

则 $$f(n)+g(n)=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n}=2f(n+1)-1,$$

故 $$2f(n+1)-f(n)=g(n)+1,$$

又 $$2f(n+1)-f(n)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n}+\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$=f(n)+\frac{2n+1}{2^n},$$

故 $$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n},$$

而 $\lim_{n\to\infty}(g(n)+1)=3$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0^{(*)},$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$

(*)参看第58题.

【56】 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right].$

解 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

【57】 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}).$

解 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}=2.$$

证明下列等式(58 ~ 66).

【58】 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$

证 因为 $2^n=(1+1)^n$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1>\frac{n(n-1)}{2},$$

故 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}\quad(n\geqslant 2)$,

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$,

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$

【59】 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$

证　因为$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$,

而　$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0,$$

因此　$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

【60】　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\qquad(a>1).$

证　当$k\leqslant 0$时,显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{n^{-k}}\right)=0,$$

下面讨论当$k>0$时的情形.

设　$a=1+h\qquad(h>0)$,

则
$$\begin{aligned}a^n&=(1+h)^n\\&=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2\\&=\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.\end{aligned}$$

若$k=1$,则有

$$\begin{aligned}0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}&<\frac{2n}{n(n-1)(a-1)^2}\\&=\frac{2}{(n-1)(a-1)^2},\end{aligned}$$

而　$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}=0,$$

所以　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0.$$

而当$k>0$但$k\neq 1$时,

因为　$$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k,$$

而　$$a^{\frac{1}{k}}>1,$$

所以　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

【61】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

证 取 $k=[|a|]$,则当 $n>k$ 时

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{k}\cdot\frac{|a|}{k+1}\cdots\frac{|a|}{n}$$

$$<|a|^k\frac{|a|}{n}=\frac{|a|^{k+1}}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{k+1}}{n}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

【62】 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$,若 $|q|<1$.

证 当 $q=0$ 时,$nq^n=0$,结论显然成立.

当 $0<|q|<1$ 时,令 $a=\frac{1}{|q|}$,则 $a>1$,

由题 60 有 $\lim\limits_{n\to\infty}n|q|^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$,

因此 $$\lim_{n\to\infty}nq^n=0.$$

【63】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0).$

证 (1) 当 $a=1$ 时,等式显然成立.

(2) 当 $a>1$ 时,对任意给定的 ε,取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,

则当 $n>N$ 时,$1+n\varepsilon>a$,而

$$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon,$$

所以 $$(1+\varepsilon)^n>a,$$

因此,当 $n>N$ 时,我们有,

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,$$

即 $$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon,$$

此即 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

(3) 当 $0<a<1$ 时,令 $h=\frac{1}{a}$,则 $h>1$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{h}}=1,$$

总之,当 $a>0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【64】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \qquad (a>1).$

证 设 $\log_a n=h, m=[h], a=1+\lambda(\lambda>0)$.

则 $$n=a^h\geqslant\frac{1}{a^2}a^{m+2}=\frac{1}{a^2}(1+\lambda)^{m+2}$$

$$>\frac{1}{a^2}\frac{(m+2)(m+1)}{2}\lambda^2>\frac{\lambda^2}{a^2}\frac{(m+1)^2}{2},$$

从而 $$(m+1)<\frac{\sqrt{2}a}{a-1}\sqrt{n},$$

即 $$\log_a n=h<m+1<\frac{\sqrt{2}a}{a-1}\sqrt{n},$$

所以 $$0<\frac{\log_a n}{n}<\frac{\sqrt{2}a}{a-1}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}a}{a-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

【65】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证 令 $a_n=\sqrt[n]{n}$,则 $a_n>1$. 所以我们有,当 $n>2$ 时,

$$n=a_n^n>\frac{n(n-1)}{2}(a_n-1)^2\geqslant\frac{n^2}{4}(a_n-1)^2,$$

由此,可得

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

【66】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 我们首先证明

$$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

事实上，设 $x_n=\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$，

则 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n3}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{3},$$

而
$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&\leqslant 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},\\&=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,\end{aligned}$$

故 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}<n+1,$$

而 $$x_1=\frac{1}{3}<1,$$

因此 $$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!.$$

即 $$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

从而 $$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

【67】 当 n 充分大时，下列各式哪个大？

(1) $100n+200$ 与 $0.01n^2$；

(2) 2^n 与 n^{1000}；

(3) 1000^n 或 $n!$

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{100n+200}{0.01n^2} = 0,$$

所以当 n 充分大时，$0.01n^2$ 比 $100n+200$ 大些.

(2) 由第 60 题结果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1000}}{2^n} = 0,$$

所以当 n 充分大时，2^n 比 n^{1000} 大.

(3) 由第 61 题结果知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000^n}{n!} = 0,$$

所以当 n 充分大时，$n!$ 比 1000^n 大.

【68】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$

提示：参照第 10 题.

证 由 10 题结果，我们有

$$0 < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$$

【69】 证明序列

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots),$$

是单调递增且上方有界,而序列

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots),$$

是单调递减且下方有界. 由此推导出这些序列有共同的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}.$$

证 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

而 $x_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

注意到,当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时,$1-\frac{k}{n+1}>1-\frac{k}{n}$

且 x_{n+1} 比 x_n 增加一项正数. 所以 $x_n<x_{n+1}$. 又当 $k>2$ 时

$$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1, \frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}},$$

所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$

即 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 上方有界.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，设为 e.

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n},$$

即 $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

所以 $$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

即 $$y_{n-1} > y_n.$$

又 $$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$> \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2,$$

所以，数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 单调减少且下方有界，故

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

存在，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}.$$

注：从此题证明知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

后面题目的解答常用到这一不等式.

【70】 证明

$$0 < \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

当指数 n 为何值,式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

解 由 69 题的结果知

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

所以 $$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

而 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},$$

因此 $$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

要 $\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.001$,只要$\frac{3}{n}\leqslant 0.001$,即 $n\geqslant 3000$. 所以当指数 n 是一个不小于 3000 的自然数时,$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001.

【71】 假设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列,而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$($p_n,q_n\in[-1,0]$) 的任意数列,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

证 令 $k_n=[p_n]$,则

$$k_n\leqslant p_n<k_n+1,$$

由于 $p_n\to+\infty$,故 $k_n\to+\infty$. 按 69 题的方法,我们可证(或利用 89 题的结果)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=\mathrm{e},$$

由于 $$\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1},$$

所以 $$\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}>\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}>\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}.$$

若 $q_n\to-\infty$，令 $p_n=-q_n$，则 $p_n\to+\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)=\mathrm{e},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

【72】 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$.

由此推导出公式 $\mathrm{e}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}$，

其中 $0<\theta_n<1$，并计算数 e(精确到 10^{-5}).

证　因为 $$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

对于固定的 $k(k<n)$，有

$$x_n>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

令 $n\to\infty$,在上式两边取极限得

$$e\geqslant 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 均成立,因此,我们有

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant e,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}x_n=e,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

其次,设 $\beta_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$,

则
$$\begin{aligned}0&<\beta_{n+m}-\beta_n\\&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

现固定 n,令 $m\to\infty$,取极限得

$$0<e-\beta_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2},$$

而 $$\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n},$$

所以 $$0<e-\beta_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n},$$

即 $$e-\beta_n=\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中 $0<\theta_n<1$. 因此

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}. \qquad ①$$

下面利用公式①计算 e,使之准确到 10^{-5}. 首先须确定选取怎样的 n,才能实现这一精确度. 通过计算知可取 $n=8$. 事实上,此时,公式 ① 中的余项

$$\frac{\theta_8}{8!8}<\frac{1}{8!8}<3.2\times10^{-6},$$

其次,还须考虑计算每一项时的舍入误差,为保证精确到 10^{-5},我们计算每一项时,计算到第六位小数,并采用四舍五入法. 则舍入误差总的不超过 $\frac{1}{2\times10^6}\times6=\frac{3}{10^6}$,

于是总误差不超过 $7\times10^{-6}<10^{-5}$.

计算每一项如下

$$\begin{array}{rr}
 & 2.000000 \\
 & \frac{1}{2!}=0.500000 \\
 & \frac{1}{3!}=0.166667 \\
 & \frac{1}{4!}=0.041667 \\
 & \frac{1}{5!}=0.008333 \\
 & \frac{1}{6!}=0.001389 \\
 & \frac{1}{7!}=0.000198 \\
+ & \frac{1}{8!}=0.000025 \\
\hline
 & 2.718279
\end{array}$$

故 $e\approx2.71828$,e 介于 2.71827 与 2.71829 之间.

【73】 证明数 e 为无理数.

证 反设 e 为有理数$\frac{m}{n}$,则由 72 题的结论,我们有

$$\frac{m}{n}=\mathrm{e}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}$$
$$(0<\theta_n<1),$$

即 $$\frac{\theta_n}{n!n}=\frac{m}{n}-2-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{n!}\qquad(0<\theta_n<1).$$

上面等式两边同乘以 $n!$,得

$$\frac{\theta_n}{n}=n!\left(\frac{m}{n}-2-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right).$$

上式右端为一整数,右端为一小数,矛盾.

因此 e 为无理数.

【74】 证明不等式$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

证 由 8 题的结论,我们有

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n=\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

下面再证$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$,

设 $x_n=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$,则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{\mathrm{e}}<n,$$

而 $$x_1=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

所以 $$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!,$$

即 $$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!,$$

因此 $$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

【75】　证明不等式

(1) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$,其中 n 为任意自然数.

(2) $1+\alpha < e^{\alpha}$,其中 α 为不为于零的实数.

证　(1) 因为 $1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$,

两边取对数即得 $0 < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$,

所以　$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

又　$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$,

两边取对数得 $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$,

故　$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

因此　$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

(2) 我们这里只证明当 α 为正有理数的情况,至于 $\alpha \neq 0$ 为任意实数的情形见 1289 题(1)

设 $\alpha = \frac{p}{q}$,这里 p,q 为正整数. 而

$$(1+x)^n > 1+nx \qquad (x > -1, n \text{ 为正整数}),$$

且　$e > \left(1+\frac{1}{q}\right)^q$,

所以　$e^{\alpha} > \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q\alpha} = \left(1+\frac{1}{q}\right)^p > 1+\frac{p}{q} = 1+\alpha$.

【76】　求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1) = \ln a\,(a>0)$,

其中 $\ln a$ 为取 $e = 2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

证　当 $a=1$ 时,等式显然成立.

下面先考虑 $a>1$ 时的情形.

令 $b_n = a^{\frac{1}{n}}-1$,则 $b_n > 0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

又 $$\frac{\ln a}{n}=\ln(b_n+1),$$

即 $$n=\frac{\ln a}{\ln(b_n+1)},$$

所以 $$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\frac{b_n}{\ln(b_n+1)}\ln a.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,

故存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$0<b_n<1$. 故对于 $n>N$,存在唯一正整数 k_n,使$\frac{1}{k_n+1}<b_n<\frac{1}{k_n}$,且 $k_n\to\infty(n\to\infty)$.

由 75 题(1) 知$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,

故 $$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+b_n)$$
$$<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n}.$$

从而 $$k_n<\frac{1}{\ln(1+b_n)}<k_n+2,$$

故 $$\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{k_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{k_n+2}{k_n}=1,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}=1,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a.$$

设 $0<a<1$,则 $b=\frac{1}{a}>1$.

由上面的结果有

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right]n(b^{\frac{1}{n}}-1)$$
$$=-\ln b=\ln a,$$

因此对任何 $a>0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$.

利用关于单调有界序列的极限存在的定理，证明下列各序列的收敛性(77 ～ 81).

【77】 $x_n=p_0+\dfrac{p_1}{10}+\cdots+\dfrac{p_n}{10^n}\qquad(n=1,2,\cdots)$,

其中 $p_i(i=0,1,2,\cdots)$ 是非负整数，从 p_1 起不大于 9.

证　由于 $0\leqslant p_i\leqslant 9\qquad(i=1,2,\cdots)$,

故 $$x_{n+1}-x_n=\frac{p_n}{10^n}\geqslant 0,$$

且 $$p_0\leqslant x_n\leqslant p_0+9\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)<p_0+1,$$

即序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 是单调增加且有界的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

【78】 $x_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$.

证　当 $n>10$ 时，

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n+9}{2n-1}<1,$$

即从第 10 项开始，序列是单调减少的，且 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

【79】 $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

证　因为 $x_{n+1}=x_n\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)<x_n$

又 $x_n>0$. 即序列 $\{x_n\}$ 是单调减少且下方有界的，故 $\{x_n\}$ 收敛.

【80】 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

证　$x_{n+1}=x_n\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)>x_n$,

所以序列 $\{x_n\}$ 是单调增加的，又因为 $1+a<e^a$，所以

$$0<x_n<e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdots e^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<e,$$

即序列 $\{x_n\}$ 是有界的，故 $\{x_n\}$ 收敛.

【81】 $x_1=\sqrt{2}$, $\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\quad \cdots$,

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}},\cdots.$$

证 显然,序列$\{x_n\}$是单调增加的.下面我们用数学归纳法证明$x_n<2$.

事实上,当$n=1$时,$x_1=\sqrt{2}<2$,

假设$x_k<2$,则$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$,因而,对一切自然数$n$,均有$x_n<2$.

即$\{x_n\}$是有界序列,因而$\{x_n\}$收敛.

利用柯西判别法,证明下列各序列的收敛性(82 ~ 86).

【82】 $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$.

其中$|a_k|<M(k=0,1,2,\cdots)$且$|q|<1$.

证
$$|x_{n+p}-x_n|=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}|$$
$$<M(q)^{n+1}(1+|q|+\cdots+|q|^{p-1})$$
$$<M|q|^{n+1}\frac{1}{1-|q|},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n+1}=0$,

故$\forall\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当$n>N$时,有

$$|q|^{n+1}<\frac{1-|q|}{M}\varepsilon,$$

于是当$n>N$时,对任何自然数p均有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,$$

由柯西收敛准则,知$\{x_n\}$收敛.

【83】 $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$.

证
$$|x_{n+p}-x_n|$$
$$=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\left|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right|$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}.$$

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，

则当 $n>N$ 时，对任何正整数 p 都有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

所以序列 $\{x_n\}$ 收敛.

【84】 $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}.$

证　$|x_{n+p}-x_n|$

$$=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对任何正整数 p 均有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，所以序列 $\{x_n\}$ 收敛.

【85】 $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}.$

提示：利用不等式

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\qquad(n=2,3,\cdots).$$

证　$|x_{n+p}-x_n|=\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+p)^2}\right|,$

而 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$,

因而 $|x_{n+p}-x_n|$

$$<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

当 $n>N$ 时,对任何正整数 p 均有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,$$

所以,序列$\{x_n\}$ 收敛.

【86】 如果存在数 C,使得

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<C \quad (n=2,3,\cdots),$$

则称序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 具有**有界变差**.

证明带有有界变差的序列是收敛的. 举出一个收敛序列而无有界变差的实例.

证 设

$$y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|,$$

因$\{x_n\}$ 是有界变差序列,则$\{y_n\}$ 是单调增加且有界的序列,因此$\{y_n\}$ 收敛. 由柯西准则,对任何对给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$|y_{n+p}-y_n|<\varepsilon$,即

$$|x_{n+1}-x_n|+|x_{n+2}-x_{n+1}|+\cdots+|x_{n+p}-x_{n+p-1}|<\varepsilon,$$

而 $|x_{n+p}-x_n|$

$$\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+2}-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_n|$$

$$<\varepsilon,$$

所以序列$\{x_n\}$ 收敛.

序列:$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},(-1)\frac{1}{n},\cdots$ 是以零为极限的收

敛序列,但它不是有界变差函数. 事实上

$$\begin{aligned}&|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|\\&>|x_2-x_1|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|\\&=2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

而 $$y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

是发散的*,又是递增的,故 $y_n\to+\infty$. 因而 $1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\cdots$ 是无界变差的.

* 证明见 88 题.

【87】 试说明某序列不满足柯西准则的意义.

解 即存在某 $\varepsilon_0>0$,不论对怎样的自然数 N,总存在 $n_0>N$ 及 p_0 使得 $|x_{n_0+p_0}-x_{n_0}|\geqslant\varepsilon_0$.

【88】 利用柯西判别法证明序列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 的发散性.

证 取 $n+p=2n$,则

$$\begin{aligned}|x_{2n}-x_n|&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\\&>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以序列 $\{x_n\}$ 发散.

【89】 证明如果序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛,则其任何子序列也收敛,并具有同一极限:$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$,而 $p_k\to+\infty$,所以,对于此 N,存在正整数 k_0,使得当 $k>k_0$ 时,$p_k>N$,因此

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon,$$

所以子序列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=a$.

【90】 证明:如果单调序列的某一子序列收敛,则该单调序

列也是收敛的.

证 设$\{x_n\}$是单调增加的,子序列$\{x_{p_n}\}$收敛于a.则对于任给的$\varepsilon>0$,存在正整数K,使当$k>K$时,$|x_{p_k}-a|<\varepsilon$,令$N=p_{K+1}$,若$n>N$,由于$p_1<p_2<p_3<\cdots\to+\infty$,故必有$p_k(k>K)$使$p_k\leqslant n<p_{k+1}$.而

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon,\ |x_{p_{k+1}}-a|<\varepsilon,$$

又 $$x_{p_k}\leqslant x_n\leqslant x_{p_{k+1}},$$

故必有 $$|x_n-a|<\varepsilon,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

【91】 证明:如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\forall\varepsilon>0$.$\exists$正整数$N$,使得当$n>N$时, $$|x_n-a|<\varepsilon,$$

又 $$|x_n-a|\geqslant||x_n|-|a||.$$

故当$n>N$时,$||x_n|-|a||<\varepsilon$,

因此 $$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

【92】 若$x_n\to a$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可作出哪些解释?

解 若$a\neq0$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\dfrac{a}{a}=1.$

若$a=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在.

例如设$x_n=\dfrac{1}{3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}$.这里$[\alpha]$表$\alpha$的最大整数部分.

即$\{x_n\}$为:$\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3^3},\dfrac{1}{3^3},\cdots$.则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.但显然

$$\lim_{m\to\infty}\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}}=1,\ \lim_{m\to\infty}\frac{x_{2m+1}}{x_{2m}}=\frac{1}{3},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$不存在.如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在.设$b=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$则$-1\leqslant b\leqslant1$.反之$|b|>1$,取$r$,使$|b|>r>1$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=|b|$,

故存在正整数N,使得当$n\geqslant N$时,$\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}>r$,从而,当$n\geqslant N$时

$$|x_n|=|x_N|\cdot\left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdot\left|\frac{x_{N+2}}{x_N}\right|\cdots\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|>|x_N|\cdot r^{n-N},$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. 这与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$相矛盾. 故$-1\leqslant b\leqslant 1$.

总的来说,若$a\neq 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$.

若$a=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能存在也可能不存在,当存在时,它必位于区间$[-1,1]$.

【93】 证明收敛的数列是有界的.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对于正数$\varepsilon=1$,存在正整数$N$,使得当$n>N$时,必有

$$|x_n-a|<1,$$

从而 $|x_n|<|a|+1\qquad(n>N)$.

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_k|,|a|+1\}$,

则 $|x_n|\leqslant M,\qquad(n=1,2,\cdots)$,

即$\{x_n\}$有界.

【94】 证明收敛的数列或达到其上确界,或达到其下确界,或两者都达到. 举出这三类序列的例子.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(1) 若$\{x_n\}$为常数数列,即$x_n=a(n=1,2,\cdots)$,则显然上、下确均达到.

(2) 若$\{x_n\}$为不恒为常数的收敛数列,则必存在某一正数ε_0,使得$\{x_n\}$中某些点位于区间$[a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0]$之外. 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知位于$[a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0]$之外的只有有限项. 如果在这有限项中有$x_{n_1}$使得$x_{n_1}>a+\varepsilon_0$,则$\{x_n\}$取到上确界. 如果在这有限项中有$x_{n_2}$使得$x_{n_2}<a-\varepsilon_0$,则$\{x_n\}$达到下确界. 如果在这有限项中即有$x_{n_1}$使

得 $x_{n_1} > a + \varepsilon_0$，又有 x_{n_2} 使得 $x_{n_2} < a - \varepsilon_0$，则$\{x_n\}$既达到上确界又达到下确界.

例 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 达到它的上确界 1；

$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots, -\frac{1}{n}, \cdots$ 达到它的下确界 -1；

$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \cdots$ 既达到它的上确界1，又达到它的下确界 -1.

【95】 证明趋向于 $+\infty$ 的数列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 一定达到其下确界.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时，$x_n > x_1$，故 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 中的最小者即为$\{x_n\}$的下确界.

求序列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 的最大项(96 ~ 98).

【96】 $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.

解 当 $n = 3$ 时，$n^2 > 2^n$；当 $n \neq 3$ 时，$n^2 \leqslant 2^n$，所以，最大项为 $x_3 = \frac{9}{8}$.

【97】 $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}$.

解 $$x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n} - \frac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 + 20} \leqslant \frac{1}{20},$$

而 $$x_{100} = \frac{1}{20},$$

所以，最大项为 $x_{100} = \frac{1}{20}$.

【98】 $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

解 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n + 1}$.

当 $n+1<1000$ 时，$x_{n+1}>x_n$；当 $n+1>1000$ 时，$x_{n+1}<x_n$。所以最大项为

$$x_{999}=x_{1000}=\frac{1000^{1000}}{1000!}.$$

求序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的最小项(99 ~ 100).

【99】 $x_n=n^2-9n-100$.

解 因为

$$x_{n+1}-x_n=2n-8,$$

故当 $1\leqslant n<4$ 时 $x_{n+1}<x_n$；当 $n>4$ 时 $x_{n+1}>x_n$. 而 $x_4=x_5$，故最小项为 $x_4=x_5=-120$.

【100】 $x_n=n+\dfrac{100}{n}$.

解 $x_n=n+\dfrac{100}{n}=\left(\sqrt{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)^2+20\geqslant 20.$

而 $x_{10}=20$，所以最小项为 $x_{10}=20$.

求出序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$(101 ~ 110) 的 $\inf\{x_n\}$，$\sup\{x_n\}$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$.

【101】 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$.

解 $\inf\{x_n\}=0,\sup\{x_n\}=1,$

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\varliminf_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

【101.1】 $x_n=(-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$.

解 $$x_n=\begin{cases}2+\dfrac{3}{2k-1}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时},\\ -\left(2+\dfrac{3}{2k}\right), & \text{当 } n=2k \text{ 时},\end{cases}$$

故 $$\sup\{x_n\}=2+3=5,$$

$$\inf\{x_n\}=-\left(2+\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -2, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 2.$$

【102】 $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

解 $$x_n = \begin{cases} -\frac{1}{2k-1}, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时}, \\ \frac{1}{2k}+1, & \text{当 } n = 2k \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 k 为自然数.

所以 $$\inf\{x_n\} = -1, \sup\{x_n\} = \frac{3}{2},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1.$$

【103】 $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

解 $$x_n = \begin{cases} 1+(-1)^k \frac{2k}{2k+1} & \text{当 } n = 2k \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+\frac{4l}{4l+1} & \text{当 } n = 4l \text{ 时} \\ 1-\frac{4l+2}{4l+3} & \text{当 } n = 4l+2 \text{ 时} \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

故 $$\inf\{x_n\} = 0, \sup\{x_n\} = 2,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 2.$$

【104】 $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

解 $$x_n = \begin{cases} 1-2+3, \text{当 } n = 4k \text{ 时}, \\ 1+2+3, \text{当 } n = 4k+1 \text{ 时}, \\ 1-2-3, \text{当 } n = 4k+2 \text{ 时}, \\ 1+2-3, \text{当 } n = 4k+3 \text{ 时}, \end{cases}$$

故 $$\inf\{x_n\} = -4, \sup\{x_n\} = 6,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -4, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 6.$$

【105】 $x_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

解 $$x_n=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{3k}{3k+2}, & \text{当 } n=3k+1 \text{ 时},\\ -\frac{1}{2}\frac{3k+1}{3k+3}, & \text{当 } n=3k+2 \text{ 时},\\ \frac{3k+2}{3k+4}, & \text{当 } n=3(k+1) \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $k=0,1,2\cdots$,

故 $$\inf\{x_n\}=-\frac{1}{2},\sup\{x_n\}=1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{2},\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1.$$

【106】 $x_n=(-1)^n n$.

解 $\inf\{x_n\}=-\infty,\sup\{x_n\}=+\infty$,

$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-\infty,\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

【107】 $x_n=-n[2+(-1)^n]$.

解 $\inf\{x_n\}=-\infty,\sup\{x_n\}=-1$,

$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-\infty,\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

【108】 $x_n=n^{(-1)^n}$.

解 $$x_n=\begin{cases}\frac{1}{2k+1}, \text{当 } n=2k+1 \text{ 时},\\ 2(k+1), \text{当 } n=2k+2 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$,

故 $$\inf\{x_n\}=0,\sup\{x_n\}=+\infty,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=0,\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

【109】 $x_n=1+n\sin\frac{n\pi}{2}$.

解 $$x_n=\begin{cases}1+(-1)^k(2k+1), & n=2k+1,\\ 1, & n=2k+2,\end{cases}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$,

故 $$\inf\{x_n\}=-\infty,\sup\{x_n\}=+\infty,$$
$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=-\infty,\varlimsup_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

【110】 $x_n=\dfrac{1}{n-10.2}$.

解 当 n 从 1 到 10 时，x_n 由负数往下降；
当 n 从 11 到 $+\infty$ 时，x_n 由正数往下降，故
$$\inf\{x_n\}=x_{10}=-5,\qquad \sup\{x_n\}=x_{11}=1.25,$$
$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

求出 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$(111 ~ 115).

【111】 $x_n=\dfrac{n^2}{1+n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

解 $$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{(3k+1)^2}{1+(3k+1)^2}, & \text{当 } n=3k+1 \text{ 时},\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{(3k+2)^2}{1+(3k+2)^2}, & \text{当 } n=3k+2 \text{ 时},\\ \dfrac{(3k+3)^2}{1+(3k+3)^2}, & \text{当 } n=3k+3 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$,

故 $$\varliminf_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{2},\varlimsup_{n\to\infty}x_n=1.$$

【112】 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n+\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

解 $$x_n=\begin{cases}-\left(1+\dfrac{1}{4k+1}\right)^{4k+1}+(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & n=4k+1,\\ \left(1+\dfrac{1}{4k+2}\right)^{4k+2}+(-1)^k, & n=4k+2,\\ -\left(1+\dfrac{1}{4k+3}\right)^{4k+3}+(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & n=4k+3,\\ \left(1+\dfrac{1}{4k+4}\right)^{4k+4}, & n=4k+4,\end{cases}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$,

故 $\qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -\left(e+\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \varlimsup_{n\to\infty} x_n = e+1.$

【113】 $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$

解 $\varliminf_{n\to\infty} x_n = 0, \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1.$

【114】 $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}.$

解 $$x_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{2^{2k+1}}\right)^{\frac{1}{2k+1}}, & n=2k+1, \\ (1+2^{2(k+1)})^{\frac{1}{2(k+1)}}, & n=2(k+1), \end{cases}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$,

故 $\qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = 1, \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 2.$

【115】 $x_n = \cos^n\frac{2n\pi}{3}.$

解 $\varliminf_{n\to\infty} x_n = 0, \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1.$

求下列各序列的聚点(116 ～ 120).

【116】 $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\cdots$

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$,聚点为 0,1.

【117】 $1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots.$

解 因为对固定的 k

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{k},$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

故序列的聚点为 $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots.$

【118】 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots$.

解 该序列正好包含(0,1)中的全部有理数,故对于闭区间[0,1]上的每点 x 在其任意的邻域内必有此数列中的无穷多个数,因此 x 必可作为某子列的极限,所以,x 是所述数列的聚点.因此[0,1]中的任何点都是所述数列的聚点,而[0,1]外的点都不是所述数列的聚点.

【119】 $x_n=3\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

解 $x_n=\begin{cases}3\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)-2, & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时},\\ 3\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)+2, & \text{当 } n=2k+2 \text{ 时},\end{cases}$

其中 $k=0,1,2,\cdots$,

故聚点为1,5.

【120】 $x_n=\frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

解 $x_n=\begin{cases}a & n \text{ 为偶数}\\ b & n \text{ 为奇数}\end{cases}$,故聚点为 a,b.

【121】 举出以已知数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1+\frac{1}{2},a_2+\frac{1}{2},\cdots,a_p+\frac{1}{2},a_1+\frac{1}{3},a_2+\frac{1}{3},\cdots$$

$$a_p+\frac{1}{3},\cdots,a_1+\frac{1}{n},a_2+\frac{1}{n},\cdots,a_p+\frac{1}{n},\cdots$$

以 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为聚点.

【122】 举出数列的例子,对这个数列,已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 所有各项均为其聚点,已举出的序列一定还有哪些聚点?

解 数列

$$a_1-1,a_1-\frac{1}{2},a_2-\frac{1}{2},a_1-\frac{1}{3},a_2-\frac{1}{3},a_3-\frac{1}{3},$$

$$a_1-\frac{1}{4},a_2-\frac{1}{4},a_3-\frac{1}{4},a_4-\frac{1}{4},\cdots,$$

$$a_1-\frac{1}{n},a_2-\frac{1}{n},a_3-\frac{1}{n},\cdots,a_n-\frac{1}{n},\cdots$$

是以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为其聚点的数列，并且数列$\{a_n\}$的聚点也为该数列的聚点.

【123】 列举下列序列的例子：

(1) 无有限的聚点；

(2) 有惟一的有限聚点，但不收敛；

(3) 有无限多的聚点；

(4) 以每一实数作为聚点.

证 (1) 序列 $x_n=n$ 没有有限的聚点.

(2) 序列 $1,1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\cdots,\frac{1}{n},n,\cdots$，有唯一聚点 0，但序列不收敛.

(3) 117 题及 118 题的序列均有无限多的聚点.

(4) 所有有理数排列而成的序列.

【124】 证明序列 x_n 和 $y_n=x_n\sqrt[n]{n}(n=1,2,\cdots)$ 有相同的聚点.

证 设 a 为$\{x_n\}$的一聚点，则存在一子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

则由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$知，

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\sqrt[n_k]{n_k}=a,$$

即 a 也为$\{y_n\}$的一聚点.

同理可证：若 b 为$\{y_n\}$的一聚点，则 b 必为$\{x_n\}$的一聚点.

【125】 证明有界序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 必有其收敛的子序列 $x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$.

证 因为$\{x_n\}$有界，故存在有限实数 a,b 使得

$$a\leqslant x_n\leqslant b\qquad(n=1,2,\cdots).$$

将区间$[a,b]$两等分，得区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，其中至少有一个包含$\{x_n\}$中的无限多项，将它记为$[a_1,b_1]$(若两者均包含$\{x_n\}$中的无限多项，则任取其一作为$[a_1,b_1]$)，再将区间$[a_1,b_1]$等分，又可得到$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，它包含$\{x_n\}$中的无限多项. 依此类推，我们得到一串区间：

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中每一$[a_n,b_n]$均包含$\{x_n\}$中的无限多项，且有

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0.$$

又由a_n,b_n的选取知

$$a\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant b,$$

即$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为单调有界数列. 故$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均收敛且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\xlongequal{\text{设}}c,$$

c是所有区间$[a_n,b_n]$($n=1,2,\cdots$)唯一的公共点，下面我们证明c是$\{x_n\}$的聚点. 现按下法选取$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{p_k}\}$：在包含于$[a_1,b_1]$内的x_n中任取一个作为x_{p_1}. 然后在包含于$[a_2,b_2]$内且在x_{p_1}后面的x_n中任取一个作x_{p_2}，如此类推(这是可能的，因为每个$[a_k,b_k]$中均包含有x_n中的无穷多项)，于是我们得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{p_k}\}$，满足

$$a_k\leqslant x_{p_k}\leqslant b_k.$$

因为 $$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=c,$$

故 $$\lim_{k\to\infty}x_{p_k}=c,$$

即c为$\{x_n\}$的一个聚点.

【126】 证明，如果序列x_n($n=1,2,\cdots$)无界，则存在子序列x_{p_n}，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\infty$.

证 因为x_n($n=1,2,\cdots$)无界，故存在某项x_{p_1}满足$|x_{p_1}|>1$.

由于数列x_n($n=p_1+1,p_2+2,\cdots$)也无界，故存在某项

$x_{p_2}(p_2 > p_1)$使得$|x_{p_2}| > 2$;依此类推,对于任意正整数k存在某项$x_{p_k}(p_k > p_{k-1})$满足

$$|x_{p_k}| > k \qquad (k = 1,2,\cdots),$$

因此　$\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k} = \infty$.

【127】 假设序列$x_n(n = 1,2,\cdots)$收敛,而序列$y_n(n = 1,2,\cdots)$发散,则能否确认关于序列

(1) $x_n + y_n$;　　(2) $x_n y_n$

的收敛性?试举适当的例子说明.

解　(1) $x_n + y_n$一定发散,事实上,若$x_n + y_n$收敛,则

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n$$

也收敛,这与题设相矛盾.

(2) $x_n y_n$可能收敛,也可能发散.

例:(a) $x_n = \dfrac{1}{n^2}(n = 1,2,\cdots)$收敛,

$y_n = n(n = 1,2,\cdots)$发散,

而　$x_n y_n = \dfrac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$收敛.

(b) $x_n = \dfrac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$收敛,

$y_n = n^2(n = 1,2,\cdots)$发散,

$x_n y_n = n(n = 1,2,\cdots)$发散.

【128】 假设序列x_n和$y_n(n = 1,2,\cdots)$发散,能否确认序列

(1) $x_n + y_n$;　　(2) $x_n y_n$

也发散,试举适当例子说明.

解　不能,例如

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2},$$

$$y_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

都为发散数列,但

$$x_n + y_n = 1,(x = 1,2,\cdots),$$

$$x_n y_n = 0,(n = 1,2,\cdots),$$

均为收敛序列.

【129】 假设:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 和 $y_n(n = 1,2,\cdots)$ 为任意序列,能否确认$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$?试举适当的例子说明.

解 不能,例如设

$$x_n = \frac{1}{n}, y_n = n^2,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

但 $x_n y_n = n$ 为发散序列.

【130】 假设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,由此能否得出或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,或$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

分析下列序列:$x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}, y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$

$(n = 1,2,\cdots).$

解 不能,例如设

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$

但 x_n 及 y_n 均为发散的.

【131】 证明

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$,

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

并举出上述不等式中严格不等式成立的例子.

证 (1) 设 $\alpha = \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ 根据定义,存在$\{x_n + y_n\}$的一个子序列$\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$使得

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}) = \alpha = \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n),$$

对于序列$\{x_{n_k}\}$,存在子序列$\{x_{n_{ki}}\}$使得

$$x_{n_{ki}} \to \beta = \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k},$$

显然　$\varliminf\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$,

又由于　$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \to \alpha - \beta$,

所以 $\alpha-\beta$ 为 $\{y_n\}$ 的一个聚点，从而

$$\alpha - \beta \geqslant \varliminf_{n\to\infty} y_n,$$

因此　$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \alpha \geqslant \beta + \varliminf\limits_{k\to\infty} y_n \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$.

下面再证右边的不等式.

设 $\alpha' = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$，则根据定义，存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha'$,

对于序列 $\{y_{n_k}\}$，必有子序列

$$y_{n_{k_i}} \to \beta' = \varlimsup_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) = \alpha' + \beta'$,

故 $\alpha' + \beta'$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点. 从而

$$\alpha' + \beta' \geqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n),$$

故　$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \alpha' + \beta' \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

(2) 设 $\tau = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$，则根据定义，存在 $\{y_n\}$ 的一个子序列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \tau$.

对于序列 $\{x_{n_k}\}$ 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使得

$$x_{n_{k_i}} \to \gamma = \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k},$$

而显然　$\varliminf\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$,

由于　$\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) = \gamma + \tau$,

故 $\gamma + \tau$ 为 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点，从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geqslant \gamma + \tau \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

下面证明右边的不等式，存在 $\{x_n + y_n\}$ 的一个子序列

$$x_{n_k} + y_{n_k},$$

使得　$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}) = \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \xlongequal{\triangle} A$.

对于序列$\{x_{n_k}\}$,存在子序列

$$x_{n_{k_i}} \to B = \varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

由于 $$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \to A - B,$$

故$A-B$为$\{y_n\}$的一个聚点,从而

$$A - B \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

因此 $$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A \leqslant B + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

下面是不等号成立的例子.

如设$x_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$,

$$y_n = 1 + (-1)^n, n = 1,2,\cdots,$$

则有 $$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n = 0 < \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n)$$
$$= 1 < \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 2.$$

如设

$$x_n = 1 + (-1)^n,$$
$$y_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, n = 1,2,\cdots,$$

则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 1 < \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n)$$
$$= 2 < \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 3.$$

【132】 假设$x_n \geqslant 0$及$y_n \geqslant 0(n = 1,2,\cdots)$证明

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$,

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

并举出上述不等式中产生严格不等式成立的例子.

证 (1) 先证右边的不等式,设$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$,则根据定义存在$\{x_n\}$的一子序列$\{x_{n_k}\}$使$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha \geqslant 0$对于序列$\{y_{n_k}\}$,存在一子序列$\{y_{n_{k_i}}\}$,使得$y_{n_{k_i}} \to \beta = \varlimsup\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \geqslant 0$,显然$\beta \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$由于

$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\alpha\beta$，故 $\alpha\beta$ 是 $\{x_ny_n\}$ 的一个聚点. 因此

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta\leqslant\alpha\varlimsup_{n\to\infty}y_n=\varliminf_{n\to\infty}x_n\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

再证左边的不等式，若 $\varliminf_{n\to\infty}x_n=0$，则不等式显然成立. 故不妨设 $\varliminf_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$，于是存在正整数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，$x_n>0$，根据定义，存在 $\{x_ny_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\alpha'\geqslant 0,$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$，存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$，使得

$$x_{n_{k_i}}\to\varlimsup_{k\to\infty}x_{n_k}=\beta'\geqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n=\alpha>0,$$

而 $\quad x_n>0\quad(n>N_0)$，

故 $\quad y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}\cdot y_{n_{k_i}})\cdot\dfrac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\dfrac{\alpha'}{\beta'}$，

故 $\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 为 $\{y_n\}$ 的一聚点，从而

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}y_n,$$

所以 $\quad\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\alpha'\geqslant\beta'\varliminf_{n\to\infty}y_n\geqslant(\varliminf_{n\to\infty}x_n)(\varliminf_{n\to\infty}y_n).$

(2) 先证右边的不等式. 可设 $\{y_n\}$ 有界，事实上，若 $\{y_n\}$ 无界，则 $\varlimsup_{n\to\infty}y_n=+\infty$，不等式显然成立. 设

$$A=\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n),$$

则根据定义，存在 $\{x_ny_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}y_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}y_{n_k})=A,$$

对于 $\{x_{n_k}\}$ 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使得

$$x_{n_{k_i}}\to B=\varliminf_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant 0.$$

若 $B=0$，则由于 $\{y_n\}$ 有界，知

$$\lim_{i\to\infty}(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})=0,$$

从而 $A=0$. 因此不等式显然成立.

故设 $B>0$，从而当 i 充分大时 $(i>i_0)$

$$x_{n_{k_i}} > 0,$$

故
$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} \cdot y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \to \frac{A}{B}.$$

因此$\frac{A}{B}$是$\{y_n\}$的一个聚点，从而

$$\frac{A}{B} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

故
$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = A \leqslant B(\varlimsup_{n\to\infty} y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

再证左边的不等式，根据定义，存在$\{y_n\}$的一个子列$\{y_{n_k}\}$使得$y_{n_k} \to C = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \geqslant 0$，

对于$\{x_{n_k}\}$，存在子列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}} \to D = \varliminf\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant 0$，

而
$$\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \geqslant 0,$$

且$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \to DC$，故$DC$为$\{x_n y_n\}$的一个聚点，从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \geqslant DC \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

下面是不等号成立的例子

如令$\{x_n\}$为：$\frac{1}{3},3,\frac{1}{3},3,\frac{1}{3},3,\cdots$

$\{y_n\}$为：$3,\frac{1}{9},3,\frac{1}{9},3,\frac{1}{9},\cdots$

则有不等式
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{27} < \varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n)$$
$$= \frac{1}{3} < (\varliminf_{n\to\infty} x_n)(\varlimsup_{n\to\infty} y_n) = 1,$$

再令　$\{x_n\}$为：$3,\frac{1}{9},3,\frac{1}{9},3,\frac{1}{9},\cdots$

$\{y_n\}$为：$\frac{1}{3},3,\frac{1}{3},3,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\cdots$

则有
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{3} < \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)$$
$$= 1 < \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 9.$$

【133】 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，则对任何的序列$y_n(n=1,2,\cdots)$都有

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \qquad (x_n\geqslant 0)$.

证 (1) 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，故

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

利用131题结果，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n=\lim_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$
$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n),$$

因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

(2) 分三种情况讨论：

(i) 设 $y_n\geqslant 0 \quad (n=1,2,\cdots)$,

则由132题的结果知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$
$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n).$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$,

(ii) 设 $y_n\leqslant 0 \quad (n=1,2,\cdots)$,

则 $-y_n\geqslant 0 \quad (n=1,2,\cdots)$.

于是由132题的结果有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n\cdot y_n)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\lim_{n\to\infty} x_n$$
$$=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n),$$

所以 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-y_n)$,

由上、下极限的定义，显然有等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

因此此时仍有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

(iii) 设$\{y_n\}$中有无穷多项是非负的,设这些项构成的子列为$\{y_{n_k}\}(y_{n_k}\geqslant 0,k=1,2,\cdots)$(如果$\{y_n\}$中只有有限项是非负的,则从某一项开始有$y_n<0$,这时由(ii)即知所要证的等式成立).

注意到$x_n\geqslant 0$,故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_{n_k}y_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}y_{n_k}$$
$$=\lim x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

【134】 证明:若对于某个序列$x_n(n=1,2,\cdots)(x_n\geqslant 0)$,任何序列$y_n(n=1,2,\cdots)$都使下列两个等式中至少有一个成立:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

或 (2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

则序列x_n是收敛的.

证 若(1)成立,设

$$\alpha=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

取$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\alpha,$$

取 $$A>\max\{-\alpha+1,0\},$$

令 $$y_n=\begin{cases}-x_n, & 当n\neq n_k时,\\ A, & 当n=n_k时,\end{cases}$$

则 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\alpha+A=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+A.$$

又由(1)有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+A,$$

从而 $$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

即$\{x_n\}$收敛,若(2)成立,取同样的y_n,注意到$x_n\geqslant 0$.则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\alpha A=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)A.$$

而由(2)有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n)A$,

因此　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$,

即$\{x_n\}$收敛.

【135】 证明:若 $x_n > 0(n = 1,2,\cdots)$ 且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1$,则序列 x_n 收敛.

证 由假设知

$$0 < \varlimsup_{n\to\infty} x_n < +\infty, 0 < \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} < +\infty.$$

利用132题的结果,有

$$1 = \varliminf_{n\to\infty}\left(x_n \cdot \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left(x_n \cdot \frac{1}{x_n}\right) = 1,$$

从而　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n}$,

因此　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

即 x_n 收敛.

【136】 证明:若序列 $x_n(n = 1,2,\cdots)$ 有界,且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则这个序列的聚点密布在下极限 $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 和上极限 $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 之间,亦即在区间$[l,L]$中的任意一个数都是该序列的聚点.

证 由定义,l,L 都是$\{x_n\}$的聚点,设 $a \in (l,L)$. 我们来证明 a 是 x_n 的聚点. 我们首先证明论断:对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及任意给定的正整数 N,必存在正整数 $\bar{n} > N$

使得　$|\, x_{\bar{n}} - a \,| < \varepsilon$,

由于　$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$,

则必有正整数 N',使得当 $n > N'$ 时

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| < \varepsilon,$$

令 $N_0 = \max\{N,N'\}$,则序列 $x_n(n = N_0 + 1, N_0 + 2,\cdots)$ 中必至

少有两项 $x_{n'}$，$x_{n''}$ 存在，使 $x_{n'} < a$，$x_{n''} > a$(因为否则的话，如无小于 a 的项，则必有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \geqslant a,$$

这与 $l < a$ 矛盾，如无大 a 的项，则必有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant a$，这与 $a < L$ 矛盾)，不妨设 $n' < n''$. 令满足 $n' \leqslant n \leqslant n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之最大者为 $\bar{n}$，显然 $\bar{n} \leqslant n'' - 1$ 且

$$x_{\bar{n}} < a, x_{\bar{n}+1} > a,$$

故 $$\bar{n} > N, \bar{n} > N',$$

并且 $$| x_{\bar{n}} - a | < x_{\bar{n}+1} - x_{\bar{n}} < \varepsilon,$$

论断的结论成立.

现取 $\varepsilon_1 = 1, N_1 = 1$，则存在 x_{n_1} $(n_1 > 1)$ 使 $| x_{n_1} - a | < 1$，再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}, N_2 = n_1$，则存在 x_{n_2} $(n_2 > n_1)$ 使得

$$| x_{n_2} - a | < \frac{1}{2}.$$

又取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}, N_3 = n_2$，则存在 x_{n_3} $(n_3 > n_2)$ 使

$$| x_{n_3} - a | < \frac{1}{3},$$

这样继续下去，则得 x_n 的一个子列 x_{n_k} 满足

$$| x_{n_k} - a | < \frac{1}{k},$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$，即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

【137】 假设数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$ 满足条件

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \qquad (m, n = 1, 2, \cdots),$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证 由于

$$x_n \leqslant x_{n-1} + x_1 \leqslant x_{n-2} + 2x_1 \leqslant \cdots \leqslant nx_1,$$

故 $0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x$，即数列 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 有界. 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=a,$$

则 $0\leqslant a\leqslant x_1$. 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N>1$, 使

$$\frac{x_N}{N}<a+\varepsilon,$$

对任何正整数 $n>N$ 有 $n=qN+r$.
其中 q 为正整数, $0\leqslant r<N$, 于是

$$\begin{aligned}x_n&=x_{qN+r}\leqslant x_{qN}+x_r\\&\leqslant x_{(q-1)N}+x_N+rx_1\leqslant\cdots\\&\leqslant qx_N+rx_1\leqslant qx_N+Nx_1,\end{aligned}$$

从而 $$\frac{x_n}{n}\leqslant\frac{qx_N}{n}+\frac{Nx_1}{n}\leqslant\frac{x_N}{N}+\frac{Nx_1}{n}<a+\varepsilon+\frac{Nx_1}{n},$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}\leqslant a+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}\leqslant a=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n},$$

因此 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在.

【138】 证明: 如果序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛, 则算术平均值的序列

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)(n=1,2,\cdots)$$

也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,

反之则结论不正确, 请举例说明.

证 法一: 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,

则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得

当 $n > N$ 时，

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

即 $$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

从而当 $n > N$ 时，

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$\leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_N + (n-N)(a+\varepsilon)}{n},$$

因此 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n \leqslant a + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n \leqslant a,$$

同理可证

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n \geqslant a.$$

因此 $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n = a.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\xi_n = a$$

法二：令

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

则 $$\xi_n = \frac{S_n}{n} = \frac{S_N}{n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n-N} \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

即 $$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \qquad (n = N+1, N+2, \cdots),$$

故 $$\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n-N} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

即 $$\frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n-N} = a + \alpha, \ |\alpha| < \varepsilon.$$

这样 $$\frac{S_n}{n} = \frac{S_N}{n} + (a+\alpha)\left(1 - \frac{N}{n}\right),$$

因此　$$\left|\frac{S_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|S_N|}{n}+|\alpha|+(|a|+|\alpha|)\frac{N}{n},$$

对于固定的 N，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|S_N|}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N}{n}=0,$

故存在 $N'>N$ 使得当 $n>N'$ 时，有

$$\frac{|S_N|}{n}<\varepsilon,\frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}.$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有 $\left|\frac{S_n}{n}-a\right|<3\varepsilon.$

因此　$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=a,$$

即　$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

但反之不然，例如设

$$x_n=(-1)^{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

则　$$\xi_n=\begin{cases}0, & 若\ n\ 为偶数,\\ -\dfrac{1}{n}, & 若\ n\ 为奇数,\end{cases}$$

ξ_n 收敛于 0，但 x_n 却发散.

【139】　证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

证　法一：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，故对于任给的 $M>0$ 存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$x_n>M$. 设

$$\xi_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

则当 $n>N$ 时，

$$\xi_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{n}+\frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{n}$$

$$>\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{(n-N)}{n}M.$$

令 $n\to\infty$,两边取下极限,得 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n\geqslant M$.

由 M 的任意性,我们有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$.

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

法二:设 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$,

因为 $$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

故对于任给的 $M>0$,存在自然数 N,使当 $n>N$ 时,$x_n>3M$

故 $$\frac{S_n}{n}=\frac{S_N}{n}+\frac{S_n-S_N}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right)>\frac{S_N}{n}+3M\left(1-\frac{N}{n}\right),$$

而对于此固定的 N

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_N}{n}=0,\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{N}{n}\right)=1,$$

故可取自然数 $N'>N$,使得当 $n>N'$ 时,

$$\frac{|S_N|}{n}<\frac{M}{2},1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是当 $n>N'$ 时,$\frac{S_n}{n}>M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

【140】 证明:如果序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛,及 $x_n>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,因 $x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$,

故 $a\geqslant 0$. 先考虑 $a>0$ 时的情况,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$.

于是,由 138 题的结论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}$$
$$=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n,$$

若 $a=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$.

由 139 题的结论,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2\cdots-\ln x_n)}$$
$$=0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

【141】 证明：若 $x_n>0 \quad (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 设 $y_1=x_1$，

$$y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}} \quad (n=2,3,\cdots),$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，设为 a，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在且为 a，故由 140 题结果有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdots y_n}=\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

【142】 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$

证 设 $x_n=\frac{n^n}{n!} \quad (n=1,2,\cdots)$，

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

所以，由 141 题结果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=e.$$

【143】 证明(施托尔茨定理)：若

(1) $y_{n+1}>y_n \quad (n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$

证 法一：设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$，

由此，并注意到$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，知对于给定的$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时，恒有$\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\varepsilon$，且$y_n>0$.

即

$$a-\varepsilon<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\varepsilon \qquad (n=N+1,N+2,\cdots).$$

又因为$y_{n+1}>y_n$，所以有

$$(a-\varepsilon)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(a+\varepsilon)(y_{N+2}-y_{N+1})$$

$$(a-\varepsilon)(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<(a+\varepsilon)(y_{N+3}-y_{N+2})$$

$$\cdots$$

$$(a-\varepsilon)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(a+\varepsilon)(y_{n+1}-y_n).$$

从而

$$(a-\varepsilon)(y_{n+1}-y_{N+1})<x_{n+1}-x_{N+1}<(a+\varepsilon)(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即
$$(a-\varepsilon)\left(1-\frac{y_{N+1}}{y_{n+1}}\right)+\frac{x_{N+1}}{y_{n+1}}<\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}<(a+\varepsilon)\left(1-\frac{y_{N+1}}{y_{n+1}}\right)+\frac{x_{N+1}}{y_{n+1}}.$$

令$n\to\infty$分别取上，下极限，并注意到$y_n\to+\infty$，我们有

$$a-\varepsilon\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant a+\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$的任意性，我们有$a\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=a$，

因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a.$$

法二：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$，且$y_n\to+\infty$，所以对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时，有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad 且 \qquad y_n>0$$

即 $$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $y_{n+1}>y_n$，所以 $y_{n+1}-y_n>0$.

故
$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1})$$
$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3}-y_{N+2})$$
$$\cdots$$
$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_n).$$

从而
$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_{N+1})<x_{n+1}-x_{N+1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即 $$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},$$

所以当 $n>N$ 时，$\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

另外，有（当 $n>N+1$ 时）
$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+\left(1-\frac{y_{N+1}}{y_n}\right)\cdot\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right),$$

所以 $$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

而对于固定的 N，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}=0$.

所以存在自然 $N'>N+1$ 使得当 $n>N'$ 时，
$$\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $n > N'$ 时

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

注 本题中,若将条件(3)换为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty \qquad (\text{或} -\infty),$$

结论仍成立,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty \qquad (\text{或} -\infty).$$

详见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章第二节.

【144】 求值:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{a^n}$ $\quad (a>1)$;(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lg n}{n}$.

解 (1) 设 $x_n = n^2$,

$y_n = a^n \quad (a > 1)$,

则 $y_{n+1} > y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

而 $$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n} = \frac{2n+1}{a^n(a-1)},$$

再设 $u_n = 2n+1, y_n = a^n$,

则 $$\frac{u_{n+1}-u_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{2(n+1)-2n}{a^{n+1}-a^n} = \frac{2}{a^n(a-1)} \to 0,$$

根据 143 题结论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{y_{n+1}-y_n} = 0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n(a-1)} = 0.$$

(2) 设 $x_n = \lg n, y_n = n$,

则 $y_{n+1} > y_n \qquad y_n \to \infty$,

且　$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)=0,$$

故　$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0.$$

注:143 题的结果常用来处理"$\frac{\infty}{\infty}$"型的待定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限.

【145】　证明:若 p 为自然数,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$.

证　(1) 设 $x_n=1^p+2^p+\cdots+n^p, y_n=n^{p+1}$,

则　$$y_{n+1}>y_n \qquad y_n\to+\infty,$$

且有　$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}$$
$$=\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+C_{p+1}^2n^{p-1}+\cdots+1}$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{(p+1)+O\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{p+1},$$

其中 $O\left(\frac{1}{n}\right)$为$\frac{1}{n}$的同阶无穷小. 即

$$\lim_{n\to\infty}O\left(\frac{1}{n}\right)=0,$$

且　$$\lim_{n\to\infty}O\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n=A\neq 0.$$

故　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1}{p+1}.$$

(2) 设 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$,

$y_n=(p+1)n^p$,

则 $y_{n+1}>y_n \quad y_n\to+\infty$,

且

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}&=\frac{(p+1)(n+1)^p+[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]}\\&=\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+O(n^{p-2})}{p(p+1)n^{p-1}+O(n^{p-2})}\\&=\frac{\frac{p(p+1)}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)}{p(p+1)+O\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{2},\end{aligned}$$

其中 $O(n^{p-2})$ 表示 n^{p-2} 的同阶无穷大,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{O(n^{p-2})}{n^{p-2}}=A \qquad (0<A<+\infty),$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2},$$

(3) 设 $x_n=1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p$,

$y_n=n^{p+1}$,

则 $y_{n+1}>y_n$ 且 $y_n\to+\infty$.

而

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}&=\frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\\&=\frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p+O(n^{p-1})}\\&=\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p}{(p+1)+O\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{2^p}{p+1},\end{aligned}$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}.$$

【146】 证明序列

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

收敛. 因此下式成立:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$ 称作欧拉常数,且当 $n\to\infty$ 时,$\varepsilon_n\to 0$.

解 由(75)题的结论有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

故 $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

则 $$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

令 $n=1,2,\cdots$ 得

$$\ln 2-\ln 1<1$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$

$$\cdots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

相加之得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

于是 $$x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1) > \frac{1}{n+1}>0.$$

即 $\{x_n\}$ 是一个下方有界的序列. 其中

$$x_n-x_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}.$$

而 $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1},$$

故 $x_n - x_{n+1} > 0.$

即$\{x_n\}$是单调减少的数列. 因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,设为$C$,即

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$= 0.577216\cdots$$

所以 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = C+\ln n+\varepsilon_n,$

其中 $\varepsilon_n \to 0 \quad (n\to\infty).$

【147】 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$

解 因为$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = C+\ln n+\varepsilon_n,$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n} = C+\ln(2n)+\varepsilon_{2n},$$

其中C为欧拉常数.

$$\varepsilon_n \to 0 \quad \varepsilon_{2n}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

所以
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$= \ln(2n)-\ln n+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n$$
$$= \ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n \to \ln 2 \quad (n\to\infty),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$

【148】 数列$x_n(n=1,2,\cdots)$是由下列各式:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n=3,4,\cdots)$$

确定. 求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 由于

$$x_{n+1}-x_n = \frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n = (-1)\frac{x_n-x_{n-1}}{2}$$
$$= (-1)^2\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2^2} = \cdots$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a),$$

故 $$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) + x_1$$

$$= (b-a)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + a$$

$$= (b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + a,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b-a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + a = \frac{a+2b}{3}.$$

【149】 假设数列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 由下列各式：

$$x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)(n = 0,1,2,\cdots)$$

确定. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

证 $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2 + 1 \geqslant 1 \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

所以 $$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) \leqslant 0.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调减少的有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设为 l，在等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ 两边取极限，得 $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right)$

解之得 $l = 1$ （舍去负值），

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

【150】 证明：由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

确定的序列 x_n 和 y_n 有共同的极限 $\mu(a,b) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

（数 a 和 b 的算术平均数减几何平均数）.

证 分两种情况讨论

(1) a 与 b 中至少有一个为零. 不妨设 $a=0$,则显然有

$$x_n=0(n=1,2,\cdots),y_{n+1}=\frac{y_n}{2}.$$

从而,递推得 $y_n=\frac{b}{2^{n-1}}\qquad(n=1,2,\cdots)$,

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=0=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

(2) 设 $a\neq 0,b\neq 0$. 这时,必须 $a>0,b>0$,否则,若 $ab<0$,则 $x_2=\sqrt{ab}$ 没有意义.

若 $a<0,b<0$. 则 $x_2=\sqrt{ab}>0,y_2=\frac{a+b}{2}<0$,

从而 $x_3=\sqrt{x_2y_2}$ 没有意义. 因此,必须有 $a>0,b>0$.

不妨设 $a\leqslant b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项,并且都界于原来两数之间,故有 $a\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant b$,

同样有 $\quad a\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant y_2\leqslant b$,

一般地 $\quad a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b\qquad(n=2,3,\cdots)$,

即$\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 均为单调有界数列,设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

对等式 $\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$,

两边取极限,得 $B=\frac{A+B}{2}$.

从而 $A=B$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 证毕.

§3. 函数的概念

1. 函数的定义

若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x,均有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对应,则变量 y 称为变量 x 在已知变域 $X=\{x\}$ 的单值函数,记作 $y=f(x)$.

集合 X 为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域;Y 称为这个函数的值域,在最简单的情况下,集合 X 可能的情况有:开区间(a,b):$a<$

$x < b$;

半开区间$(a,b]$:$a < x \leqslant b$或$[a,b)$:$a \leqslant x < b$;

闭区间(线段)$[a,b]$:$a \leqslant x \leqslant b$.(其中$a$和$b$为某实数或符号$-\infty$和$+\infty$).

若对于X中的每个值x有若干个$y = f(x)$与之对应,则y称为x的多值函数.

2. 反函数

如果把x理解为满足方程式$f(x) = y$的任何数值(式中y为属于函数$f(x)$的值域Y中的一个固定数),则这个对应关系在集Y中可确定某函数$x = f^{-1}(y)$,称之为函数$f(x)$的反函数.一般来说,它是多值的.若函数$y = f(x)$是严格单调的,即当$x_2 > x_1$时,$f(x_2) > f(x_1)$[或相应地$f(x_2) < f(x_1)$],则反函数$x = f^{-1}(y)$是单值且严格单调的函数.

求出下列函数的存在域(151 ~ 165).

【151】 $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

解 当$1+x \neq 0$时,即$x \neq -1$时,函数才有意义,故函数的定义域为$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

【152】 $y = \sqrt{3x - x^3}$.

解 当$3x - x^3 \geqslant 0$时,函数才有意义,解之得函数的定义域为$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0,\sqrt{3}]$.

【153】 $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 当$\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0$时,函数才有意义,解之得函数的定义域为$[-1,1)$.

【154】 (1) $y = \log(x^2 - 4)$;

(2) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

解 (1) 当$x^2 - 4 > 0$时,函数才有意义,解之得函数的定义

域为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 当$x+2>0$且$x-2>0$时,函数才有意义,解之得函数的定义域为$(2,+\infty)$.

【155】 $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

解 当$x\geqslant 0$且$\sin\sqrt{x}\geqslant 0$时,函数才有意义,解之得

$$(2k\pi)^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2 \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

因此函数的定义域为满足不等式

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

的实数集合.

【156】 $y=\sqrt{\cos x^2}$.

解 当$\cos x^2\geqslant 0$时,函数才有意义,即$0\leqslant x^2\leqslant\frac{\pi}{2}$

及
$$2k\pi+\frac{3\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{2} \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

因此,函数的定义域为满足不等式$|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

及
$$\sqrt{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2k\pi+\frac{5\pi}{2}} \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

的实数x的集合.

【157】 $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 当$\sin\frac{\pi}{x}>0$时,函数才有意义.解之得

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

当$k=0$时,得$1<x<+\infty$;

当$k=1,2,\cdots$时,得$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$;

当$k=-1,-2,\cdots$时,得$\frac{1}{2k}<x<\frac{1}{2k+1}$,

因此，函数的定义域为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-2k},\frac{1}{-2k+1}\right)\cup\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)\right]\cup(1,+\infty).$$

【158】 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

解　当 $x\geqslant 0$，且 $\sin\pi x\neq 0$ 时，函数才有意义，解之得

$$x>0\qquad 且\qquad x\neq n\qquad (n=1,2,\cdots),$$

因此函数的存在域是不为整数的所有正实数所成的集合

【159】 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

解　当 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$ 时，函数才有意义，解之得

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant 1,$$

即

$$-1\leqslant 2-\frac{2}{1+x}\leqslant 1,$$

$$-3\leqslant-\frac{2}{1+x}\leqslant -1,$$

$$\frac{3}{2}\geqslant\frac{1}{1+x}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{2}{3}\leqslant 1+x\leqslant 2.$$

因此函数的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

【160】 $y=\arccos(2\sin x)$.

解　当 $|2\sin x|\leqslant 1$ 时，函数才有意义，解之得

$$k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}\qquad (k=0,\pm 1,\cdots)$$

为函数的存在域.

【161】 $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

解　当 $\cos(\lg x)>0$ 时，函数才有意义. 所以

$$\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

从而函数的定义域为满足不等式

$$10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

的实数 x 的集合.

【162】 $y = (x + |x|)\sqrt{x\sin^2 \pi x}$.

解 当 $x\sin^2 \pi x \geqslant 0$ 时，函数才有意义. 解之得，函数的定义域为 $[0, +\infty) \cup \{-n\}_{n=1}^{+\infty}$.

【163】 $y = \cot \pi x + \arccos(2^x)$.

解 当 $\sin \pi x \neq 0$ 及 $0 \leqslant 2^x \leqslant 1$ 时，函数才有意义，解之得 $x \neq k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

及 $x \leqslant 0$. 因此，函数的定义域为满足

$$x < 0 \text{ 且 } x \neq -n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

的实数 x 的集合.

【164】 $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$.

解 当 $-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1$，即 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时，第一个函数才有意义.

当 $\lg x > 0$，即 $x > 1$ 时，第二个函数才有意义. 因此，定义域为 $1 < x \leqslant 2$.

【165】 $y = (2x)!$

解 当 $2x = n(n = 1, 2, \cdots)$ 时，函数才有定义，所以，定义域为集合 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots, \frac{n}{2}, \cdots$.

【165.1】 $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

解 当 $\log_3 \log_4 x > 0$ 时，函数才有意义，解之得 $x > 4$，所以，函数的定义域为 $(4, +\infty)$.

【165.2】 $y = \sqrt[4!]{\lg \tan x}$.

解 当 $\lg \tan x \geqslant 0$ 时，函数才有意义，解之得

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x < k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

因此，函数的定义域为 $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

【165.3】 $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}\qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

解 当 $\sin 2x\geqslant 0$，且 $\sin 3x\geqslant 0$ 时，函数才有意义，解之得 $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

求下列函数的存在域和值域(165 ～ 170).

【166】 $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

解 当 $2+x-x^2\geqslant 0$ 时，函数才有意义，解之得函数的定义域为 $[-1,2]$，又因

$$y=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{3}{2},$$

所以，函数的值域为 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

【167】 $y=\lg(1-2\cos x)$.

解 当 $1-2\cos x>0$ 时，函数才有意义. 解之得函数的定义域为

$$E=\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\right\}.$$

又因为

$$\max_{x\in E}(1-2\cos x)=1-(-2)=3,$$
$$\inf_{x\in E}(1-2\cos x)=0.$$

所以，函数的值域为 $(-\infty,\lg 3)$.

【168】 $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ 时，函数有意义，而对任何实数，上不等式均成立，因此函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 函数的值域为 $[0,\pi]$.

【169】 $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

解 当$\left|\lg\frac{x}{10}\right|\leqslant 1$时,函数才有意义.解之得$1\leqslant x\leqslant 100$,故函数的定义域为$[1,100]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

【170】 $y=(-1)^x$.

解 定义域为$E=\left\{x \mid x=\frac{p}{2q+1},p、q\text{ 为整数}\right\}$,值域为集合$\{-1,1\}$.

【171】 在三角形ABC中,(底$AC=b$,高$BD=h$)(图1)内接一个矩形$KLMN$(高$NM=x$),把矩形$KLMN$的周长P及其面积S表示成x的函数.并作函数$P=P(x)$及$S=S(x)$的图形.

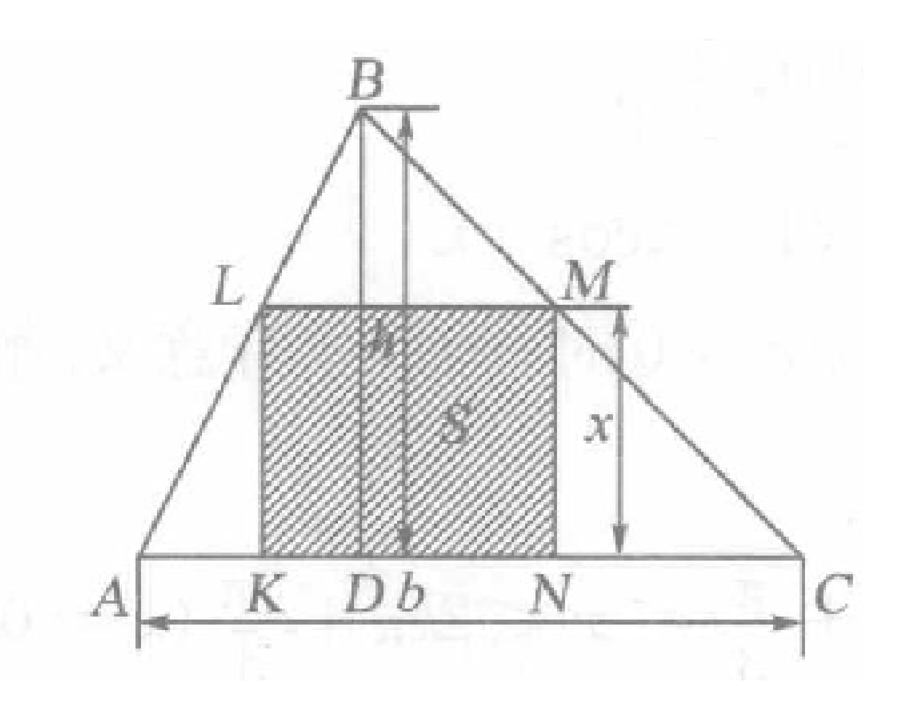


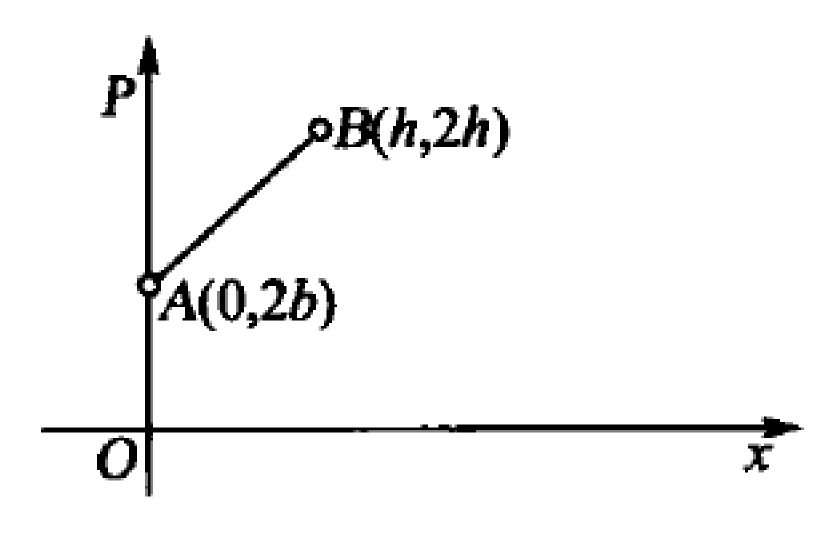
图 1

解 因为$\frac{LM}{b}=\frac{h-x}{h}$,

所以 $LM=b\left(1-\frac{x}{h}\right)$,

故周长
$$\begin{aligned}p=p(x)&=2LM+2MN\\&=2b\left(1-\frac{x}{h}\right)+2x\\&=2\left(1-\frac{b}{h}\right)x+2b \qquad 0<x<h.\end{aligned}$$

当$b<h$时,$p(x)$的图像为171题图2中的直线段AB(不包含A,B两点).



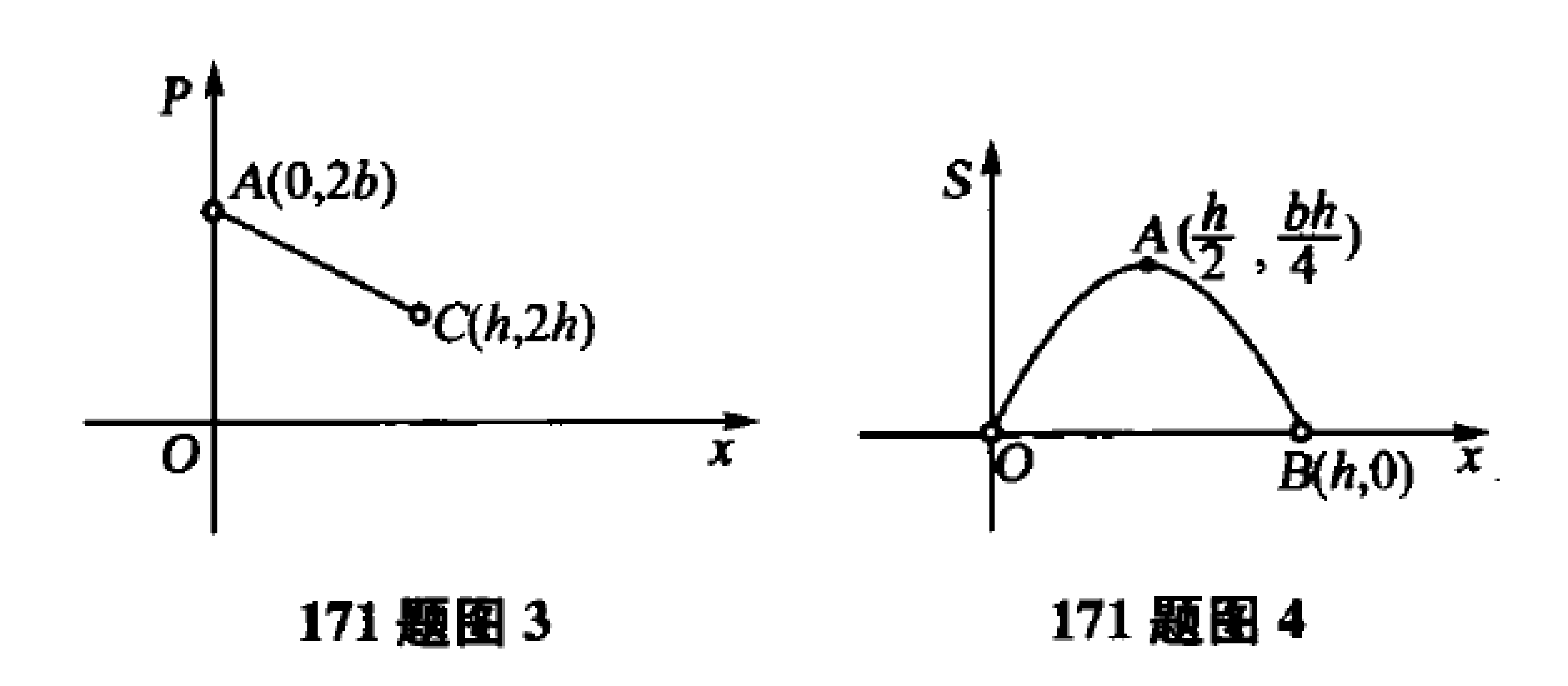
171 题图 2

当 $b>h$ 时，$p(x)$ 的图像为 171 题图 3 中的直线段 AC（不包含 A,C 两点）

面积 $S=S(x)=LM\cdot MN$

$$=b\left(1-\frac{x}{h}\right)x\qquad(0<x<h).$$

$S(x)$ 的图形为 171 题图 4 中的一段抛物线 $\overset{\frown}{OAB}$（不包含 O,B 两点）.



171 题图 3　　171 题图 4

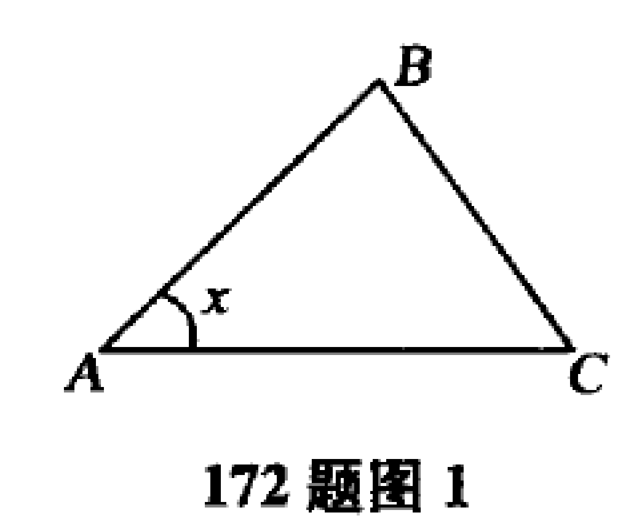
【172】 在三角形 ABC 中，边 $AB=6$ 厘米，边 $AC=8$ 厘米，角 $BAC=x$，把 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表示成变量 x 的函数，并作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图形.

解　由余弦定理得

$$a=\sqrt{6^2+8^2-2\times6\times8\cos x}$$

$$=\sqrt{100-96\cos x}\qquad(0<x<\pi).$$

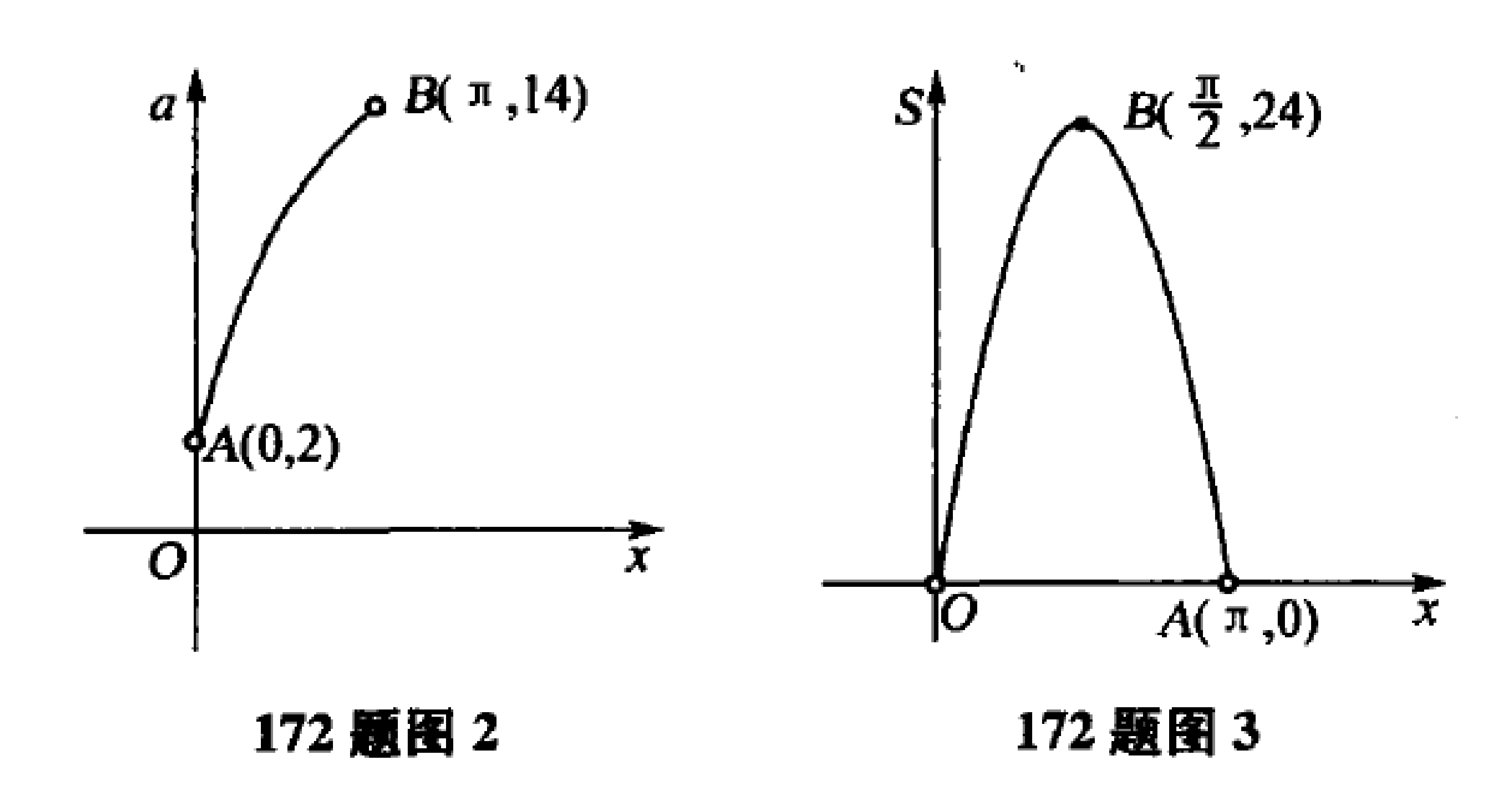
它的图形如 172 题图 2 所示，为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$（不包含 A,B 两点），三角形的面积为



172 题图 1

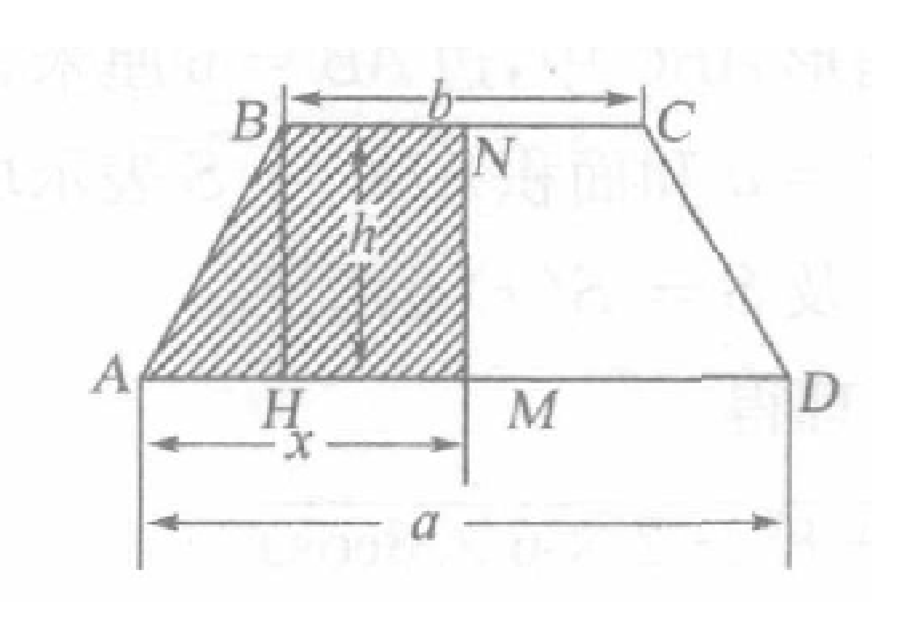
$$S=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \sin x=24\sin x \quad (0<x<\pi),$$

它的图形如 172 题图 3 所示，为弧 $\overset{\frown}{OBA}$（不包含 O,A 两点）.



172 题图 2　　172 题图 3

【173】 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 2) 底 $AD=a,BC=b(a>b)$，高 $HB=h$，引直线 $MN\ /\!/\ BH$ 和与顶点 A 相隔的距离 $AM=x$. 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示成变量 x 的函数，作出函数 $S=S(x)$ 的图形.



173 题图 1

解 $AH=\frac{1}{2}(a-b).$

分三种情况讨论:

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{a-b}{2}$ 时,即 MN 在 $\triangle ABH$ 内,此时

$$\frac{MN}{h} = \frac{x}{\frac{a-b}{2}},$$

即 $$MN = \frac{2hx}{a-b}.$$

于是 $$S = \frac{1}{2}MN \cdot x = \frac{h}{a-b}x^2.$$

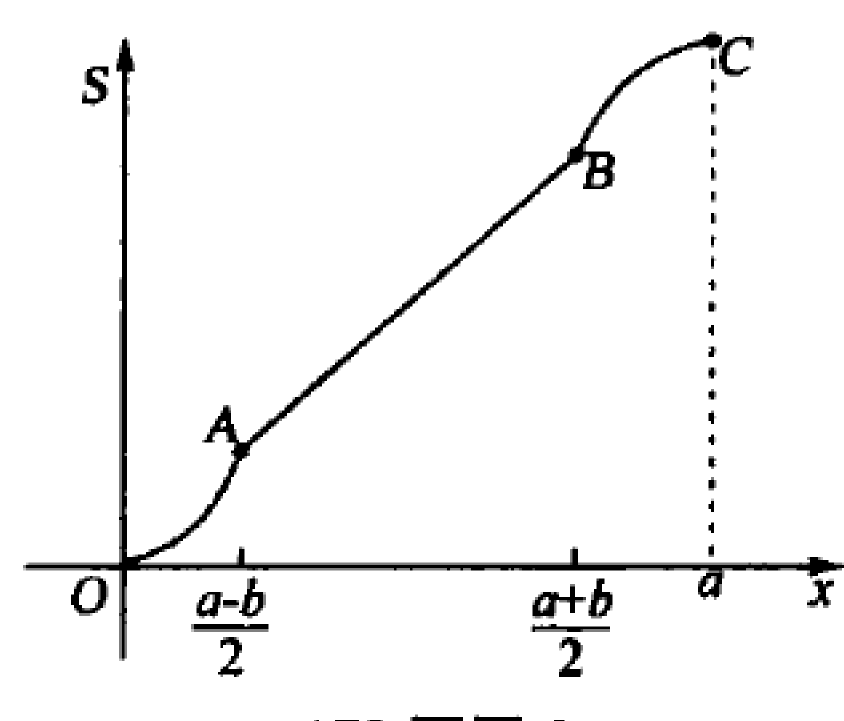
(2) 当 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$ 时,面积

$$S = \frac{1}{2}h \cdot \frac{a-b}{2} + h\left(x - \frac{a-b}{2}\right)$$
$$= h\left(x - \frac{a-b}{4}\right).$$

(3) 当 $\frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant a$ 时,

$$S = \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h}{a-b}(a-x)^2$$
$$= h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right].$$

S 的图形如 173 题图 2



173 题图 2

图中各点的位置如下:

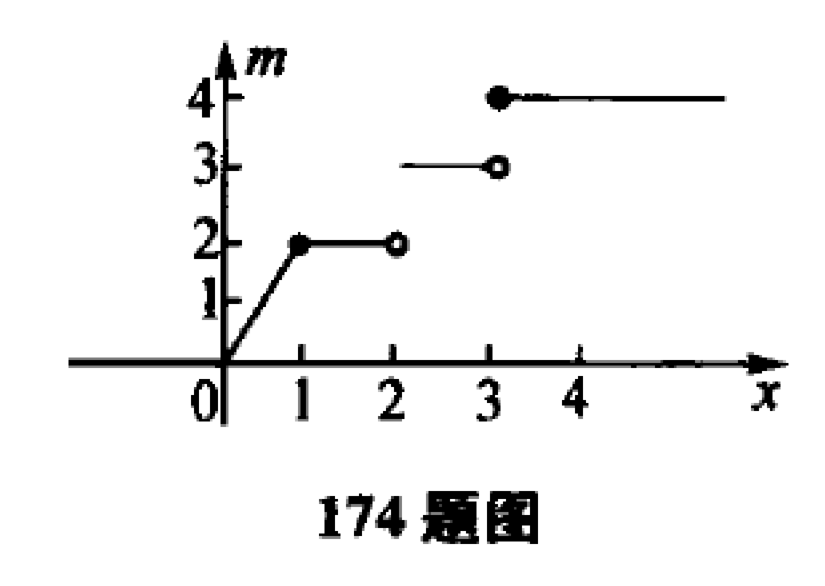
$$A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{h(a-b)}{4}\right); \qquad B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{h(a+3b)}{4}\right);$$

$$C\left(a,\frac{h(a+b)}{2}\right);\qquad \tan\alpha = h.$$

【174】 在 Ox 轴上的区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内,有等于 2 克的质量均匀分布着,而在此轴的点 $x=2$ 和点 $x=3$ 上各集中了一克质量,写出函数的解析公式 $m=m(x)(-\infty<x<+\infty)$,其中 $m(x)$ 是位于区间 $(-\infty,x)$ 的质量的值,并作出这个函数的图形.

解
$$m(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0],\\ 2x, & x\in(0,1],\\ 2, & x\in(1,2),\\ 3, & x\in[2,3),\\ 4, & x\in[3,+\infty).\end{cases}$$

$m(x)$ 的图形如 174 题图所示



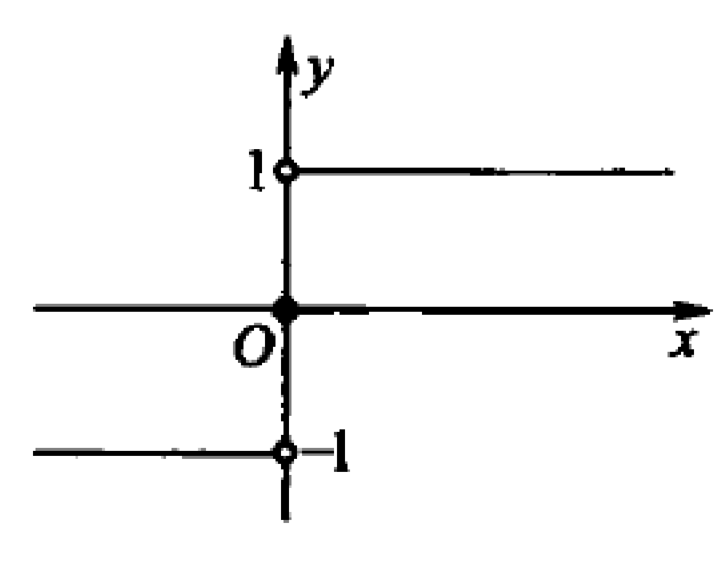
174 题图

【175】 函数 $y=\operatorname{sgn} x$,用下列方式定义:

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & 若 x<0;\\ 0, & 若 x=0;\\ 1, & 若 x>0.\end{cases}$$

作出这个函数的图形. 证明 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

解 函数 $\operatorname{sgn}x$ 的图形如 175 题图所示



175 题图

当 $x<0$ 时，$|x|=-x=x\operatorname{sgn}x$；

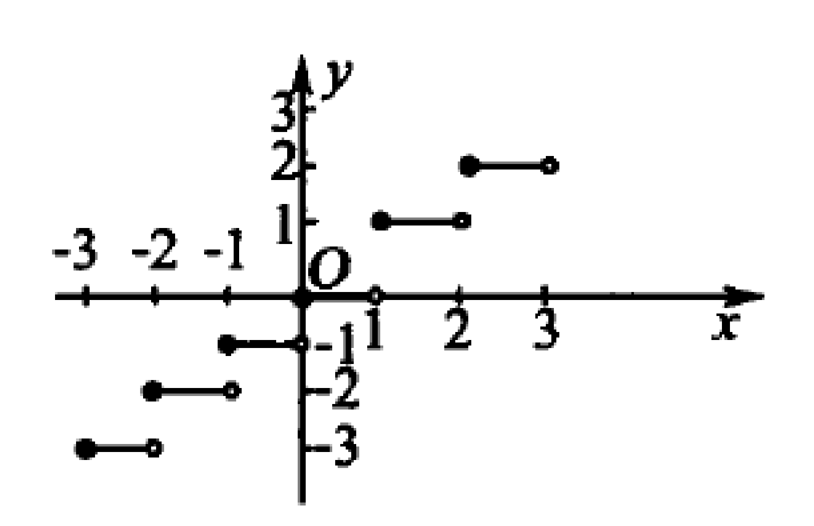
当 $x=0$ 时，$|x|=0=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x>0$ 时，$|x|=x=x\operatorname{sgn}x$；

因此　　$|x|=x\operatorname{sgn}x$.

【176】　函数 $y=[x]$（数 x 的整数部分）由以下方法定义：如果 $x=n+r$，其中 n 为整数且 $0\leqslant r<1$，则 $|x|=n$. 作出这个函数的图形.

解　当 $x\in[n,n+1)$ 时（n 为整数）$y=n$，函数的图形如176题图所示.



176 题图

【177】　设 $y=\pi(x)$　　$(x\geqslant 0)$ 表示不超过数 x 的素数数目，对于自变数 $0\leqslant x\leqslant 20$ 的值，作出此函数的图形.

解　当 $0\leqslant x<2$ 时，$\pi(x)=0$；

当 $2\leqslant x<3$ 时，$\pi(x)=1$；

当 $3\leqslant x<5$ 时，$\pi(x)=2$；

当 $5\leqslant x<7$ 时，$\pi(x)=3$；

当 $7\leqslant x<11$ 时，$\pi(x)=4$；

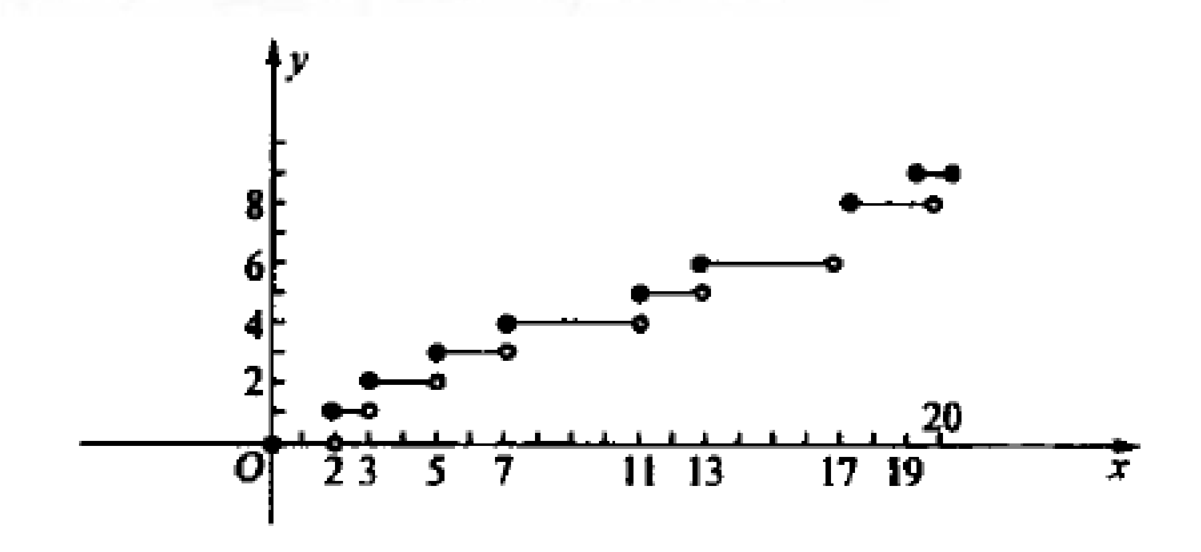
当 $11\leqslant x<13$ 时，$\pi(x)=5$；

当 $13\leqslant x<17$ 时，$\pi(x)=6$；

当 $17\leqslant x<19$ 时，$\pi(x)=7$；

当 $19\leqslant x\leqslant 20$ 时，$\pi(x)=8$.

如图所示.



177 题图

函数 $y=f(x)$ 把 E_X 集映到怎样的集 E_Y 上，若(178～182).

【178】 $y=x^2, E_x=\{-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

解 $E_y=\{0\leqslant y\leqslant 4\}$.

【179】 $y=\lg x, E_x=\{10<x<1000\}$.

解 $E_y=\{1<y<3\}$.

【180】 $y=\frac{1}{\pi}\arctan x, E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.

解 $E_y=\left\{-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\right\}$.

【181】 $y=\cot\frac{\pi x}{4}, E_x=\{0<|x|\leqslant 1\}$.

解 $E_y=\{1<|y|<+\infty\}$.

【182】 $y=|x|, E_x=\{1\leqslant |x|\leqslant 2\}$.

解 $E_y=\{1\leqslant y\leqslant 2\}$.

变量 x 跑过区间 $0<x<1$，变量 y 跑过怎样的集，若(183～188).

【183】 $y=a+(b-a)x$.

解 当 x 从 0 变到 1 时，y 从 a 变到 b. 所以 y 的变化集合为区间(a,b)(当 $a<b$ 时) 或(b,a)(当 $b<a$ 时).

【184】 $y=\frac{1}{1-x}$.

解 当 x 跑过区间 $0<x<1$ 时，y 跑过区间$(1,+\infty)$.

【185】 $y=\frac{x}{2x-1}$.

解 $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$.

当 x 从 0 变到 $\frac{1}{2}$ 时，y 从 0 变到 $-\infty$；当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变到 1 时，y 从 $+\infty$ 变到 1. 于是 y 的变化区间为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

【186】 $y=\sqrt{x-x^2}$.

解 $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$,

y 在 $x=\frac{1}{2}$ 取到最大值 $\frac{1}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，且 $y>0$，故 y 的变化区间为 $0<y\leqslant\frac{1}{2}$.

【187】 $y=\cot\pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时，y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是，y 的变化范围为 $(-\infty,+\infty)$.

【188】 $y=x+[2x]$.

解 当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$0<y<\frac{1}{2}$；

当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，$\frac{3}{2}\leqslant y<2$，

因此，y 的变化范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2},2\right)$.

【189】 若 $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$.

解 因为 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，

故 $$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0,$$
$$f(4)=4!=24.$$

【190】 若 $f(x)=\lg x^2$，求 $f(-1)$，$f(-0.001)$，$f(100)$.

解 $f(-1)=\lg 1=0$；

$f(-0.001)=\lg 0.000001=-6$；

$f(100)=2\lg 100=4$.

【191】 若 $f(x)=1+[x]$,求 $f(0.9),f(0.99),f(0.999)$, $f(1)$.

解 $f(0.9)=f(0.99)=f(0.999)=1$,

$f(1)=2$.

【192】 若 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当 -\infty<x\leqslant 0 时,\\ 2^x, & 当 0<x<+\infty 时.\end{cases}$

求 $f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(2)$.

解 $f(-2)=1-2=-1$;

$f(-1)=1-1=0$;

$f(0)=1+0=1$;

$f(1)=2^1=2$;

$f(2)=2^2=4$.

【193】 若 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,

求 $f(0),f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)}$.

解 $f(0)=1$;

$$f(-x)=\frac{1+x}{1-x};$$

$$f(x+1)=\frac{-x}{2+x};$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1};$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}.$$

【194】 若

(1) $f(x)=x-x^3$;

(2) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$;

(3) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

求使以下各式成立的 x 值

(a) $f(x)=0$;　(b) $f(x)>0$;　(c) $f(x)<0$.

解　(1) (a) 由 $x-x^3=0$ 得 $x=0,\pm 1$.

(b) $x-x^3>0$,

即　$x(1-x)(1+x)>0$.

解之得　$-\infty<x<-1$ 和 $0<x<1$.

(c) $x-x^3<0$,

即　$x(1-x)(1+x)<0$.

解之得　$-1<x<0$ 和 $1<x<+\infty$.

(2) (a) $\sin\frac{\pi}{x}=0$,

解之得　$\frac{\pi}{x}=k\pi\quad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$,

所以　$x=\frac{1}{k}\quad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(b) $\sin\frac{\pi}{x}>0$,

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

所以当 $k=0$ 时, $1<x<+\infty$.

当 $k=1,2,\cdots$ 时, $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$.

当 $k=-1,-2,\cdots$ 时, $\frac{1}{2k}<x<\frac{1}{2k+1}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{x}<0$,则

$$(2k+1)\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+2)\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

当 $k=-1$ 时, $-\infty<x<-1$.

当 $k=0,1,2,\cdots$ 时, $\frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1}$.

当 $k=-2,-3,\cdots$ 时, $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k+2}$.

(3) (a) $(x+|x|)(1-x)=0$

解之得 $x\leqslant 0$ 和 $x=1$.

(b) $(x+|x|)(1-x)>0$,推得 $0<x<1$.

(c) $(x+|x|)(1-x)<0$.

因为当 $x\leqslant 0$ 时,$x+|x|=0$,所以必须 $x>0$;其次因为当 $x>0$ 时,$x+|x|>0$.所以 $1-x<0$,故 $x>1$.因此,当 $x>1$ 时,$f(x)<0$.

【195】 若(1) $f(x)=ax+b$;(2) $f(x)=x^2$;(3) $f(x)=a^x$.求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

解 (1) $\varphi(x)=\dfrac{a(x+h)+b-ax-b}{h}=a$.

(2) $\varphi(x)=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$.

(3) $\varphi(x)=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=\dfrac{a^x(a^h-1)}{h}$.

【196】 令 $f(x)=ax^2+bx+c$,证明:

$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$.

证

$$\begin{aligned}
&f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\\
&=a(x+3)^2+b(x+3)+c\\
&\quad-3[a(x+2)^2+b(x+2)+c]\\
&\quad+3[a(x+1)^2+b(x+1)+c)-(ax^2+bx+c),\\
&=ax^2+6ax+9a+bx+3b+c\\
&\quad-3ax^2-12ax-12a-36x-6-3c\\
&\quad+3ax^2+6ax+3a+3bx+c-ax^2-bx-c\\
&=0.
\end{aligned}$$

因此 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$.

【197】 若 $f(0)=-2$ 和 $f(3)=5$,求线性整函数:

$$f(x)=ax+b.$$

$f(1)$ 和 $f(2)$ 等于多少(线性插值法)?

解 因为

$$f(0)=b=-2, f(3)=3a+b=5,$$

所以 $a=\frac{7}{3}, b=-2.$

于是,所求的线性整函数为 $f(x)=\frac{7}{3}x-2.$

故 $f(1)=\frac{1}{3}, f(2)=\frac{8}{3}.$

【198】 设:$f(-2)=0, f(0)=1, f(1)=5$ 求二次有理整函数:

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

$f(-1)$ 和 $f(0.5)$ 等于多少(二次插值法)?

解 因为 $f(-2)=4a-2b+c=0,$

$f(0)=c=1, f(1)=a+b+c=5,$

所以 $a=\frac{7}{6}, b=\frac{17}{6}, c=1.$

于是所求的二次有理函数为 $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1.$

故 $f(-1)=-\frac{2}{3}, f(0.5)=\frac{65}{24}.$

【199】 若 $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5.$ 求三次有理整函数:$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$

解 因为 $f(-1)=-a+b-c+d=0,$

$f(0)=d=2,$

$f(1)=a+b+c+d=-3,$

$f(2)=8a+4b+2c+d=5,$

可得 $a=\frac{10}{3}, b=-\frac{7}{2}, c=-\frac{29}{6}, d=2.$

于是,所求三次有理函数为

$$f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2.$$

【200】 若 $f(0)=15$, $f(2)=30$, $f(4)=90$, 求形式为 $f(x)=a+bc^x$ 的函数.

解 因为

$$f(0)=a+b=15,$$
$$f(2)=a+bc^2=30,$$
$$f(4)=a+bc^4=90,$$

所以 $a=10, b=5, c=2$ (−2 不合适,舍去)

于是所求函数为 $f(x)=10+5\times 2^x$.

【201】 证明:若对于线性函数

$$f(x)=ax+b,$$

自变量的值 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$ 形成等差级数,则对应的函数值 $y_n=f(x_n),(n=1,2,\cdots)$ 亦形成等差级数.

证 $\{x_n\}$ 是一公差为 d 的等差级数,则

$$x_{n+1}=x_n+d \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是

$$y_{n+1}-y_n=(ax_{n+1}+b)-(ax_n+b)$$
$$=a(x_{n+1}-x_n)=ad,$$

即 $\{y_n\}$ 是一公差为 ad 的等差级数.

【202】 证明:若指数函数

$$f(x)=a^x \qquad (a>0),$$

自变数的值 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$ 形成等差级数,则对应的函数值 $y_n=f(x_n),(n=1,2,\cdots)$ 组成等比级数.

证 设 $\{x_n\}$ 是一公差为 d 的等差级数.

则 $x_{n+1}-x_n=d,$

所以

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{a^{x_{n+1}}}{a^{x_n}}=a^{x_{n+1}-x_n}=a^d,$$

即 $\{y_n\}$ 为一公比为 a^d 的等比级数.

【203】 设当 $0<u<1$ 时函数 $f(u)$ 有定义,求以下函数的定义域:

(1) $f(\sin x)$; (2) $f(\ln x)$; (3) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

解 (1) 因为 $0 < \sin x < 1$,所以

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ 且 } \quad x \neq \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

即函数的定义域为

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)\right].$$

(2) 因为 $0 < \ln x < 1$,所以 $1 < x < e$,即函数的定义域为 $(1, e)$.

(3) 因为 $0 < \dfrac{[x]}{x} < 1$,所以

$$x > 0 \text{ 且 } x \neq n \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

因此函数的定义域为 $\bigcup_{n=0}^{+\infty}(n, n+1)$.

【204】 设 $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0)$,证明:

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

证 $f(x+y) + f(x-y)$

$$= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-(x+y)}) + \frac{1}{2}(a^{(x-y)} + a^{-(x-y)})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y)$$

$$= \frac{1}{2}a^x(a^y + a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^y + a^{-y})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})$$

$$= 2f(x) \cdot f(y).$$

【205】 假设 $f(x) + f(y) = f(z)$,求出 z.若:

(1) $f(x) = ax$;

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

(3) $f(x) = \arctan x \qquad (|x| < 1)$;

(4) $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$.

解 (1) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)$,

而 $f(z)=az.$

由 $f(x)+f(y)=f(z)$,

得 $z=x+y.$

(2) 由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$,

得 $z=\frac{xy}{x+y}.$

(3) 由 $\arctan x+\arctan y=\arctan z$,

得 $z=\tan(\arctan x+\arctan y)=\frac{x+y}{1-xy}.$

(4) 由 $\log\frac{1+x}{1-x}+\log\frac{1+y}{1-y}=\log\frac{1+z}{1-z}$,

得 $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{1+z}{1-z}=-1+\frac{2}{1-z}.$

所以 $z=\frac{x+y}{1+xy}.$

求出 $\boldsymbol{\varphi[\varphi(x)]}$,$\boldsymbol{\psi[\psi(x)]}$,$\boldsymbol{\varphi[\psi(x)]}$ 和 $\boldsymbol{\psi[\varphi(x)]}$. (206 ~ 208),**设:**

【206】 $\varphi(x)=x^2$ 和 $\psi(x)=2^x$.

解 $\varphi(\varphi(x))=(x^2)^2=x^4$,

$\psi(\psi(x))=2^{2^x}$,

$\varphi(\psi(x))=(2^x)^2=4^x$,

$\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$.

【207】 $\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$ 和 $\psi(x)=\frac{1}{x}$.

解 $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}x)=\operatorname{sgn}x$,

$\psi(\psi(x))=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x \qquad (x\neq 0)$,

$\varphi(\psi(x))=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x \qquad (x\neq 0)$,

$$\psi(\varphi(x)) = \frac{1}{\operatorname{sgn}x} = \operatorname{sgn}x \qquad (x \neq 0).$$

【208】 $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leqslant 0 \text{ 时}, \\ x & \text{当 } x > 0 \text{ 时}. \end{cases}$ 和 $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leqslant 0 \text{ 时}, \\ -x^2 & \text{当 } x > 0 \text{ 时}. \end{cases}$

解 $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$；$\psi(\psi(x)) = 0$（因为 $-x^2 < 0$）；

$\varphi(\psi(x)) = 0$；$\psi(\varphi(x)) = \psi(x)$.

【209】 若 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解 $$f[f(x)] = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = 1-\frac{1}{x},$$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = x.$$

【210】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{次}}$，若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

解 因为 $$f_2(z) = f(f(z)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

假设当 $n = k$ 时，$f_k(z) = \dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$.

则当 $n = k+1$ 时，

$$f_{k+1}(x) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

从而由数学归纳法知，对任何自然数 n 均有：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

【211】 若 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1)=x^2-3x+2$

$$=(x+1)^2-5(x+1)+6,$$

所以 $f(x)=x^2-5x+6.$

【212】 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}(|x|\geqslant 2)$,求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

所以 $f(x)=x^2-2.$

【213】 若 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}(x>0)$,求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{x}=t$,则 $x=\frac{1}{t}$. 所以

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\qquad(t>0)$$

$$=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},$$

因此 $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$

【213.1】 若 $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$,求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x}{x+1}=t$,

即 $1-\frac{1}{x+1}=t$,

$$x=\frac{1}{1-t}-1=\frac{t}{1-t},$$

所以 $f(t)=\left(\frac{t}{1-t}\right)^2$,

因此 $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$

证明下列函数在所示区间内是单调递增函数(214 ~ 217).

【214】 $f(x)=x^2 \qquad (0 \leqslant x < +\infty)$.

证 当 $x_2 > x_1 \geqslant 0$ 时,

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0,$$

即 $$f(x_2)>f(x_1).$$

故 $f(x)=x^2$ 在$[0,+\infty)$ 内是单调增加函数.

【215】 $f(x)=\sin x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

证 当 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以 $$\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0,$$

$$\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

故 $$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

因此,$f(x)=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内是单调增加的函数.

【216】 $f(x)=\tan x \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

证 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\tan x_2-\tan x_1$$

$$=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2\cos x_1-\sin x_1\cos x_2}{\cos x_1\cdot\cos x_2}$$

$$=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2},$$

而当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\sin(x_2-x_1)>0;\cos x_1>0;\cos x_2>0.$$

所以 $$f(x_2)-f(x_1)>0.$$

因此 $f(x)=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是单调增加的函数.

【217】 $f(x)=2x+\sin x \qquad (-\infty<x<+\infty)$.

证 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1,$$

而 $$|\sin x_2-\sin x_1|$$

$$=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=|x_2-x_1|$$

所以当 $x_1<x_2$ 时，

$$-(x_2-x_1)<\sin x_2-\sin x_1<x_2-x_1$$

故 $$f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1$$

$$>(x_2-x_1)>0.$$

即 $f(x)=2x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的函数.

证明下列各函数在所示区间内是单调递减函数(218～220).

【218】 $f(x)=x^2 \qquad (-\infty<x\leqslant 0)$.

证 因为当 $x_1<x_2\leqslant 0$ 时，

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0,$$

所以 $f(x)=x^2$ 在 $-\infty<x\leqslant 0$ 内是单调减少的函数.

【219】 $f(x)=\cos x \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

证 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1$$

$$=-2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

当 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$ 时，

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi;0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0;\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

从而 $$f(x_2)-f(x_1)<0.$$

即 $f(x)=\cos\pi$ 在 $[0,\pi]$ 内是单调减少的函数.

【220】 $f(x)=\cot x \qquad (0<x<\pi).$

证 $$f(x_2)-f(x_1)=\frac{\cos x_2}{\sin x_2}-\frac{\cos x_1}{\sin x_1}$$

$$=\frac{\cos x_2\sin x_1-\cos x_1\sin x_2}{\sin x_1\cdot\sin x_2}=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\sin x_1\sin x_2}.$$

当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时,

$\sin(x_1-x_2)<0$,

$\sin x_1>0,\sin x_2>0.$

从而 $$f(x_2)-f(x_1)<0,$$

即 $f(x)=\cot x$ 在 $0<x<\pi$ 内是单调减少的函数.

【221】 研究下列函数的单调性:

(1) $f(x)=ax+b$; (2) $f(x)=ax^2+bx+c$;

(3) $f(x)=x^3$; (4) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$;

(5) $f(x)=a^x \qquad (a>0)$.

解 (1) 当 $x_1<x_2$ 时,

$$f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1),$$

所以当 $a<0$ 时,$f(x)$ 是减函数,当 $a>0$ 时,$f(x)$ 是增函数.

(2) $$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

我们讨论两种情况:

情况 1. $a>0$ 时, 函数在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$ 内单调减少, 在 $\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 内单调增加.

情况 2. $a<0$ 时，函数在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$ 内单调增加，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 内单调减少.

(3) 当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$$
$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)>0,$$

因此，$f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

(4) 若 $c=0$，则 $f(x)=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$. 与(1)一样讨论.

若 $c\neq 0$，则 $f(x)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-a\dfrac{d}{c}}{cx+d}$，

情况 1. 当 $b>a\dfrac{d}{c}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$ 内单调减少.

情况 2. 当 $b<a\dfrac{d}{c}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$ 内单调增加.

(5) 因为 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=a^{x_2-x_1}$，

所以当 $x_1<x_2$ 时，若 $0<a<1$，则

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}<1,$$

即 $\quad f(x_2)<f(x_1)$，

若 $a>1$，则

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}>1,$$

即 $\quad f(x_2)>f(x_1)$，

因此当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的减函数. 当 $a>1$

时，$f(x)$ 为$(-\infty, +\infty)$ 内的增函数.

【222】　不等式能否逐项取对数？

解　不一定可以，只有当底数大于 1 时才可以. 因为，当底大于 1 时，对数函数为增函数.

若底数介于 0 与 1 之间时，对数函数为减函数，所以，此时不能逐项取对数.

【223】　设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 和 $f(x)$ 为单调递增函数，证明：若

$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$，

则 $\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)]$.

证　因为对 x_0 有

$$\varphi(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant \psi(x_0),$$

由此及 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$f(x)$ 为单调增加的，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(x_0)) &\leqslant f(\varphi(x_0)) \leqslant f(f(x_0)) \\ &\leqslant \psi(f(x_0)) \leqslant \psi(\psi(x_0)).\end{aligned}$$

由 x_0 的任意性，我们有

$$\varphi(\varphi(x)) \leqslant f(f(x)) \leqslant \psi(\psi(x)).$$

求反函数 $x = \varphi(y)$ 及其存在域，如果(224 ～ 230).

【224】　$y = 2x + 3 \qquad (-\infty < x < +\infty)$.

解　反函数为 $x = \dfrac{y-3}{2}$，其定义域为 $-\infty < y < +\infty$.

【225】　$y = x^2$；

(1) $-\infty < x \leqslant 0$；　　(2) $0 \leqslant x < +\infty$.

解　(1) $x = -\sqrt{y} \qquad 0 \leqslant y < +\infty$；

(2) $x = \sqrt{y} \qquad 0 \leqslant y < +\infty$.

【226】　$y = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \neq -1)$.

解　$x = \dfrac{1-y}{1+y} \qquad y \neq -1$.

【227】　$y = \sqrt{1-x^2}$

(1) $-1 \leqslant x \leqslant 0$；　　(2) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 (1) $x=-\sqrt{1-y^2}\qquad 0\leqslant y\leqslant 1$;

(2) $x=\sqrt{1-y^2}\qquad 0\leqslant y\leqslant 1$.

【228】 $y=\mathrm{sh}x$

其中 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

解 由 $2y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$,

即 $(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x-1=0$,

所以 $\mathrm{e}^x=\frac{2y+\sqrt{4y^2+4}}{2}=y+\sqrt{y^2+1}$,

即 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\qquad(-\infty<y<+\infty)$.

【229】 $y=\mathrm{th}x$

其中 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$,

所以 $\mathrm{e}^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$,

两边取对数得 $x=\mathrm{arcth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$.

注意到 $\mathrm{e}^{2x}>0$,所以$\frac{1+y}{1-y}>0$. 即 $-1<y<1$,因此定义域为 $-1<y<1$.

【230】 $y=\begin{cases}x & 若 -\infty<x<1;\\ x^2 & 若 1\leqslant x\leqslant 4;\\ 2^x & 若 4<x<+\infty.\end{cases}$

解 $x=\begin{cases}y & 若 -\infty<y<1,\\ \sqrt{y} & 若 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y & 若 16<y<+\infty.\end{cases}$

【231】 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l,l)$.

若 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列已知函数中哪些为偶函数，哪些为奇函数？

(1) $f(x)=3x-x^3$;

(2) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(3) $f(x)=a^x+a^{-x}\qquad(a>0)$;

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

(5) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 因为

$$f(-x)=3(-x)-(-x)^3=-(3x-x^3)=-f(x),$$

故 $f(x)=3x-x^3$ 为奇函数.

(2) 因为

$$f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x),$$

所以 $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$ 为偶函数.

(3) 因为

$$f(-x)=a^{-x}+a^{-(-x)}=a^{-x}+a^x=f(x),$$

所以 $f(x)=a^x+a^{-x}$ 为偶函数.

(4) 因为

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

(5) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

【232】 证明:在对称区间$(-l,l)$定义的任何函数$f(x)$均可以表示为是偶函数和奇函数的和.

证 因为$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,

容易验证$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$为偶函数,$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$为奇函数,

【233】 如果存在数$T>0$(函数的周期——在广义上!)使得当$x\in E$时,$f(x\pm T)=f(x)$.则函数$f(x)$称为周期函数.

说明下列已知函数中哪些是周期函数,并确定它们的最小周期.

(1) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

(2) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$;

(3) $f(x)=2\tan\dfrac{x}{2}-3\tan\dfrac{x}{3}$;

(4) $f(x)=\sin^2 x$; (5) $f(x)=\sin x^2$;

(6) $f(x)=\sqrt{\tan x}$; (7) $f(x)=\tan\sqrt{x}$;

(8) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

解 (1) 因为

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+B\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$
$$=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=f(x),$$

故$f(x)$为周期函数,最小周期为$\dfrac{2\pi}{\lambda}(\lambda>0)$.

(2) $f(x)$为周期函数,最小周期为2π.

(3) $f(x)$为周期函数,最小周期为6π.

(4) $f(x)=\sin^2 x$为周期函数,最小周期为π.

(5) 对任何正实数a,均存在x,使

$$\sin(x+a)^2\neq\sin x^2,$$

事实上,若$a\neq\sqrt{n\pi}\ (n=1,2,\cdots)$.

则当$x=0$时,便有$\sin a^2\neq 0=\sin 0$.

若　$a=\sqrt{n\pi}$　　(n 为一自然数),

则当 $x\neq\dfrac{(2k-n)\pi}{\sqrt{n\pi}}(k=0,\pm1,\cdots)$ 时,

$$\sin(x+a)^2\neq\sin x^2.$$

因此 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

(6) $f(x)=\sqrt{\tan x}$ 为周期函数,最小周期为 π.

(7) 对任何正实数 a,均存在 x,使

$$\tan\sqrt{x+a}\neq\tan\sqrt{x},$$

事实上,若 $a\neq(k\pi)^2$　　($k=1,2,\cdots$),

则取 $x=0$,便有 $\tan\sqrt{a}\neq0=\tan0$,

若　$a=(k\pi)^2$　　(k 为一自然数),

则取 $x=a=(k\pi)^2$,显然

$$\tan\sqrt{(k\pi)^2+(k\pi)^2}=\tan(\sqrt{2}k\pi)\neq0=\tan\sqrt{(k\pi)^2},$$

因此,$f(x)=\tan\sqrt{x}$ 不是周期函数.

(8) 因为对任何正实数 a,都有

$$f(0+a)=\sin a+\sin(a\sqrt{2})\neq0=f(0),$$

故 $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$ 不是周期函数.

【234】　证明:对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & 若\ x\ 为有理数,\\ 0 & 若\ x\ 为无理数,\end{cases}$$

任何有理数都是其周期.

证　设 a 为任意有理数,则当 x 为有理数时,$x+a$ 也为有理数;当 x 为无理数时,$x+a$ 也为无理数.故

$$\chi(x+a)=\begin{cases}1 & 当\ x\ 为有理数时,\\ 0 & 当\ x\ 为无理数时,\end{cases}$$

因此　$\chi(x+a)=\chi(x)$.

即 $\chi(x)$ 是任何有理数为周期的周期函数.

【235】　证明:在公共集上定义且其周期可公度的两个周期

函数的和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为定义在集合 E 上的周期函数,T_1,T_2 分别是它们的周期,又设 T 为 T_1,T_2 的公约数,即

$$T_1=n_1T,T_2=n_2T,$$

其中 n_1,n_2 为正整数,于是

$$f_1(x+n_2T_1)=f_1(x),f_2(x+n_1T_2)=f_2(x),$$

设 $$g_1(x)=f_1(x)+f_2(x),g_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

则 n_1n_2T 分别为 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的周期.事实上

$$\begin{aligned}g_1(x+n_1n_2T)&=f_1(x+n_2T_1)+f_2(x+n_1T_2)\\&=f_1(x)+f_2(x),\\g_2(x+n_1n_2T)&=f_1(x+n_2T_1)\cdot f_2(x+n_1T_2)\\&=f_1(x)\cdot f_2(x).\end{aligned}$$

【235.1】 若 $f(x+T)=-f(x)(T>0)$,函数 $f(x)$ 被称为负周期函数,证明函数 $f(x)$ 为以 $2T$ 为周期的周期函数.

证 $$\begin{aligned}f(x+2T)&=f[(x+T)+T]=-f(x+T)\\&=-[-f(T)]=f(x),\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是以 $2T$ 为周期的周期函数.

【236】 证明:若对于函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 有等式

$$f(x+T)=kf(x),\qquad (\text{其中 } k \text{ 和 } T \text{ 为正的常数})$$

则 $f(x)=a^x\varphi(x)$(其中 a 为常数,而 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的周期函数).

证 已知 $k>0,T>0$,令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$,则 $a^T=k$,于是

$$f(x+T)=a^Tf(x),$$

定义 $$\varphi(x)=a^{-x}f(x),$$

则 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,事实上

$$\begin{aligned}\varphi(x+T)&=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x}\cdot a^{-T}\cdot a^Tf(x)\\&=a^{-x}f(x)=\varphi(x),\end{aligned}$$

所以 $$f(x)=a^x\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

§4. 函数的图示法

1. 作出函数 $y=f(x)$ 的图形可用下述方法：

(1) 确定函数的存在域 $X=\{x\}$；

(2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，并作出函数 $y_i=f(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的对应数值表；

(3) 在坐标平面 Oxy 上作出一系列的点 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，并用线将其连接起来，此连线的性质即可认为是许多中间点的位置.

2. 为了获得函数的正确图形，应该研究这个函数的一般性质.

首先必须：(1) 解方程 $f(x)=0$，求出函数图形与 Ox 轴的交点（函数值为零的点）；

(2) 确定函数为正数或为负数时，自变数的变化域；

(3) 尽可能地说明函数单调（递增或递减）的区间；

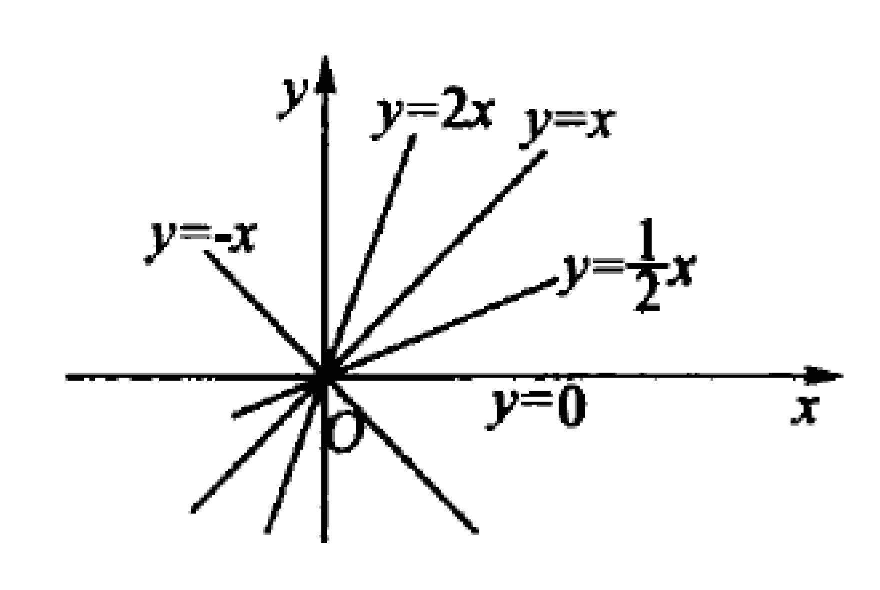
(4) 研究当自变数无限接近于函数存在域的边界点时函数的情况.

在这一节要求读者知道最简单的初等函数——幂函数、指数函数、三角函数等的性质.

利用这些性质，无须作大量的计算工作，就可画出许多函数的简图，其他的图形有时就是这些最简单图形的组合（和或乘积等）.

【237】 作出线性函数 $y=ax$ 在 $a=0;\frac{1}{2};1;2;-1$ 时，的图形.

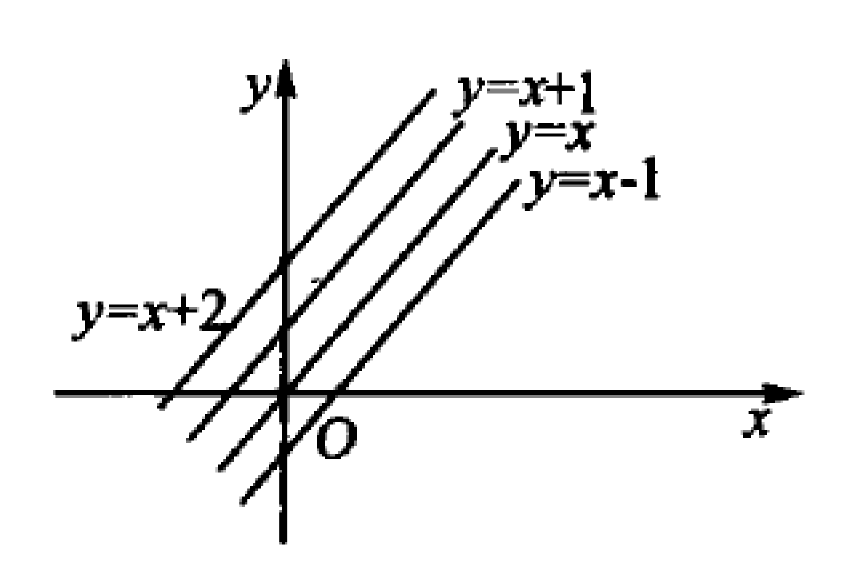
解



237 题图

【238】 作出线性函数 $y = x + b$，当 $b = 0,1,2,-1$ 时的图形.

解

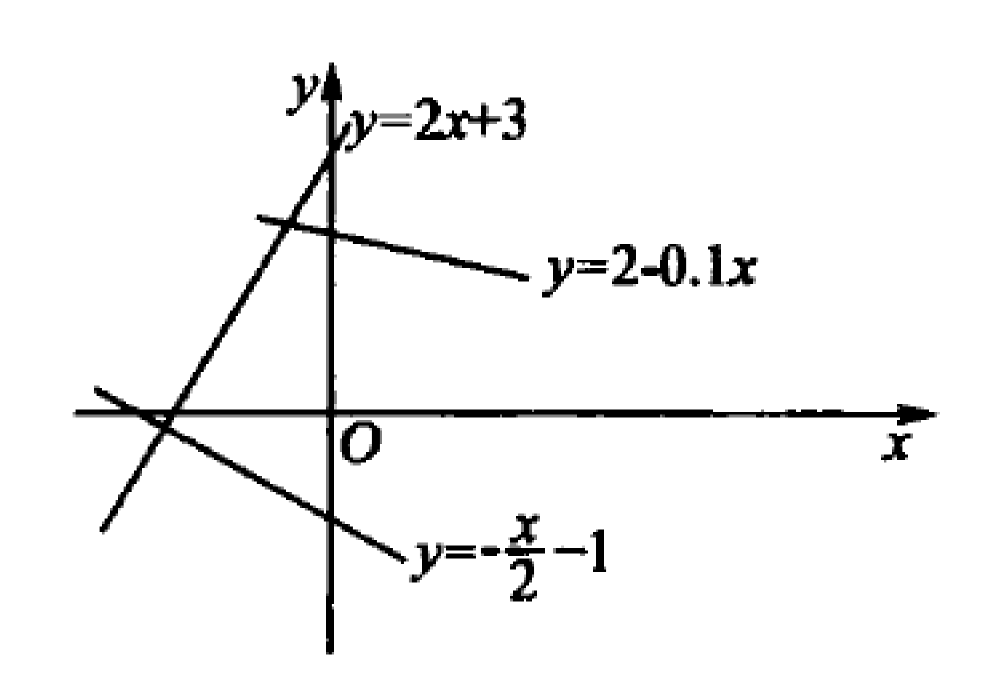


238 题图

【239】 作出线性函数的图形：

(1) $y = 2x + 3$；(2) $y = 2 - 0.1x$；(3) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

解



239 题图

【240】 铁的线性温度膨胀系数 $a = 1.2 \times 10^{-6}$，作出适当尺度的函数图

$$l = f(T) \qquad (-40° \leqslant T \leqslant 100°),$$

其中 T 表示温度(以度计)，l 表示当温度为 T 时铁棒的长度. 设当 $T = 0°$ 时，$l = 100$ 厘米.

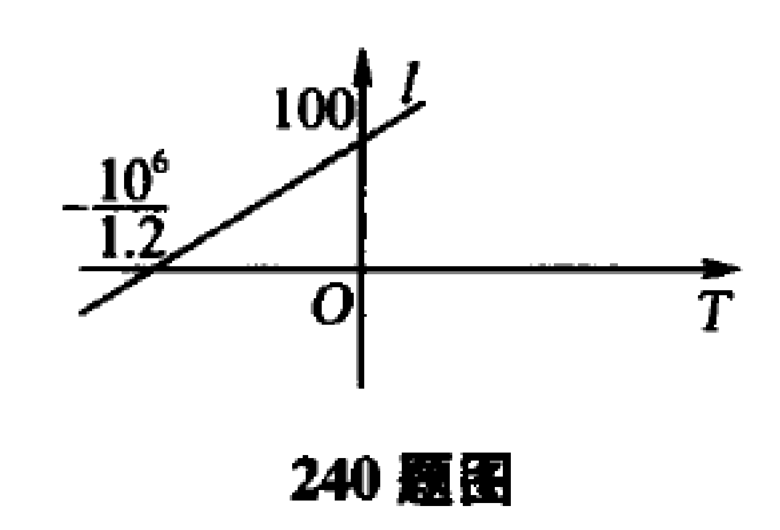
解 铁棒的长度与温度的关系为

$$l = l_0(1 + aT).$$

当 $T = 0$ 时，$l = 100$，代入上式得 $l_0 = 100$，于是

$$l = 100(1 + 1.2 \times 10^{-6} T).$$

如 240 题图所示(两轴单位不同)



240 题图

【241】 两个质点在数轴上运动，第一质点在时间 $t=0$ 的初始时刻位于坐标原点左方 20 米处，其速度 $v_1=10$ 米/秒；第二质点在 $t=0$ 时位于原点 O 之右方 30 米处，其速度 $v_2=-20$ 米/秒；作出这两个点的运动方程图，并求出它们相遇的时间和位置.

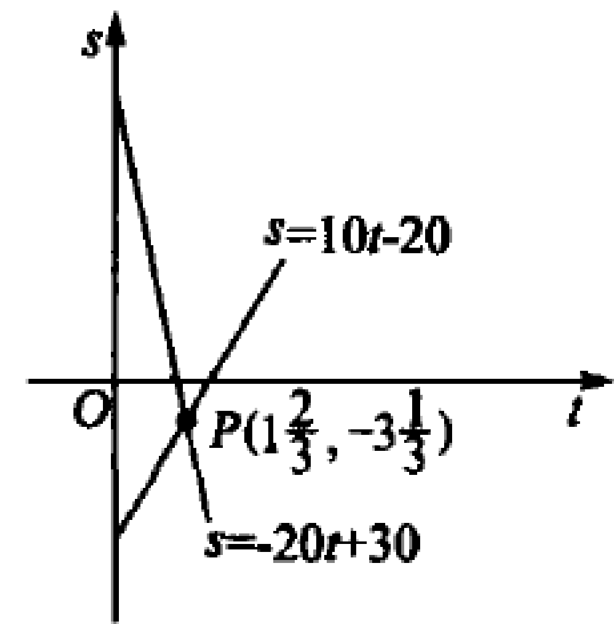
解 二质点运动的位移与时间的关系为：

$$s=10t-20,s=-20t+30.$$

解上述方程得：

$$t=1\frac{2}{3},s=-3\frac{1}{3}.$$

即二质点在开始运动后 $1\frac{2}{3}$ 秒，在原点左方 $3\frac{1}{3}$ 米处相遇，运动方程的图形如图.



241 题图

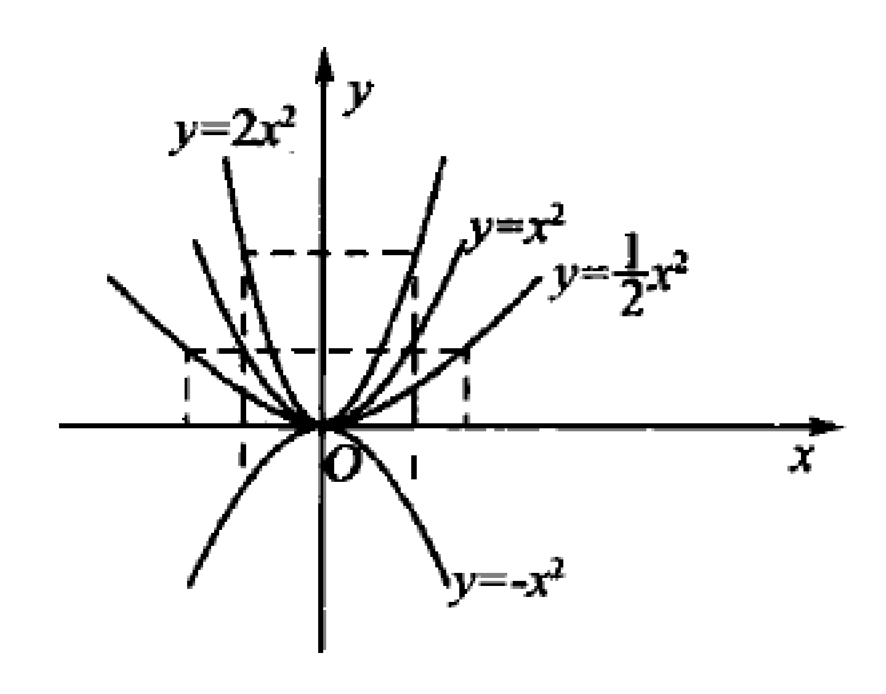
【242】 作出以下二次有理整函数的图形(抛物线)：

(1) 当 $a=1,\frac{1}{2},2,-1$ 时，$y=ax^2$；

(2) 当 $x_0=0,1,2,-1$ 时，$y=(x-x_0)^2$；

(3) 当 $c=0,1,2,-1$ 时，$y=x^2+c$.

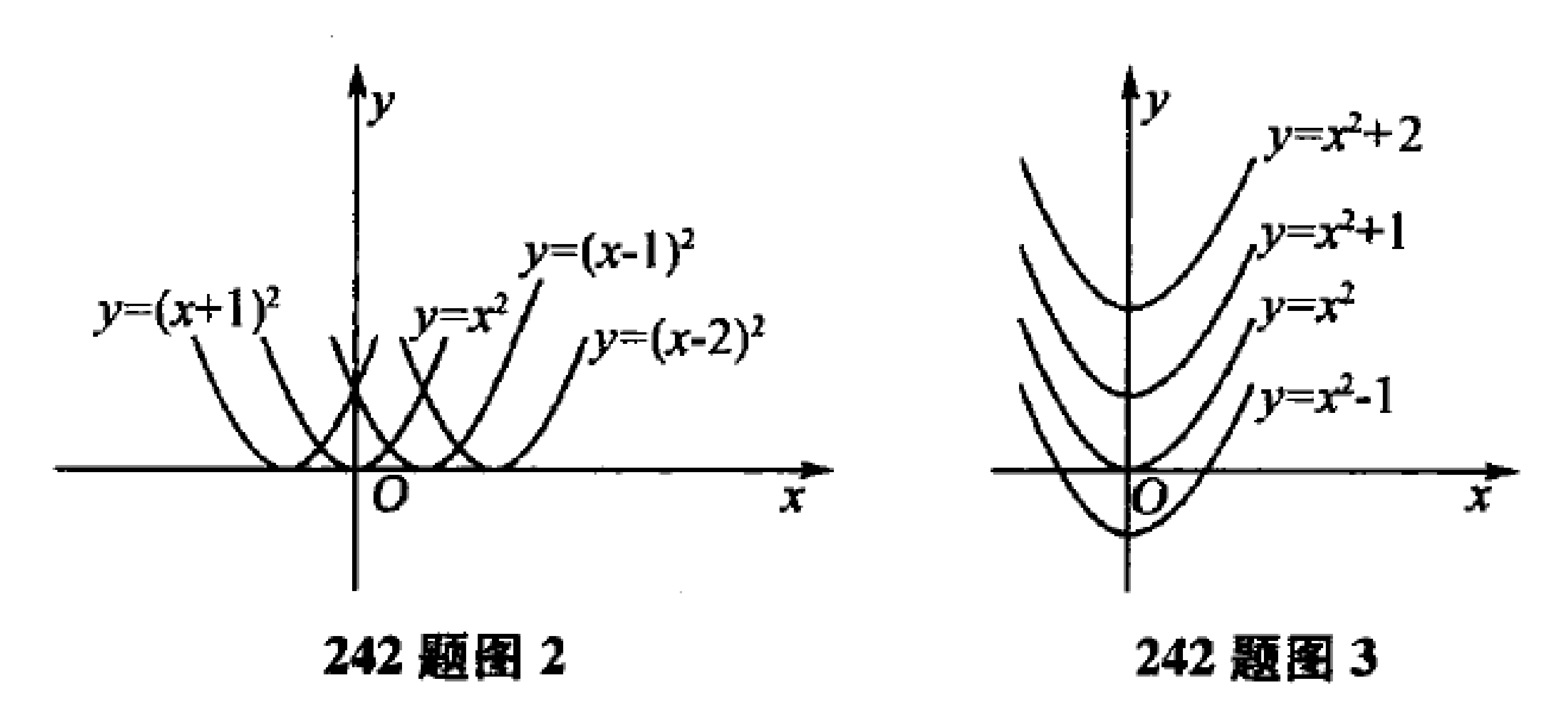
解 (1) 如 242 题图 1 所示.



242 题图 1

(2) 如 242 题图 2 所示.

(3) 如 242 题图 3 所示.



242 题图 2　　**242 题图 3**

【243】 将二次三项式 $y = ax^2 + bx + c$ 化为 $y = y_0 + a(x - x_0)^2$ 的形式,并作出其图形,研究下列例子:

(1) $y = 8x - 2x^2$;　　(2) $y = x^2 - 3x + 2$;

(3) $y = -x^2 + 2x - 1$;　　(4) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

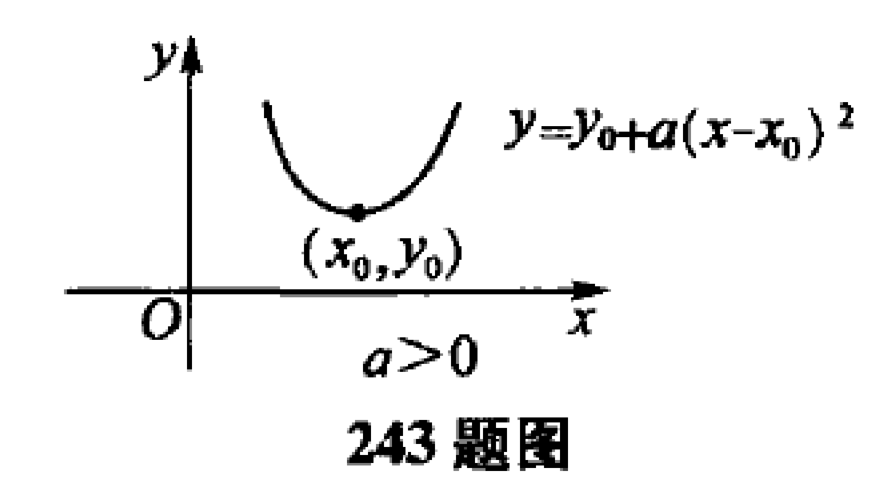
解 利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0),$$

其中 $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

图形如 243 题图所示

(1) $y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2$,

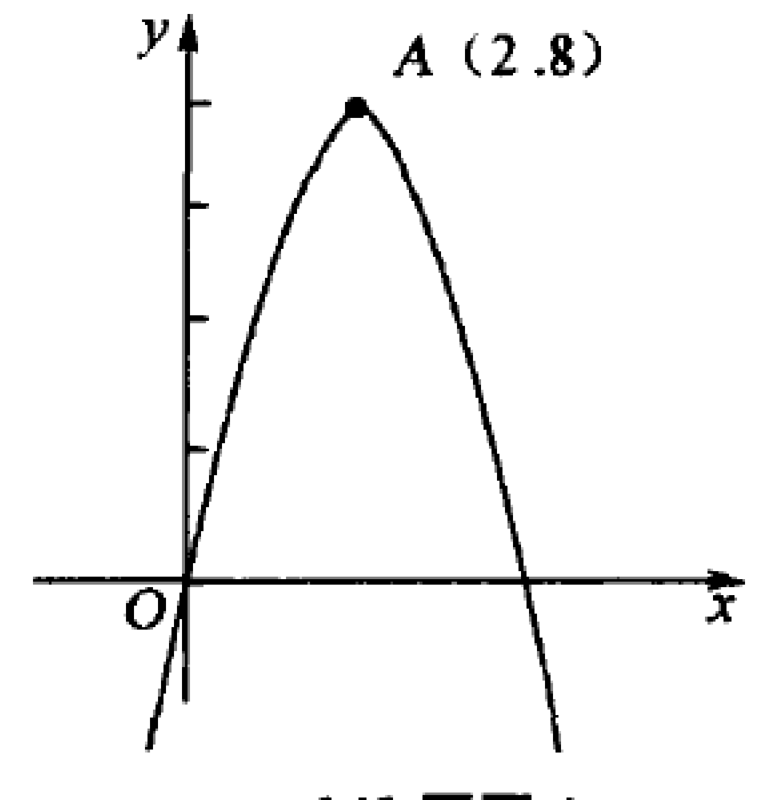


243 题图

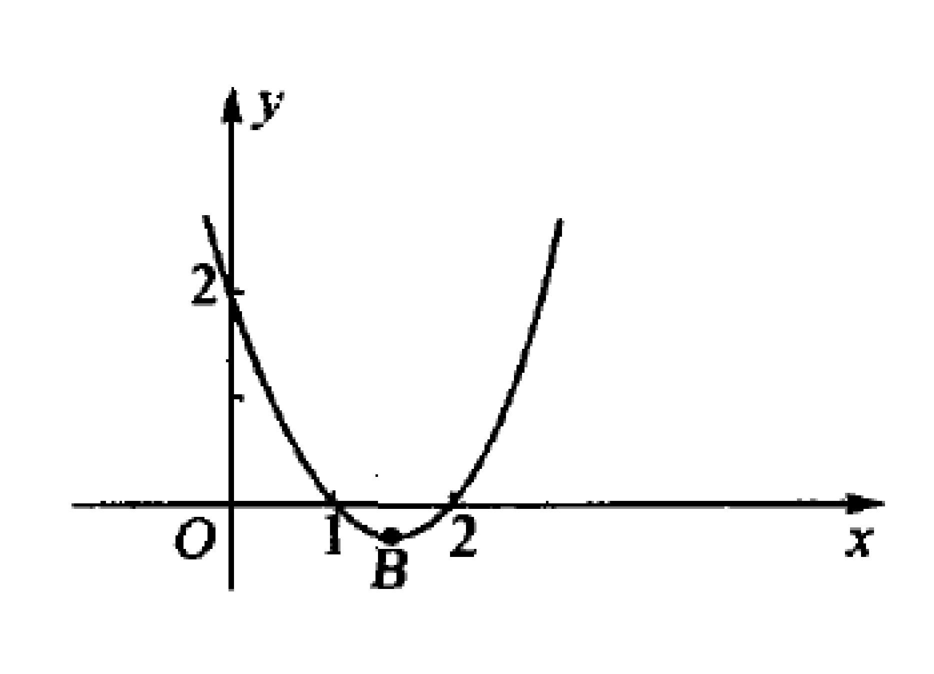
顶点为 $A(2,8)$，图形如 243 题图 1 所示.

(2) $y=x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$,

顶点为 $B\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，图形如 243 题图 2 所示.



243 题图 1



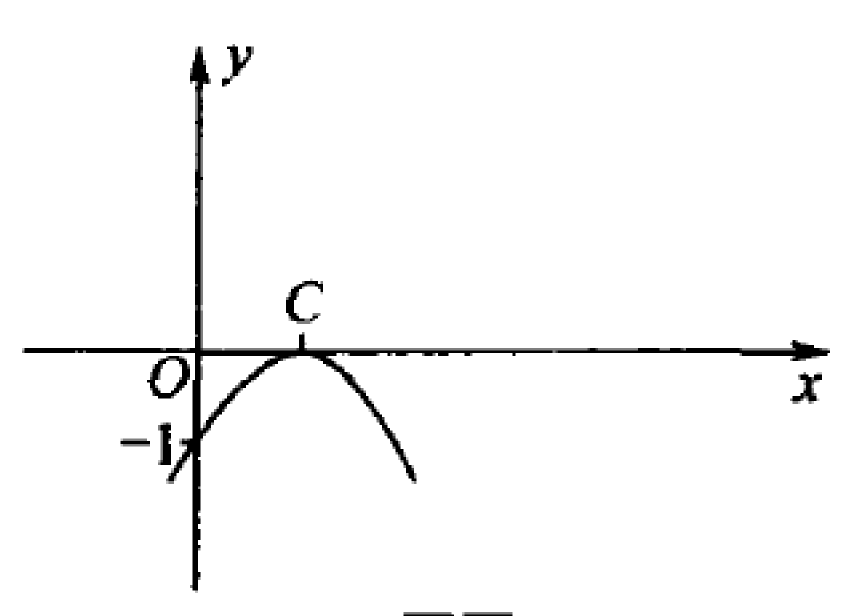
243 题图 2

(3) $y=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$,

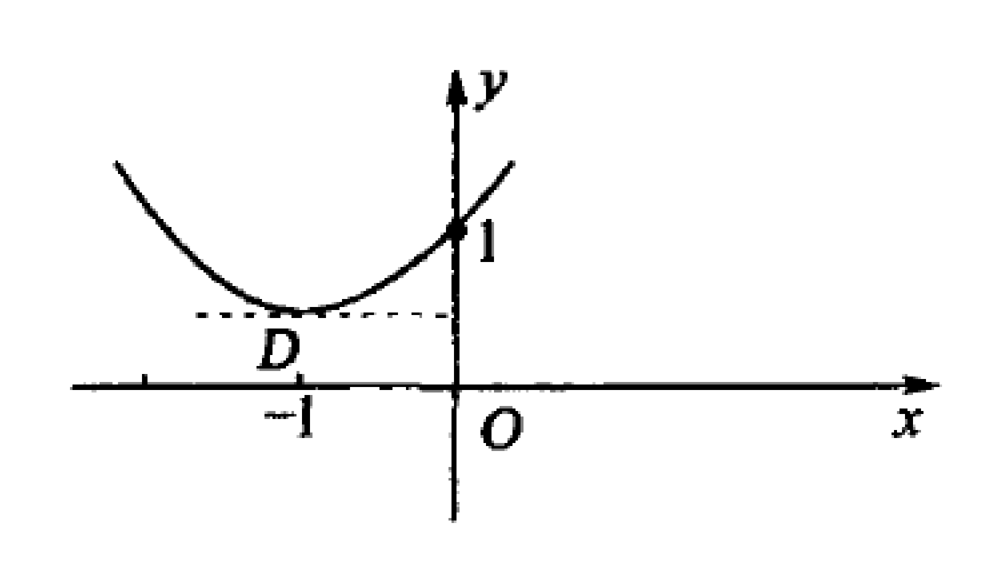
顶点为 $C(1,0)$，图形如 243 题图 3 所示.

(4) $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+\dfrac{1}{7}$,

顶点为 $D\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$，图形如 243 题图 4 所示.



243 题图 3



243 题图 4

【244】 质点以初始速度 $v_0 = 600$ 米 / 秒沿着与水平面成 $\alpha = 45^\circ$ 角的方向射出. 作出运动轨道的图形,并求出最大的升高和飞行的射程(假定 $g \approx 10$ 米 / 秒^2,空气阻力忽略不计).

解 运动轨道方程为 $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

这里 $\alpha = 45^\circ, v_0 = 600, g = 10,$

所以 $y = x - \dfrac{x^2}{3600},$

即 $y = -\dfrac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$

当 $x = 18000$ 时,y 值最大为 9000,即最大的升高为 9000 米.

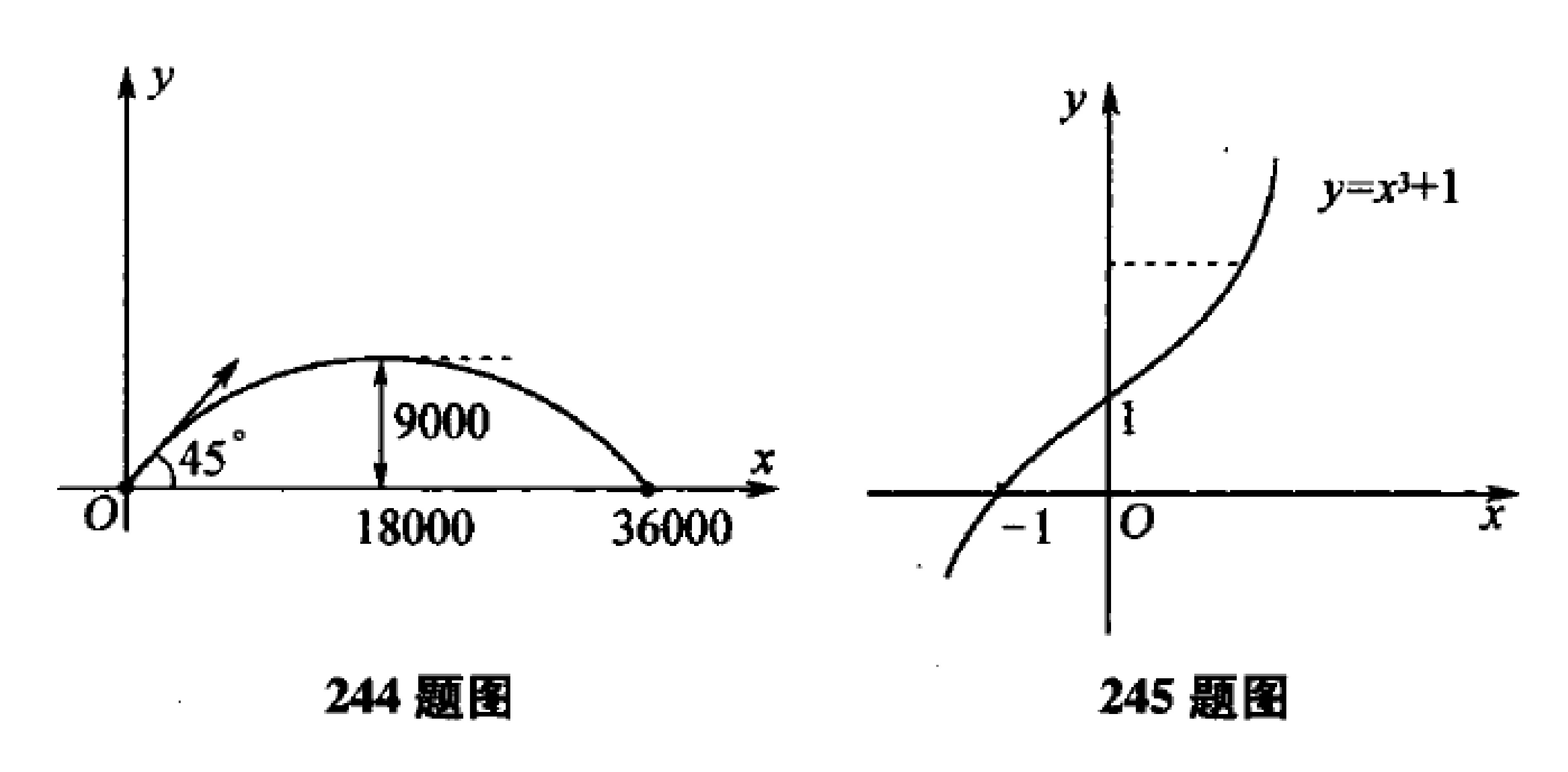
当 $x = 36000$ 时,$y = 0$,即飞行的射程为 36000 米.

如 244 题图所示.

作出高于二次的有理整函数的图形(245 ~ 248).

【245】 $y = x^3 + 1.$

解 如 245 题图所示.



244 题图 245 题图

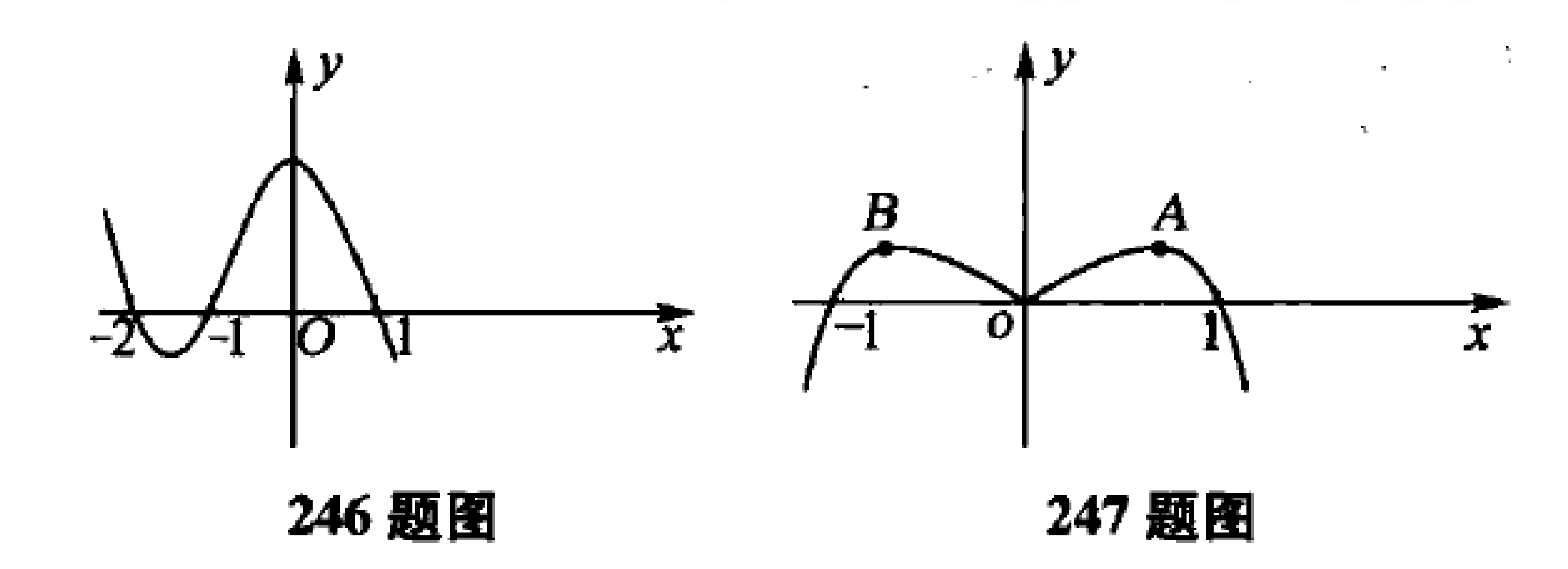
【246】 $y = (1 - x^2)(2 + x).$

解 当 $x = \pm 1, -2$ 时,$y = 0$.

当 $x < -2, -1 < x < 1$ 时,$y > 0$.

当 $-2 < x < -1$ 及 $x > 1$ 时,$y < 0$.

函数的图形如 246 题图所示.



246 题图　　247 题图

【247】 $y = x^2 - x^4$.

解 $y = x^2(1-x)(1+x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$,

图形关于 Oy 轴对称，与两坐标轴的交点为

$(-1,0),(0,0),(1,0)$.

当 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y = \frac{1}{4}$.

此时 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4}\right)$ 及 $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，曲线上升.

当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty$ 时，曲线下降.

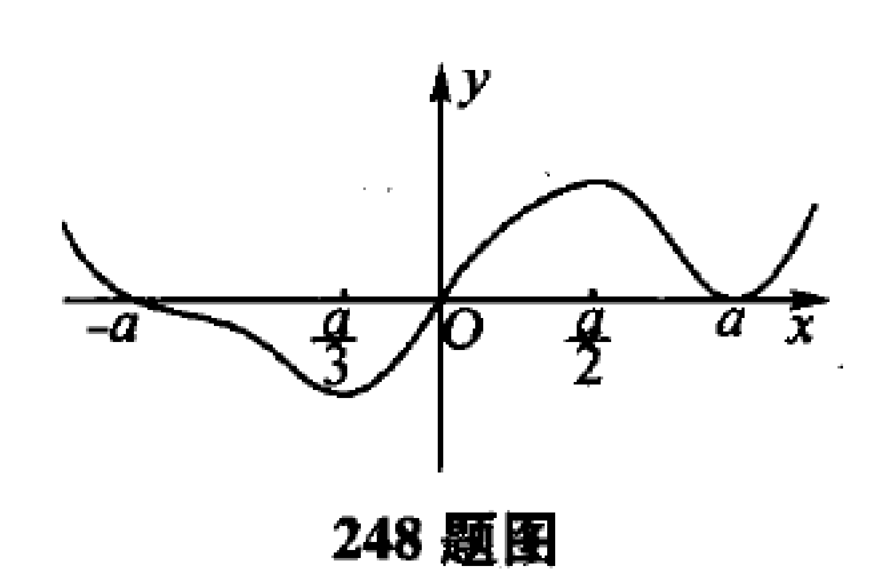
图形如 247 题图所示.

【248】 $y = x(a-x)^2(a+x)^3 \qquad (a > 0)$.

解 当 $x = 0, a, -a$ 时，$y = 0$.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时，$y > 0$.

当 $-a < x < 0$ 时，$y < 0$，图形如 248 题图所示.

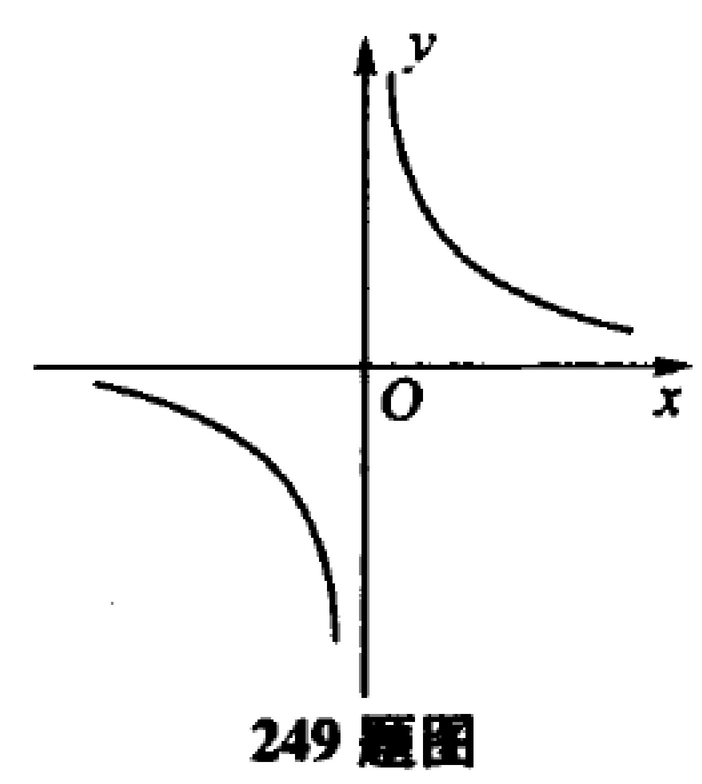


248 题图

作出线性分式函数的图形(双曲线)(249 ~ 250).

【249】 $y=\dfrac{1}{x}$.

解 如 249 题图所示.



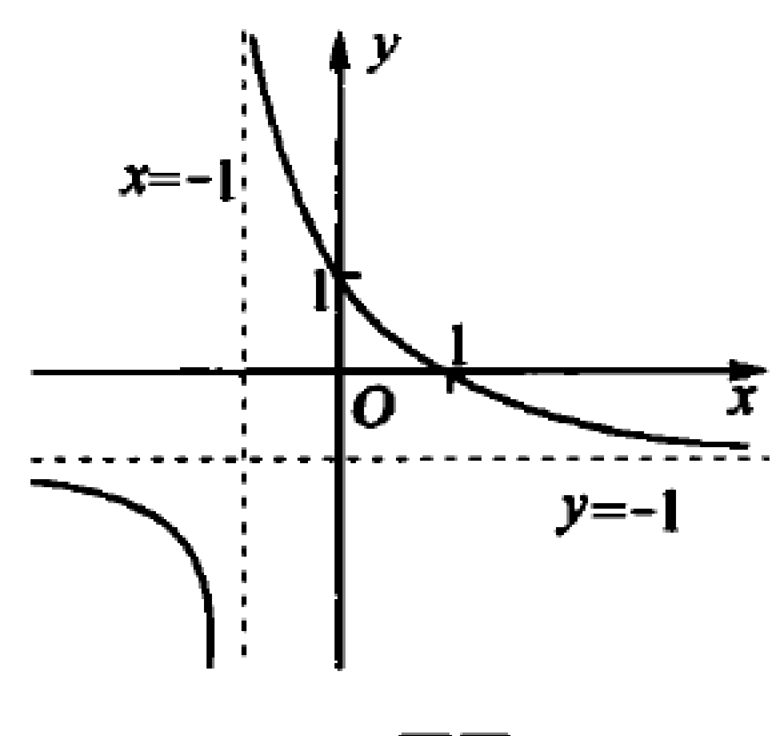
249 题图

【250】 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $y=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$,

即 $$y+1=\frac{2}{1+x}.$$

图形的对称中心为$(-1,-1)$,如 250 题图所示.



250 题图

【251】 将线性分式函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0,c\neq 0)$,化为 $y=y_0+\dfrac{m}{x-x_0}$ 的形式,再作出其图形,并研究下例:y

$= \dfrac{3x+2}{2x-3}$

解　$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)} = y_0 + \frac{m}{x-x_0},$$

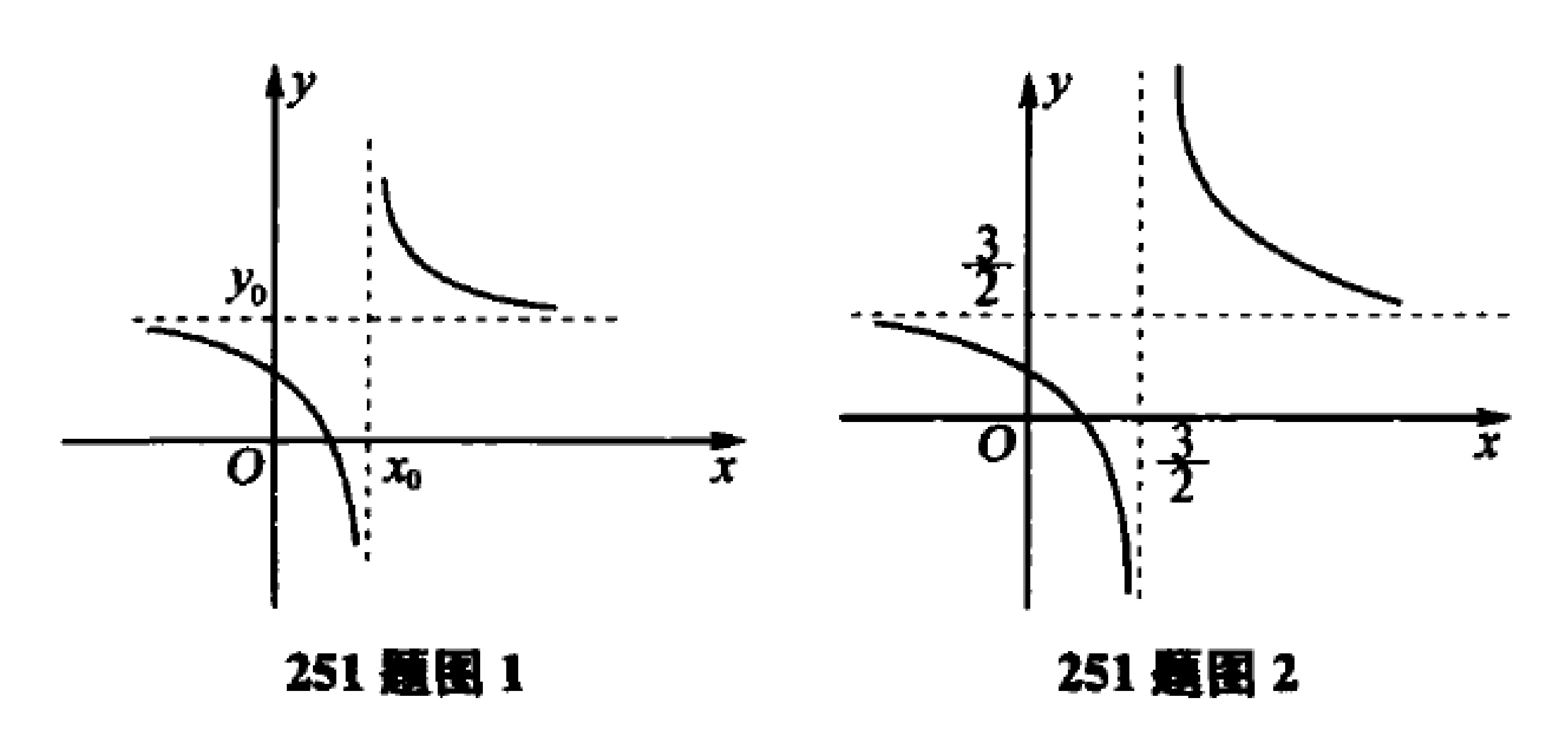
其中　$x_0 = -\dfrac{d}{c}, y_0 = \dfrac{a}{c}, m = \dfrac{bc-ad}{c^2}.$

图形如 251 题图 1 所示.

对于　$y = \dfrac{3x+2}{2x-3},$

有　$x_0 = y_0 = \dfrac{3}{2}.$

图形如 251 题图 2 所示.



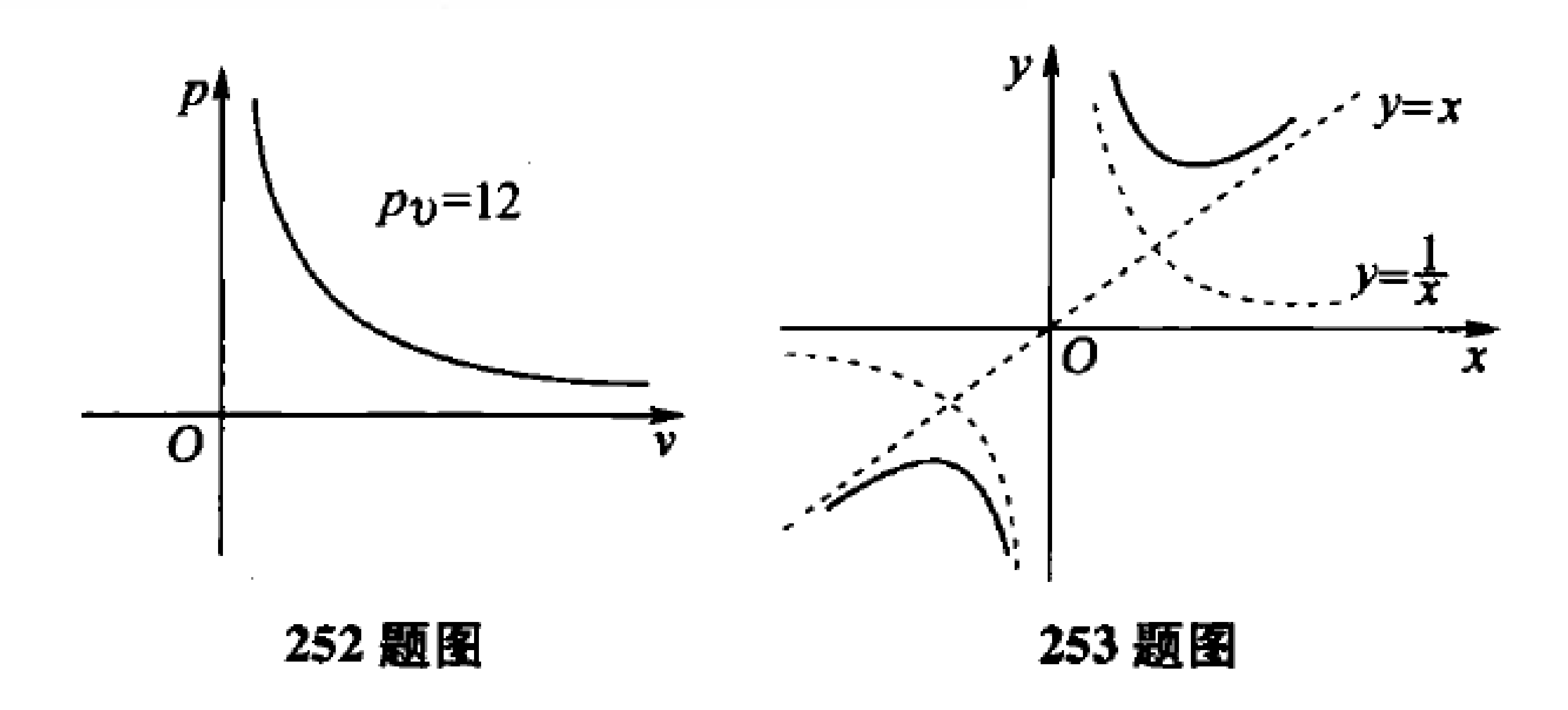
251 题图 1　　251 题图 2

【252】　当压力 $p_0 = 1$ 大气压时,气体占有体积 $V_0 = 12$ 立方米,若气体的温度保持不变,作出气体体积 V 随着压力变化而变化的图形(波伊尔 - 马里阿特定律).

解　当温度保持不变时,气体体积 v 与压力 p 成反比,即

$pv = C$　　(其中 C 为常数).

当 $p_0 = 1$ 时,$v_0 = 12$,故 $C = 12$. 所以,$pv = 12$,图形如 252 题图所示.



252 题图　　253 题图

作出下列有理分式函数的图形(253 ～ 262).

【253】 $y = x + \dfrac{1}{x}$　　(双曲线).

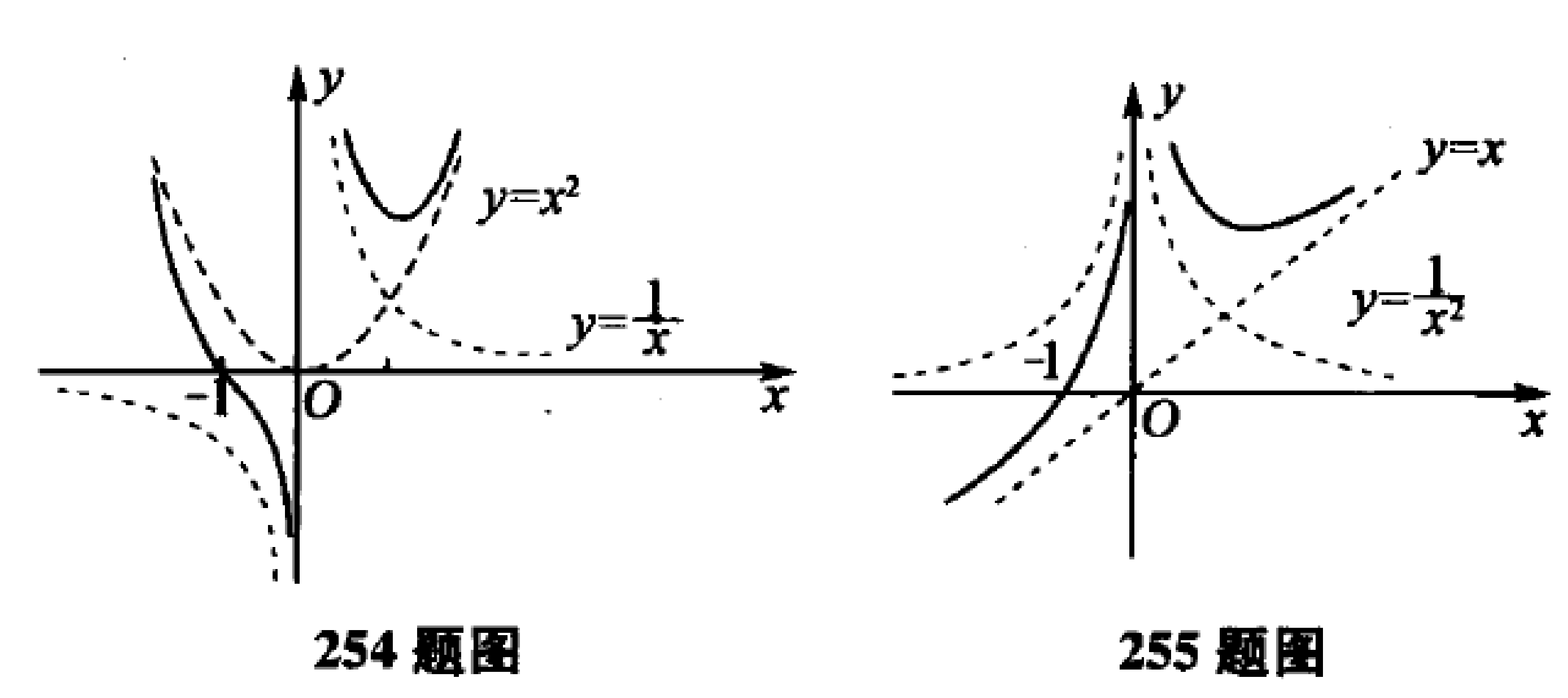
解　将 $y = x$ 及 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形迭加所得如 253 题图中粗实线所示.

【254】 $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$　　(牛顿三次曲线).

解　由 $y = x^2$ 及 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形迭加所得如 254 题图中粗实线所示.

【255】 $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

解　由 $y = x$ 及 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 的图形迭加所得. 如 255 题图中粗实线所示.



254 题图　　255 题图

【256】 $y=\frac{1}{1+x^2}$ （安叶泽曲线）.

解 图形关于 Oy 轴对称，且 $y>0$，即曲线位于 Ox 轴上方. 最高为(0,1). 当 x 的绝对值无限增大时，y 值无限变小. 图形以 Ox 轴为渐近线. 图形如 256 题图所示.

【257】 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ （牛顿蛇形线）.

解 因为$\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\frac{2x}{1+x^2}$，

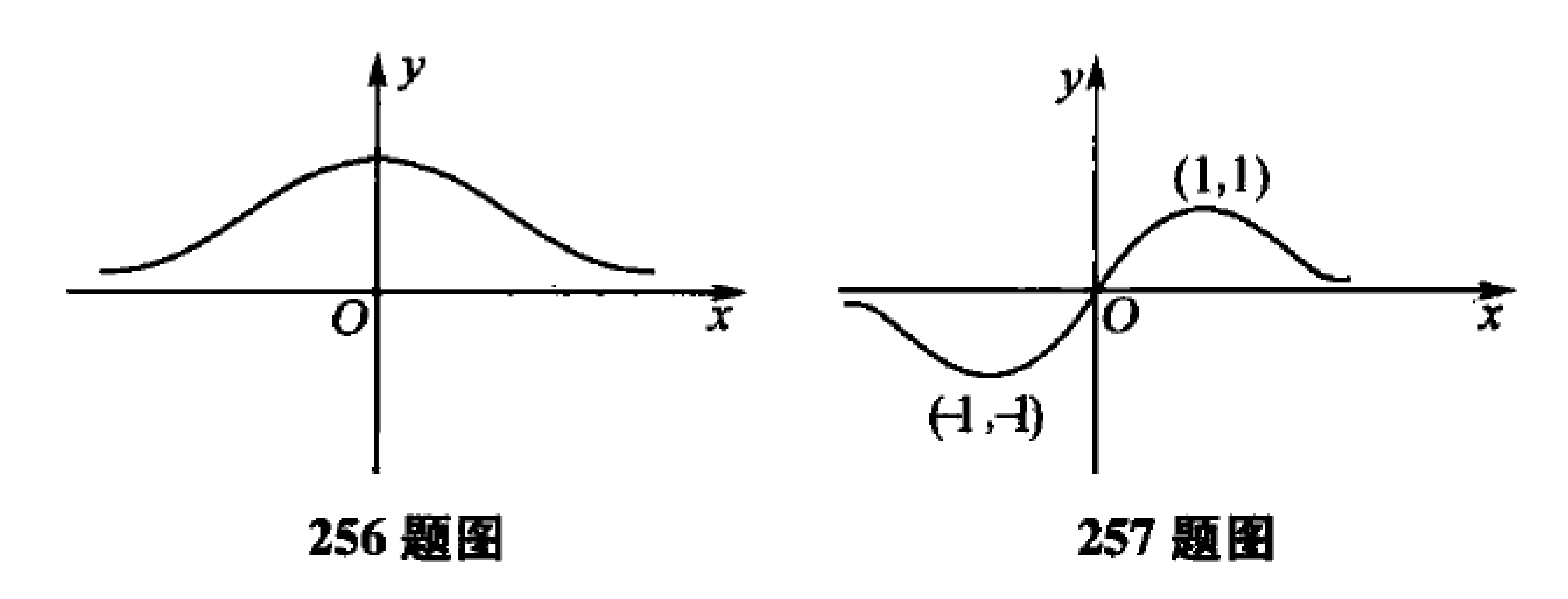
所以，图形关于原点对称. 又$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$，

所以 $-1\leqslant y\leqslant 1$，

当 $x=0$ 时，$y=0$；$x=1$ 时，$y=1$；$x=-1$ 时，$y=-1$；

当 $x>0$ 时，$y>0$；

当 $0<x<1$ 时，曲线上升，当 $x>1$ 时，曲线下降，图形以 Ox 轴为渐近线. 如 257 题图所示.



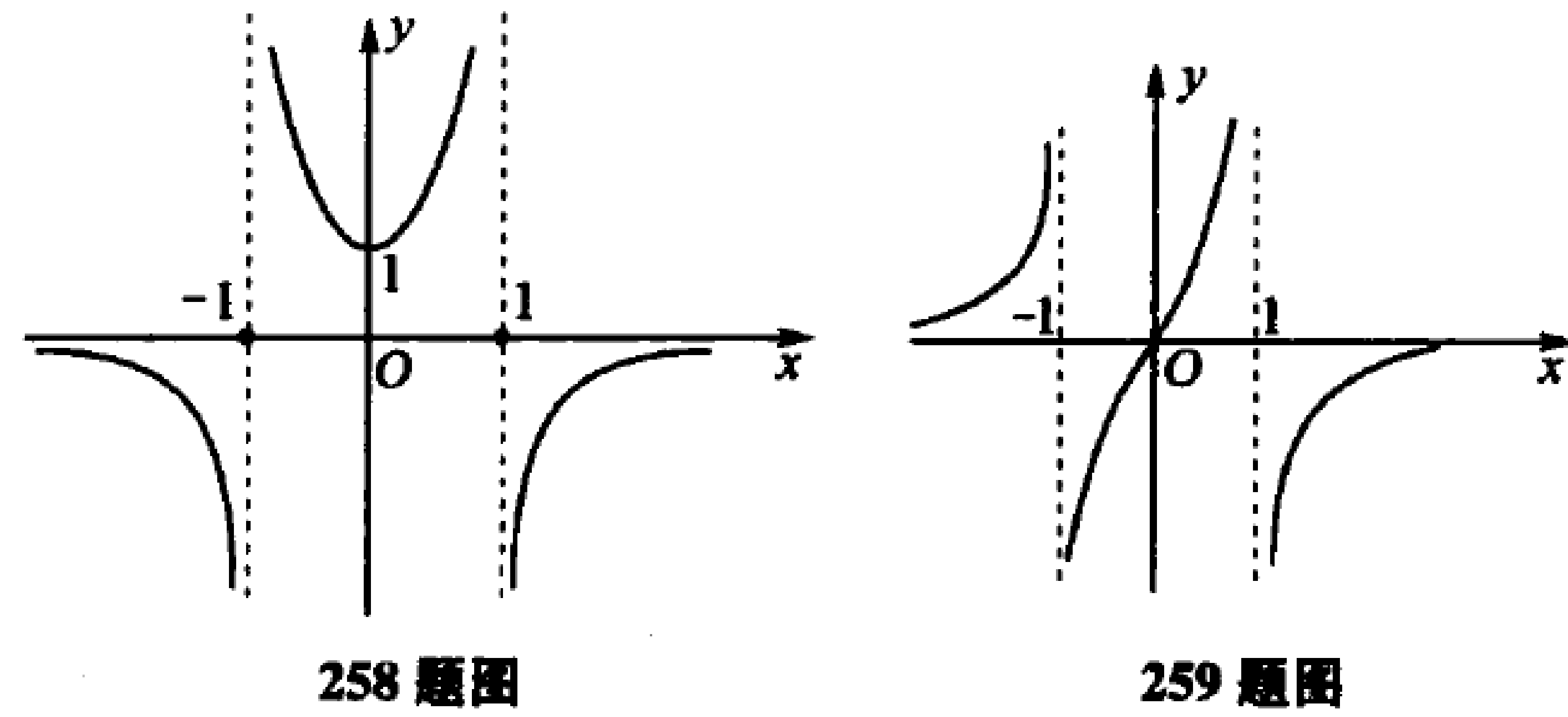
256 题图　　257 题图

【258】 $y=\frac{1}{1-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称，且过点(0,1)

当 $0<x<1$ 时，及 $x>1$ 时，曲线上升.

当 $x=\pm1$ 时，y 无意义，$x=\pm1$ 为曲线的渐近线，$y=0$ 也为曲线的渐近线，如 258 题图所示.



258 题图　　259 题图

【259】 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

解　图形关于原点对称，且经过原点.

$x=\pm 1, y=0$ 为曲线的渐近线.

在$(0,1)$及$(1,+\infty)$内曲线上升，如259题图所示.

【260】 $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

解　将 $y=\dfrac{1}{1+x}, y=-\dfrac{2}{x}$ 及 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图形迭加所得.

$x=-1,0,1$ 及 $y=0$ 为曲线的渐近线.

【261】 $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

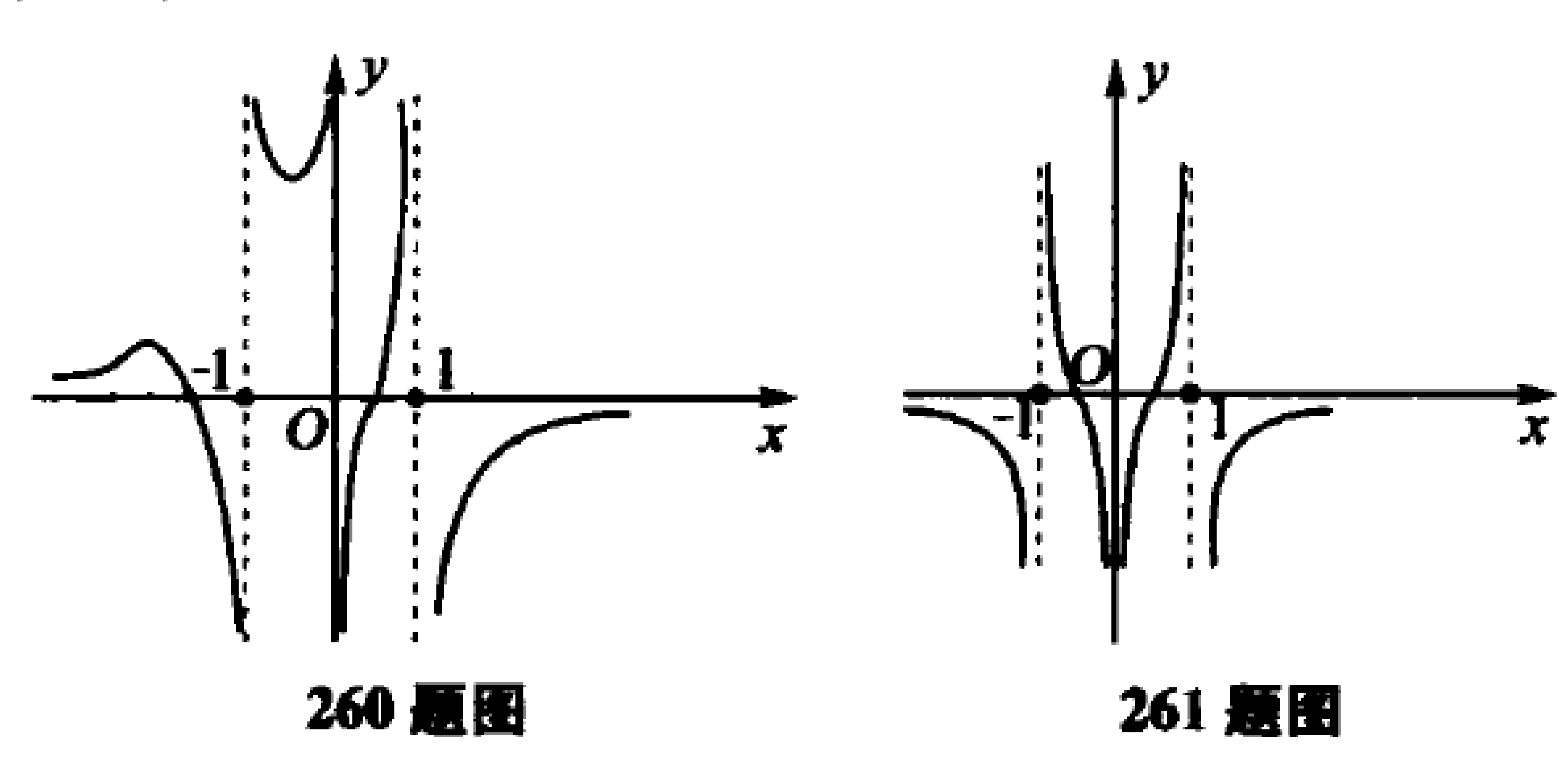
解　图形由 $y=\dfrac{1}{1+x}, y=-\dfrac{2}{x^2}, y=\dfrac{1}{1-x}$

的图形迭加而成. 图形关于 Oy 轴对称，

$$x=-1, x=0, x=1$$

及　　$y=0$,

为其渐近线，如261题图所示.



260 题图　　261 题图

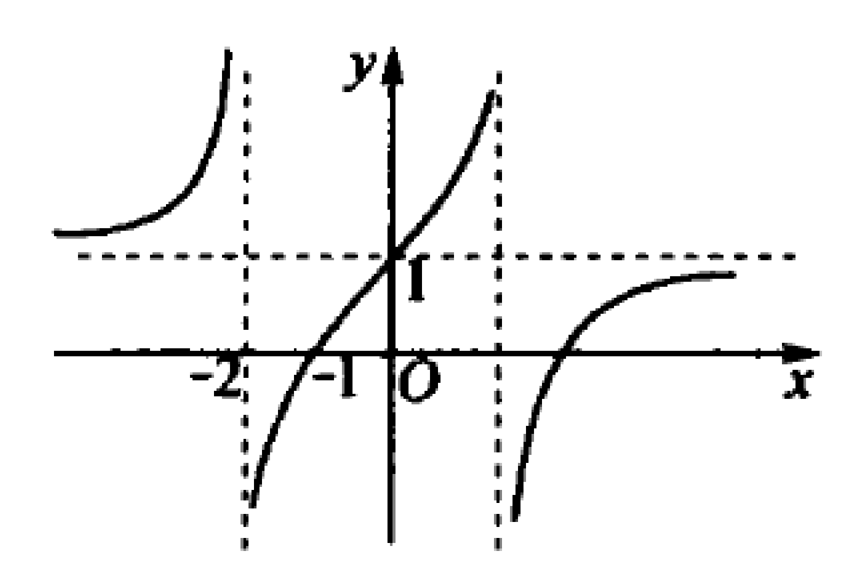
【262】 $y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

解 $y=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}=1-\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$

$$=1-\frac{4}{3}\frac{1}{x+2}-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1},$$

图形是由 $y=1$, $y=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$ 及 $y=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}$ 的图形叠加而成.

特别地 $x=-2$, $x=1$, $y=1$ 为其渐近线,如 262 题图所示.



262 题图

【263】 将函数 $y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}(a_1\neq 0)$ 化为 $y=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$ 的形式,作出其简图,并研究 $y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$.

解 $y=\frac{a}{a_1}x+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}+\frac{\frac{c}{a_1}-\frac{b}{a_1^2}(a_1b-ab_1)}{x-\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$

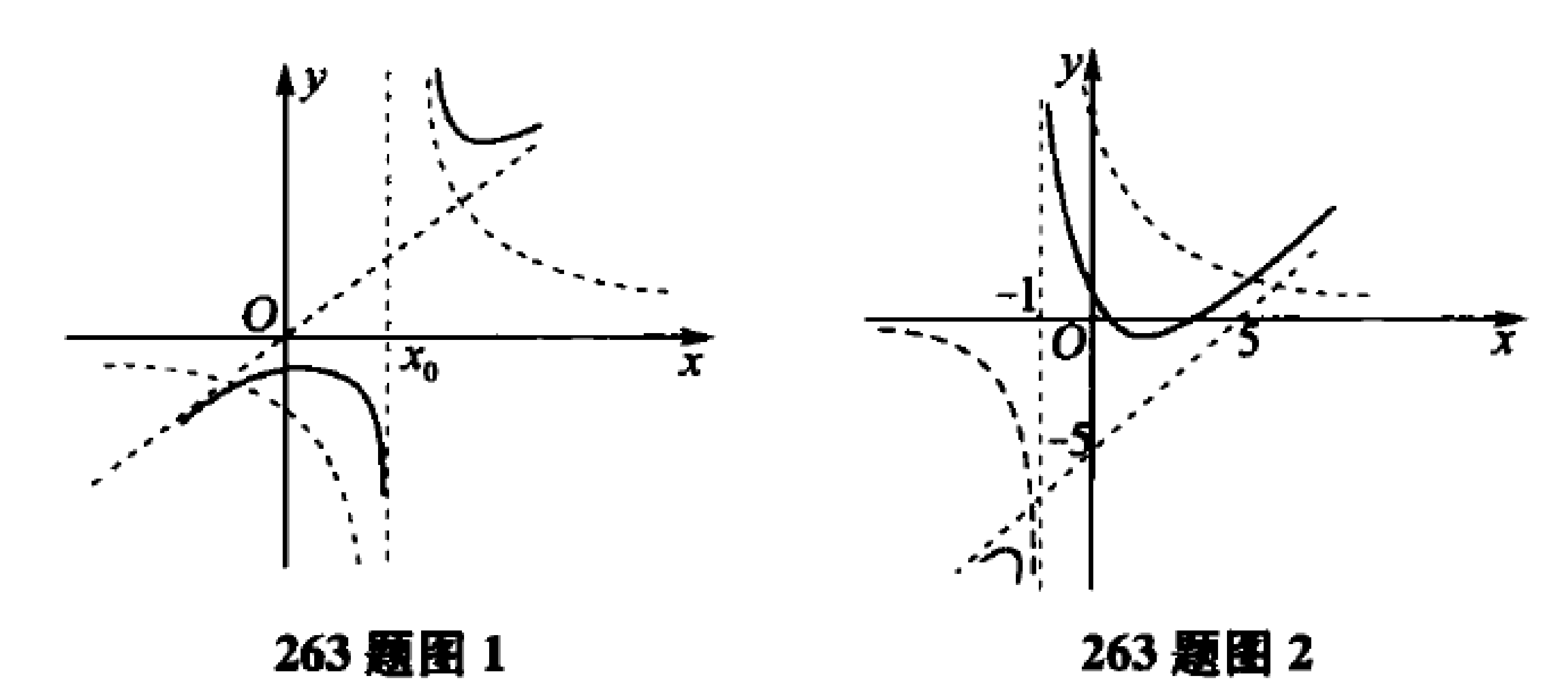
$$=kx+m+\frac{n}{x-x_0},$$

其中 $k=\frac{a}{a_1}$, $m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$,

$$x_0=-\frac{b_1}{a_1}, n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^2}(a_1b-ab_1).$$

图形由 $y=kx+m$ 及 $y=\frac{n}{x-x_0}$ 的图形迭加而成,如 263 题图 1

中的粗实线所示.



263 题图 1　　　　263 题图 2

对于 $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}=x-5+\dfrac{8}{x+1}$.

图形如 263 题图 2 中的粗实线所示.

【264】 质点与引力中心相距 x,设当 $x=1$ 米时,引力 $F=10$ 千克,作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛顿定律).

解 由万有引力定律知

$$F=\frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数,当 $x=1$ 时,$F=10$,于是,$k=0$,所以

$$F=\frac{10}{x^2}.$$

如 264 题图所示.

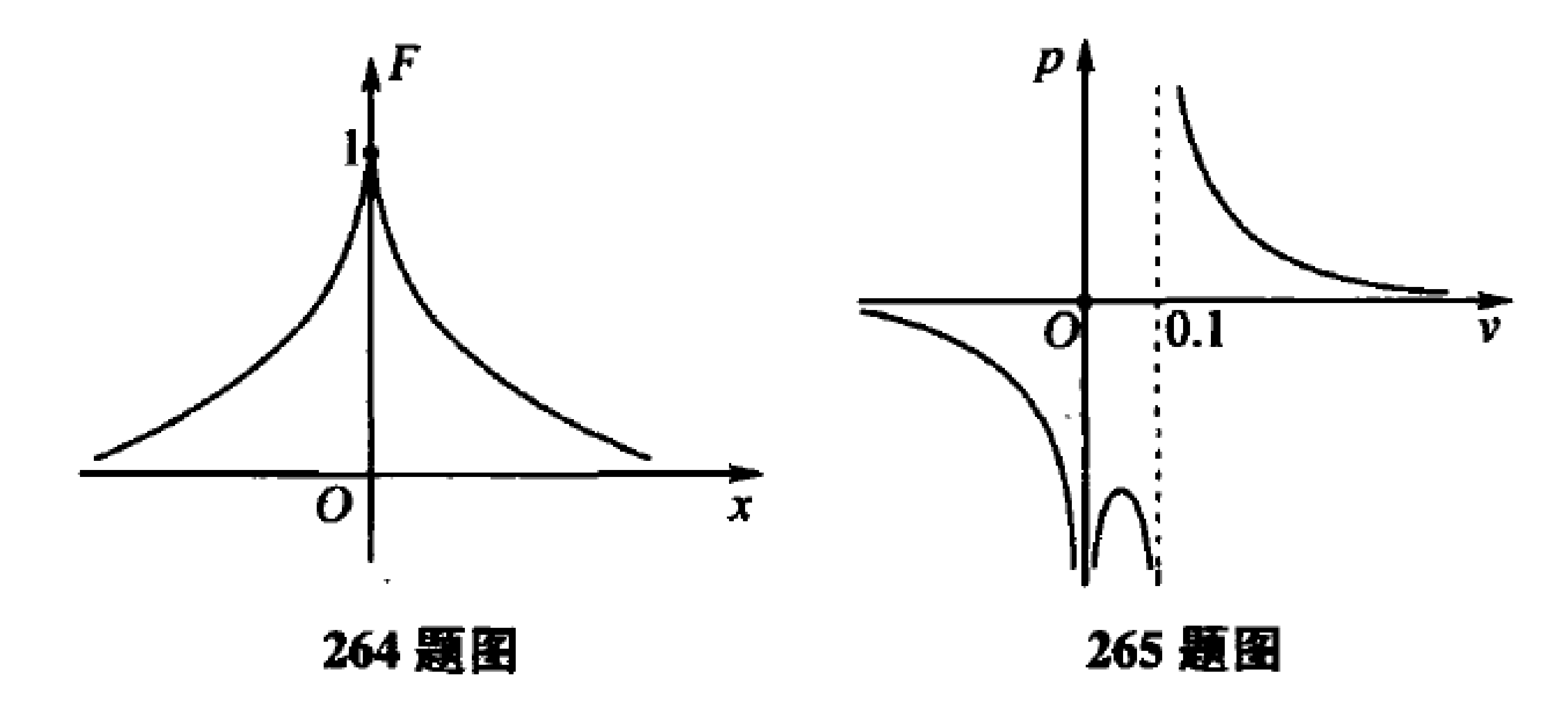
【265】 根据范德瓦尔斯定律,当温度不变时,真实气体的体积 v 及其压力 p 相关的关系式为:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c,$$

若 $a=2,b=0.1,c=10$,作出函数 $p=p(V)$ 的图形.

解 由于 $p=\dfrac{10}{v-0.1}-\dfrac{2}{v^2}$,

其图形是由 $p=\dfrac{10}{v-0.1}$ 及 $p=-\dfrac{2}{v^2}$ 的图形叠加而成,如 265 题图所示.

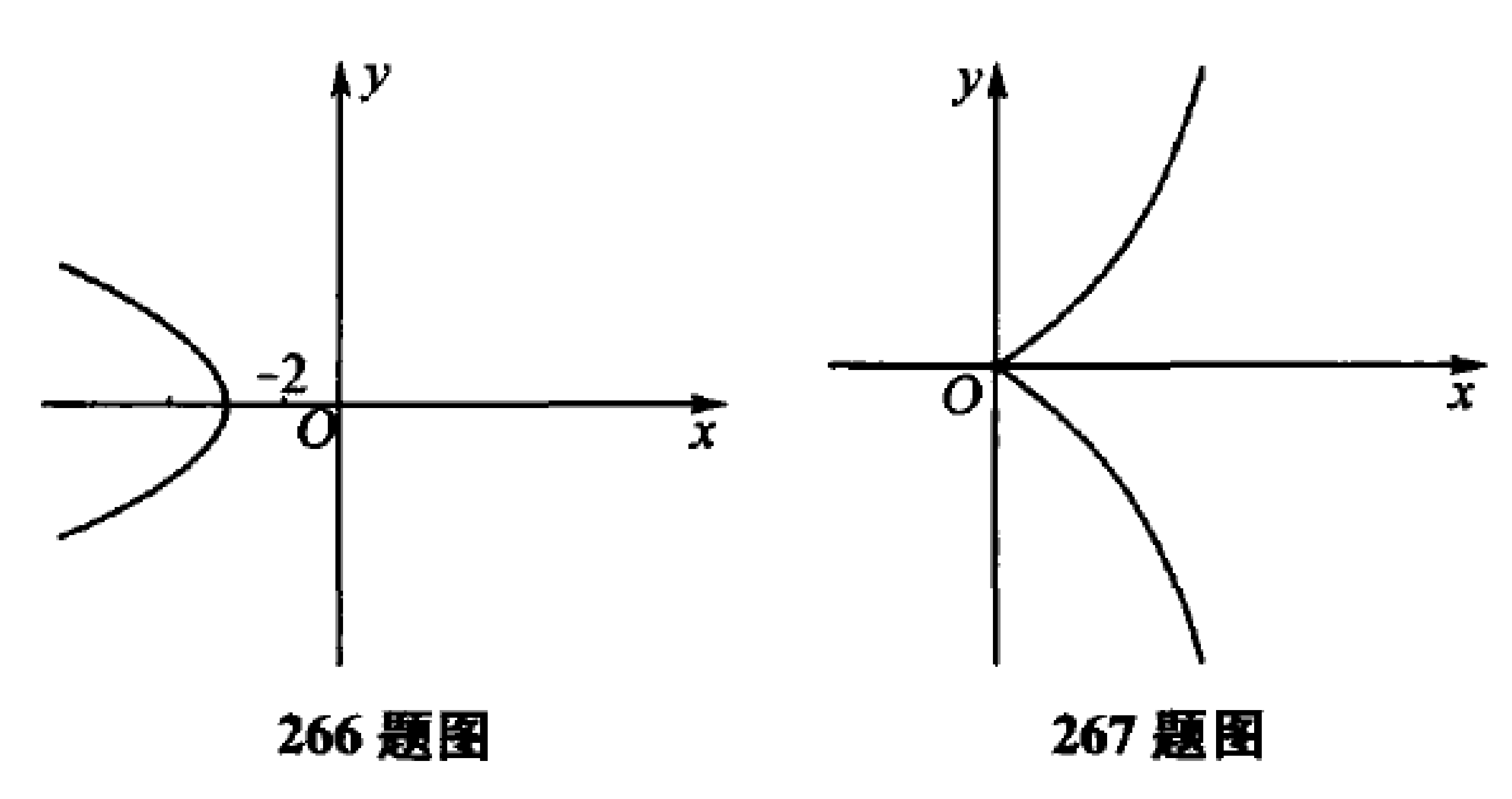


264 题图 265 题图

作出以下无理函数的图形(266 ~ 273).

【266】 $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (**抛物线**).

解 $y^2=-(x+2)$,如 266 题图所示.



266 题图 267 题图

【267】 $y=\pm x\sqrt{x}$ (**尼尔抛物线**).

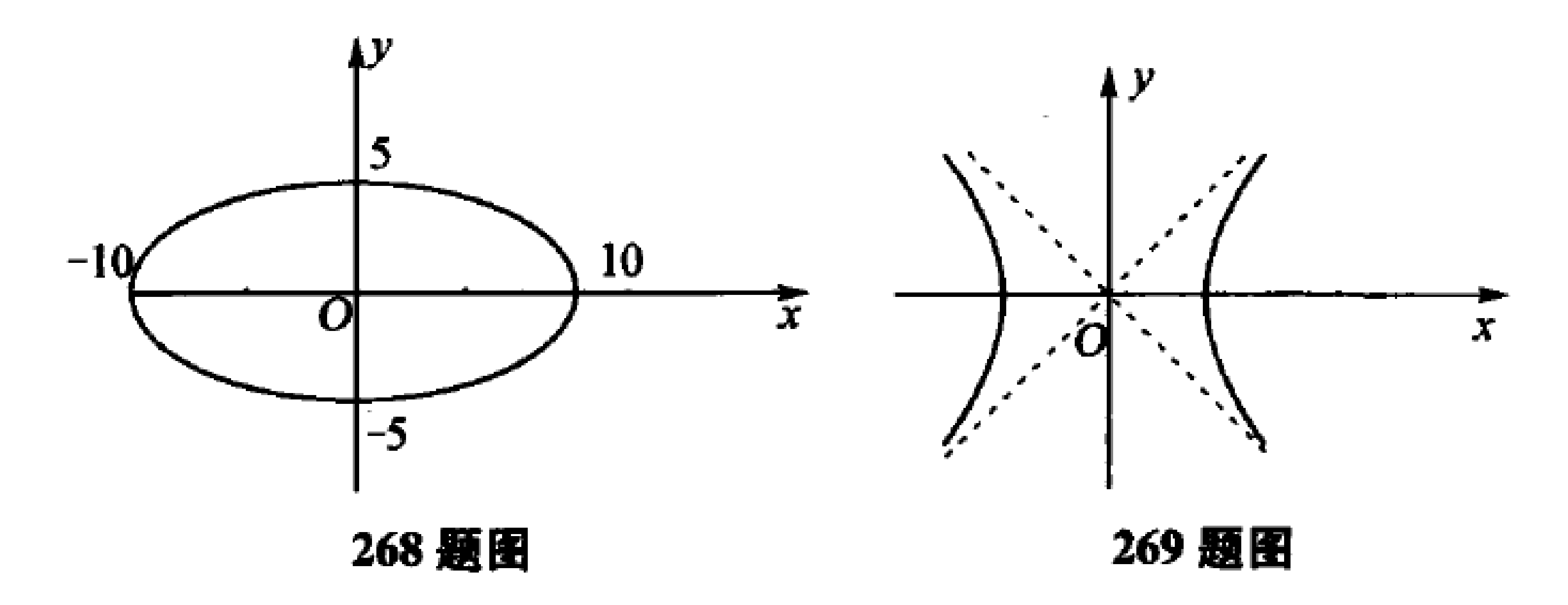
解 $y^2=x^3$,如 267 题图所示.

【268】 $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (**椭圆**).

解 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$,如 268 题图所示.

【269】 $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (**双曲线**).

解 $x^2-y^2=1$,如 269 题图所示.



268 题图　　269 题图

【270】 $y=\pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解　$y^2=\dfrac{1-x}{1+x}$,

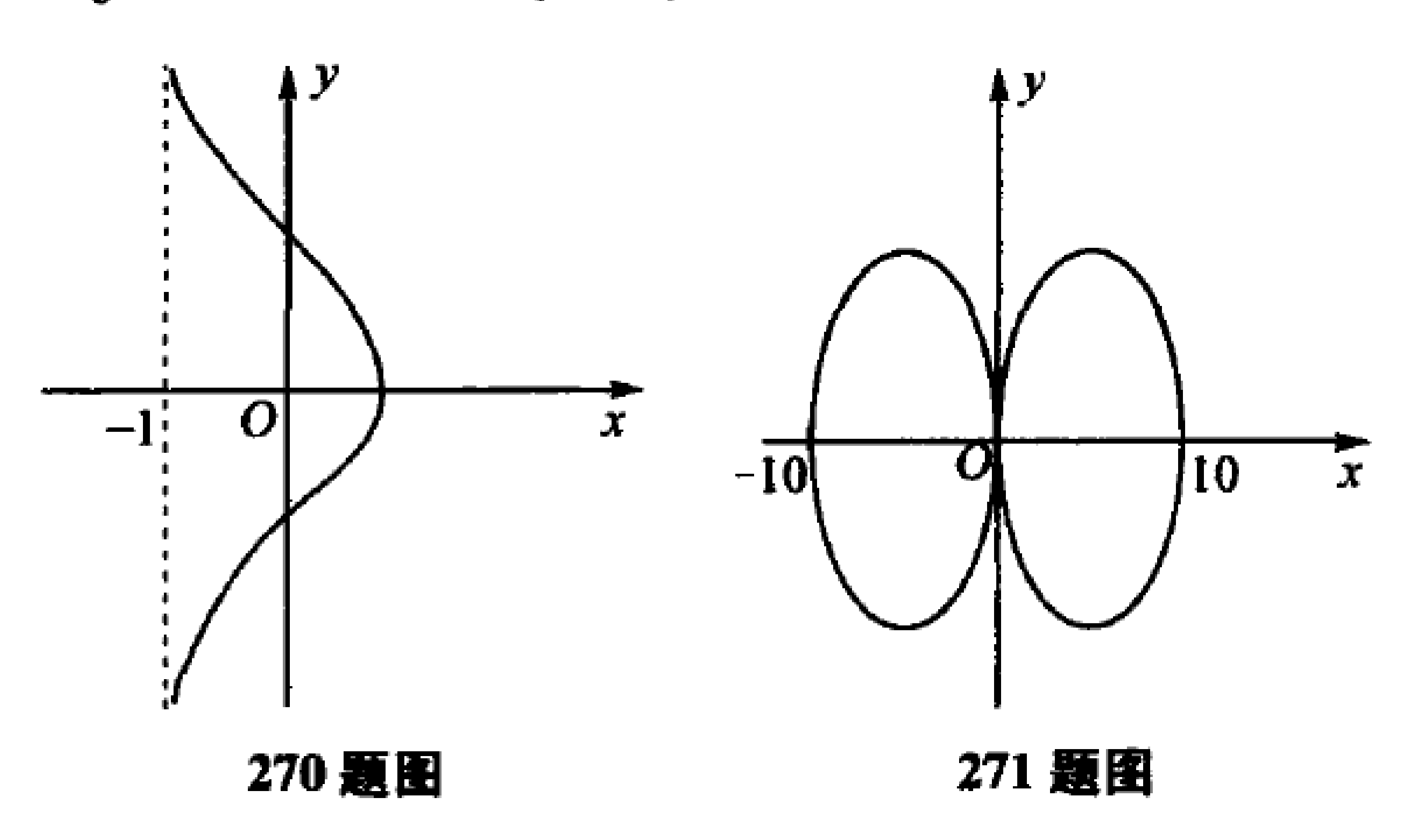
即　$x=-1+\dfrac{2}{1+y^2}$.

将 $x=\dfrac{2}{1+y^2}$ 的图形向左平移一个单位,即得如 270 题图所示 $(-1<x\leqslant 1)$.

【271】 $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

解　当 $x=0,\pm 10$ 时,

$y=0$ 且 $-10\leqslant x\leqslant 10$.



270 题图　　271 题图

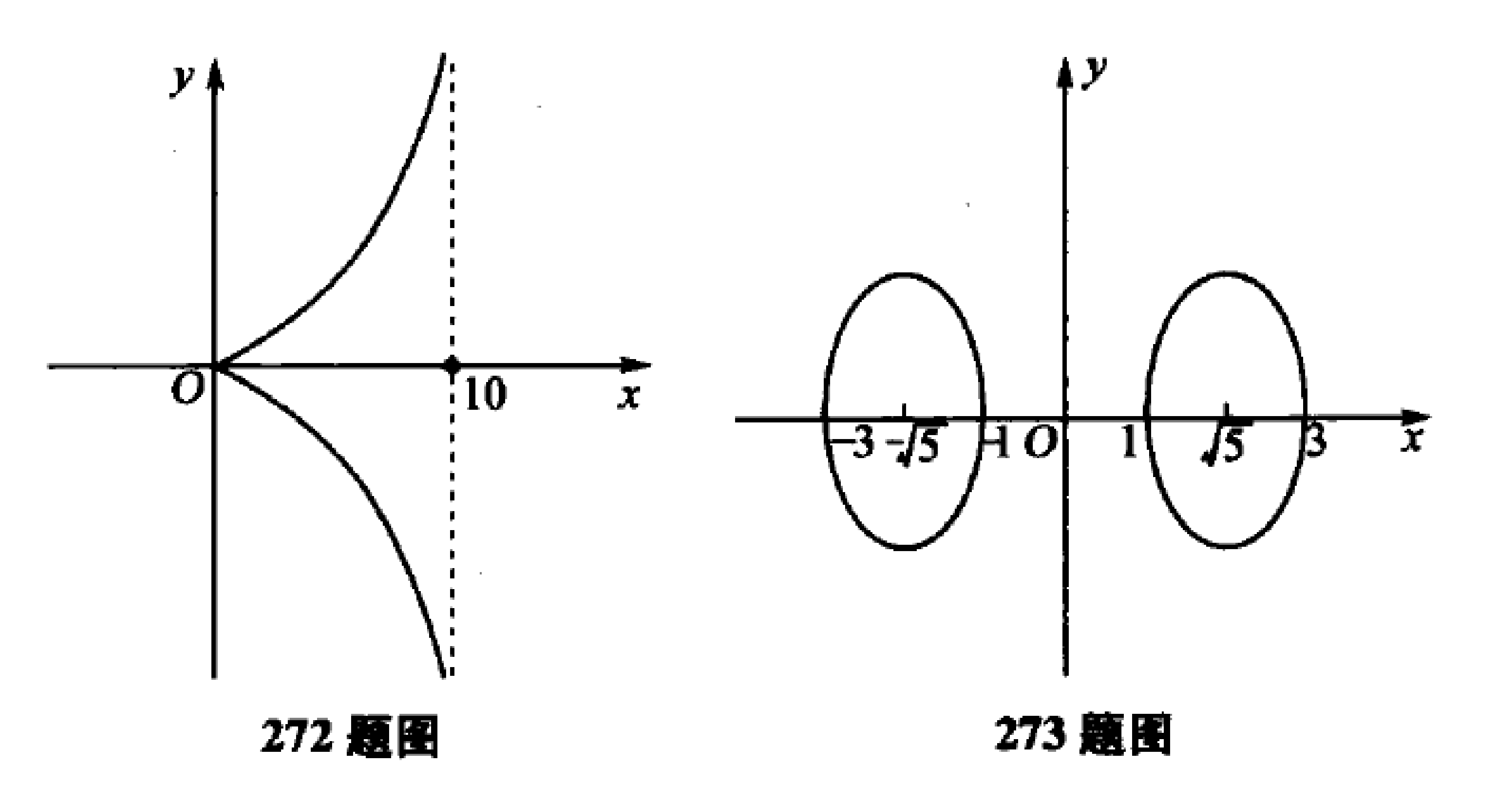
【272】 $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}$　(蔓叶线).

解　$y^2 = \dfrac{x^3}{10-x}$ 定义域为 $0 \leqslant x < 10$.

如 272 题图所示.

【273】　$y = \pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

解　$y = \pm\sqrt{16-(x^2-5)^2}$，定义为 $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

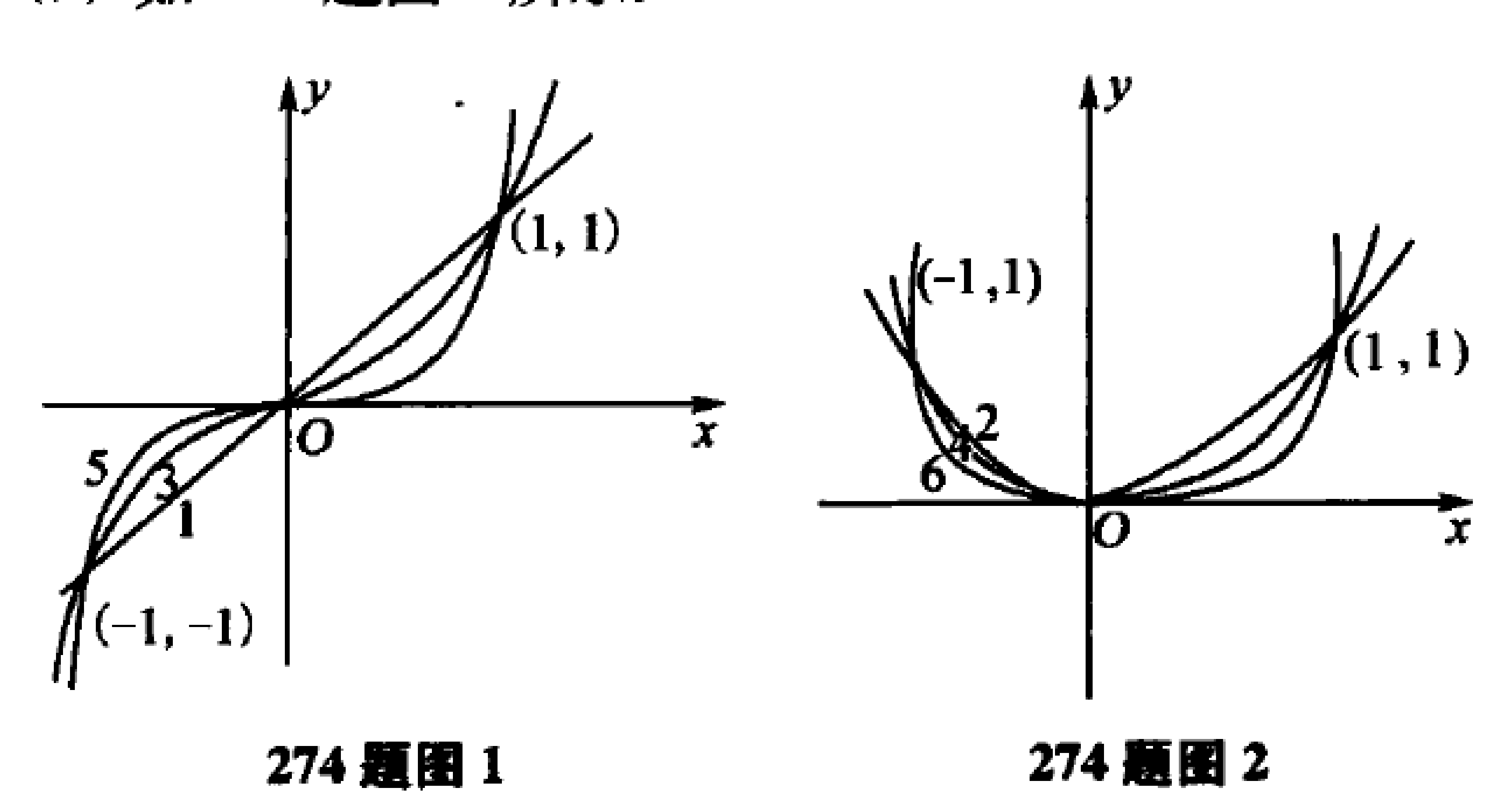


272 题图　　273 题图

【274】　作出幂函数 $y = x^n$，当：(1) $n = 1, 3, 5\cdots$；(2) $n = 2, 4, 6\cdots$ 时的图形.

解　(1) 如 274 题图 1 所示.

(2) 如 274 题图 2 所示.

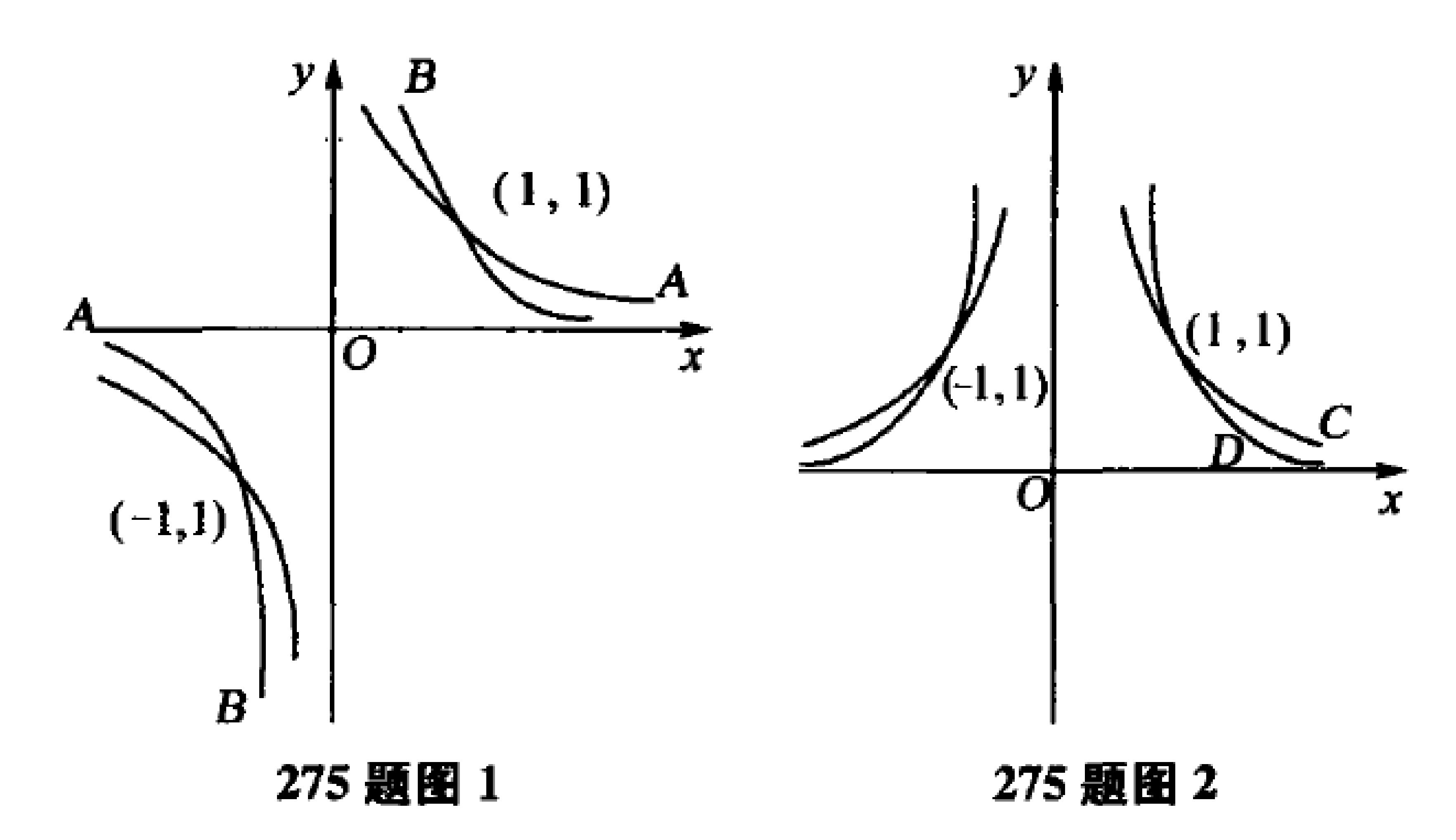


274 题图 1　　274 题图 2

【275】　作出幂函数 $y = x^n$　当：(1) $n = -1, -3$；(2) $n = -2, -4$ 时的图形.

解 (1) 如 275 题图 1 所示.

$A: y = \frac{1}{x}, B: y = \frac{1}{x^3}$.



275 题图 1　　275 题图 2

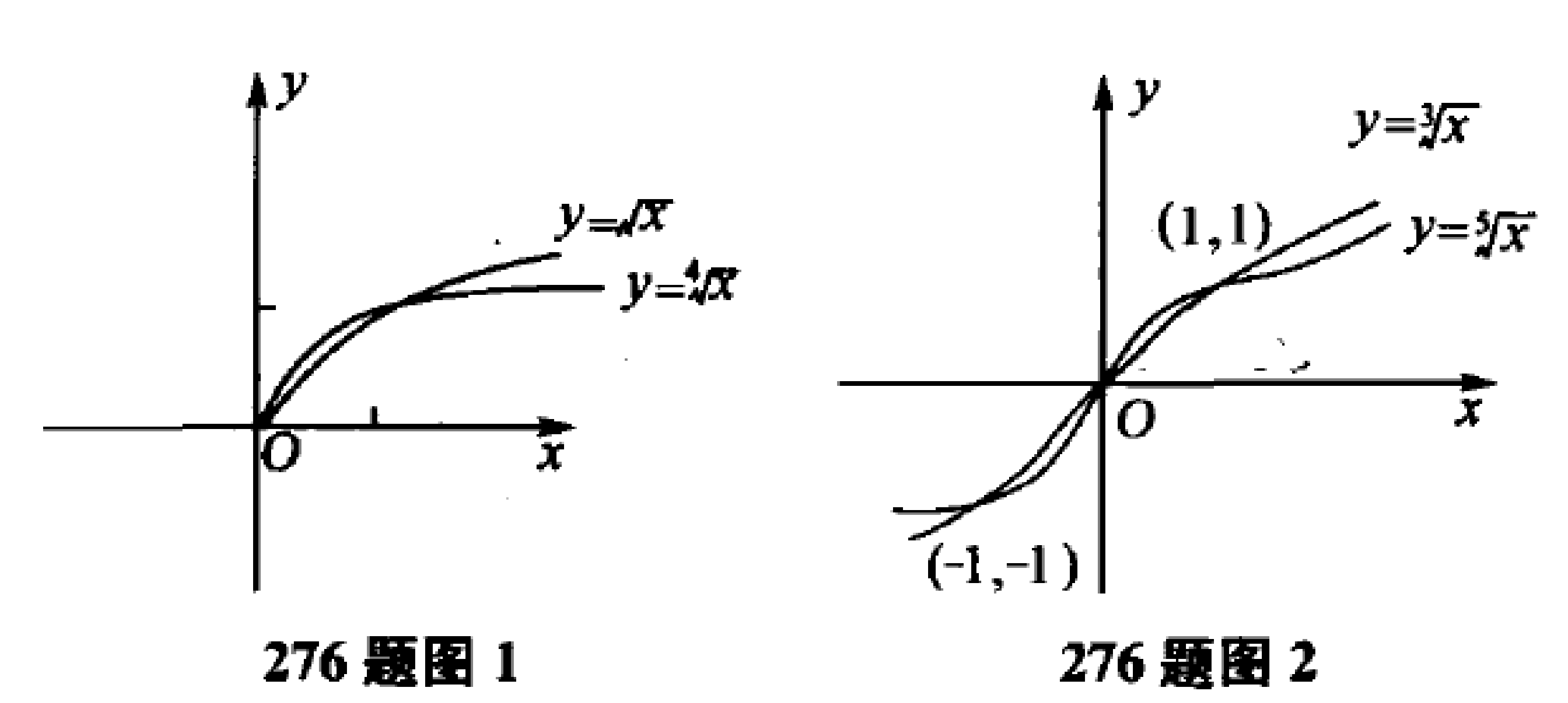
(2) 如 275 题图 2 所示.

$C: y = \frac{1}{x^2}, D: y = \frac{1}{x^4}$.

【276】 作出根式 $y = \sqrt[m]{x}$ 当:(1) $m = 2,4$;(2) $m = 3,5$ 时的图形.

解 (1) 如 276 题图 1 所示.

(2) 如 276 题图 2 所示.



276 题图 1　　276 题图 2

【277】 设

(1) $m = 2, k = 1$;　　(2) $m = 2, k = 3$;

(3) $m = 3, k = 1$;　　(4) $m = 3, k = 2$;

(5) $m = 3, k = 4$；　　(6) $m = 4, k = 2$；

(7) $m = 4, k = 3$.

作出根式 $y = \sqrt[m]{x^k}$ 的图形.

解　(1) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形，见 276 题图 1.

(2) $y = x\sqrt{x}$，见 277 题图.

(3) $y = \sqrt[3]{x}$，见 276 题图 2.

(4) $y = \sqrt[3]{x^2}$，见 277 题图.

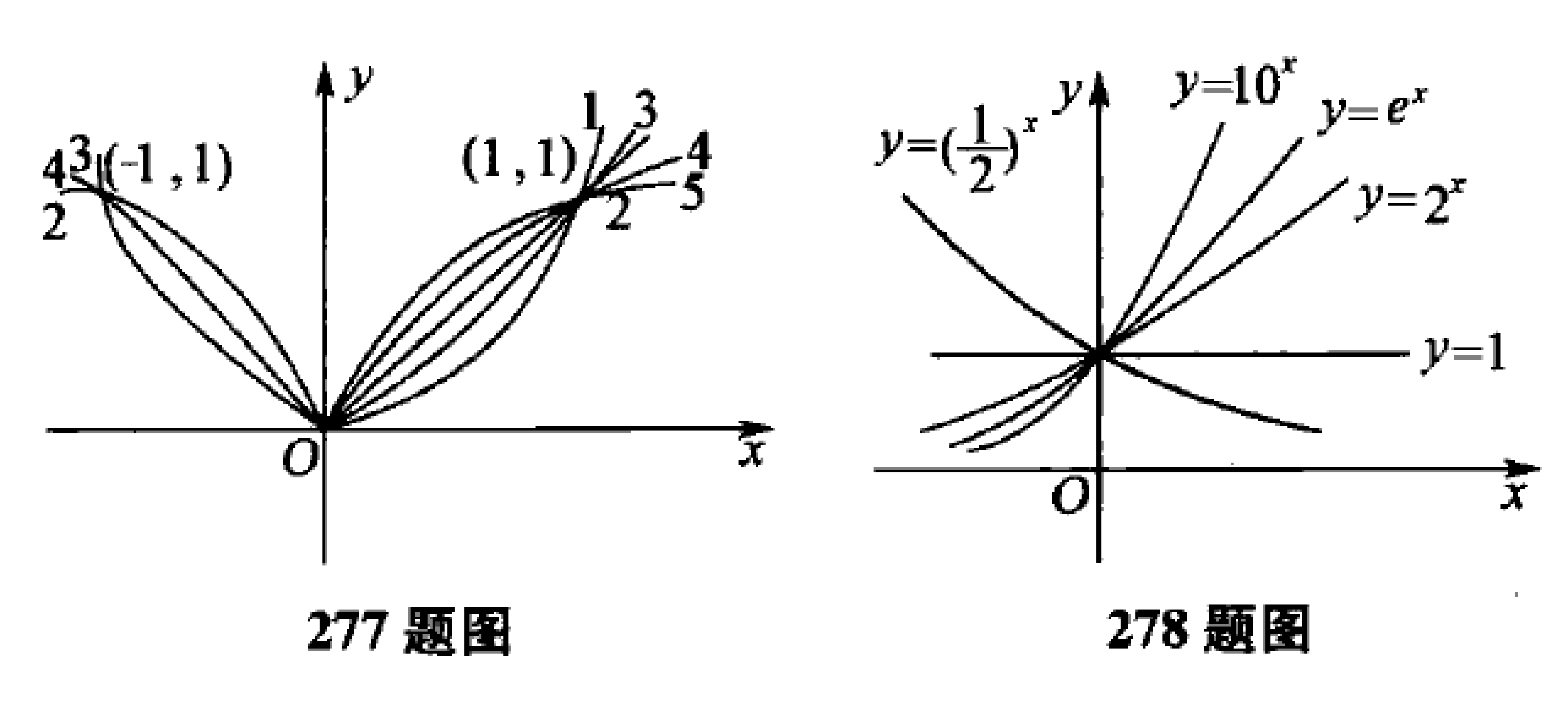
(5) $y = x\sqrt[3]{x}$，见 277 题图.

(6) $y = \sqrt{|x|}$，图形关于 Oy 轴对称，见 277 题图.

(7) $y = \sqrt[4]{x^3}$，见 277 题图.

【278】　作出指数函数 $y = a^x$，当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, \mathrm{e}, 10$ 时的图形.

解　如 278 题图所示.



277 题图　　278 题图

【279】　设

(1) $y_1 = x^2$；　　(2) $y_1 = -x^2$；

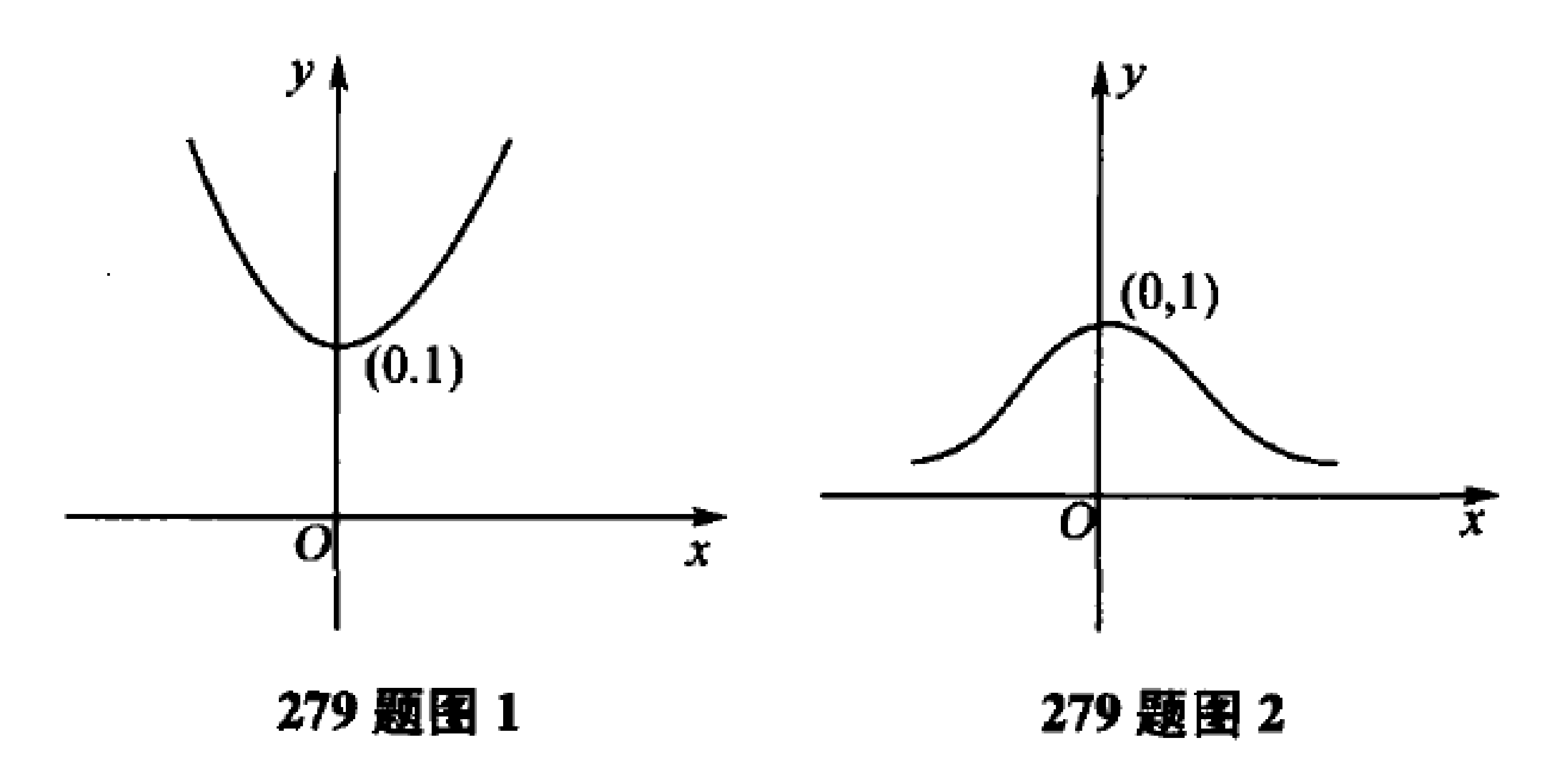
(3) $y_1 = \frac{1}{x}$；　　(4) $y_1 = \frac{1}{x^2}$；

(5) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$；　　(6) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

作出复合指数函数 $y = \mathrm{e}^{y_1}$ 的图形.

解　(1) 如 279 题图 1 所示.

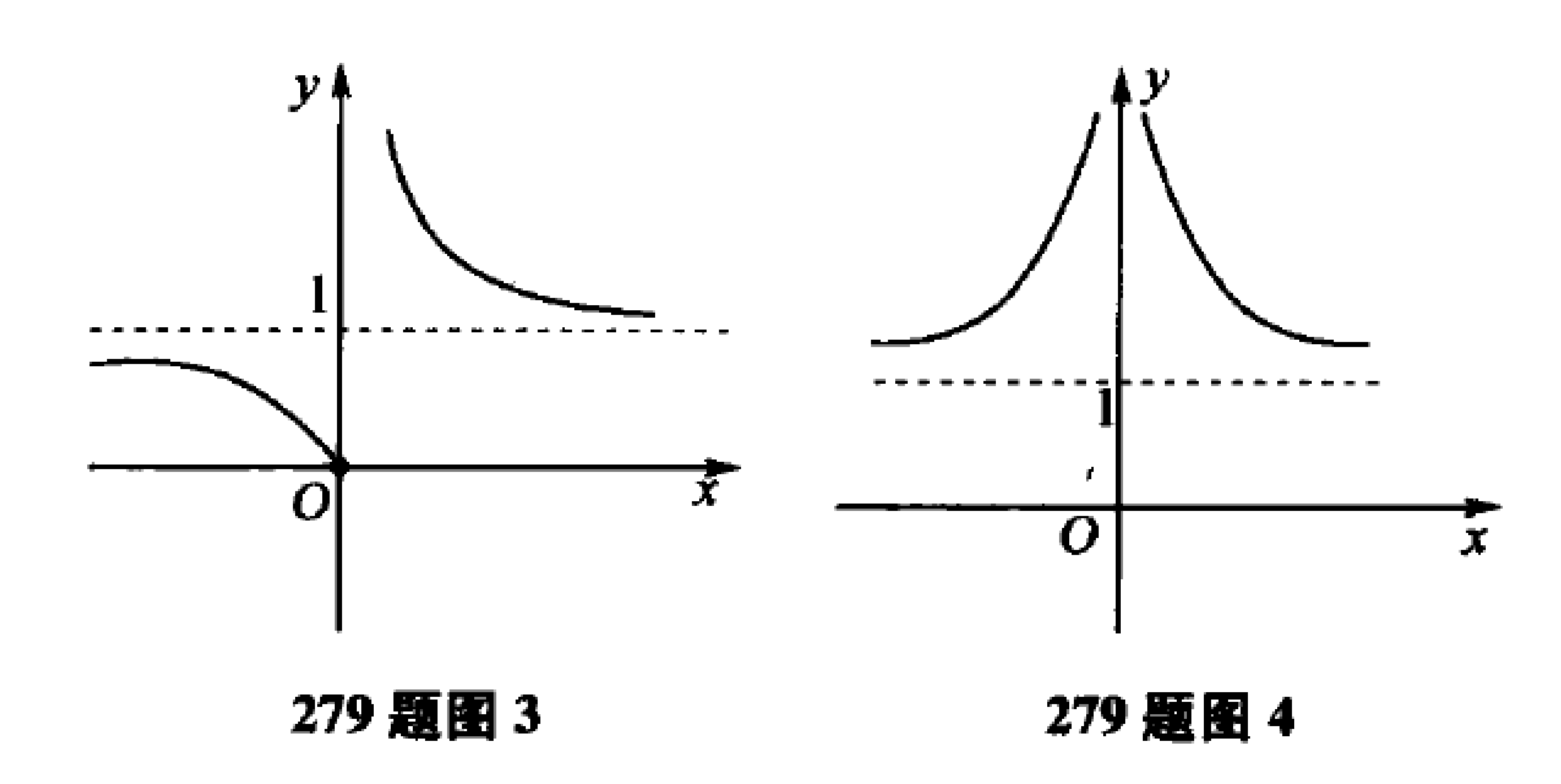
(2) 如 279 题图 2 所示.



279 题图 1　　279 题图 2

(3) 如 279 题图 3 所示.

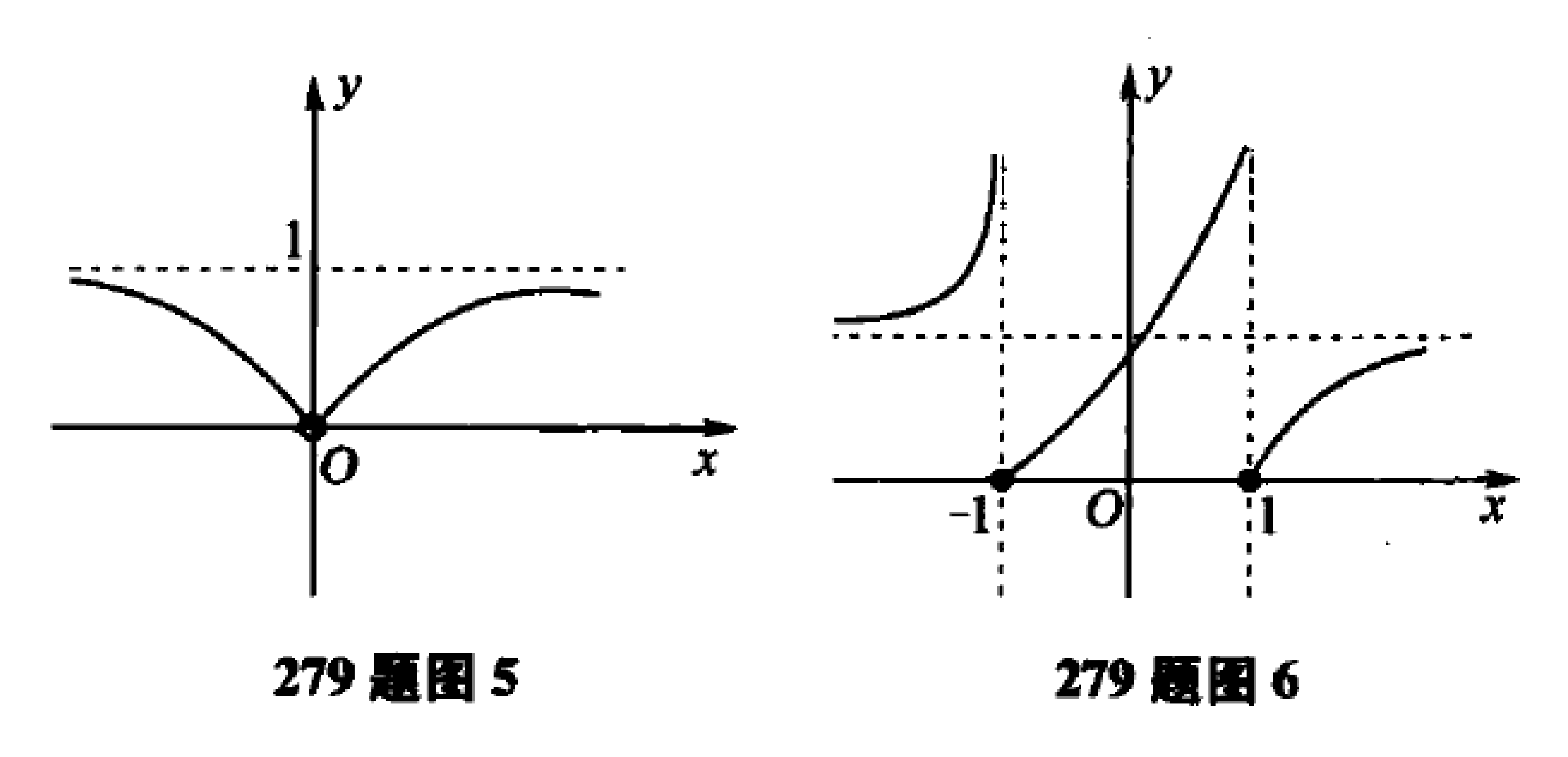
(4) 如 279 题图 4 所示.



279 题图 3　　279 题图 4

(5) 如 279 题图 5 所示.

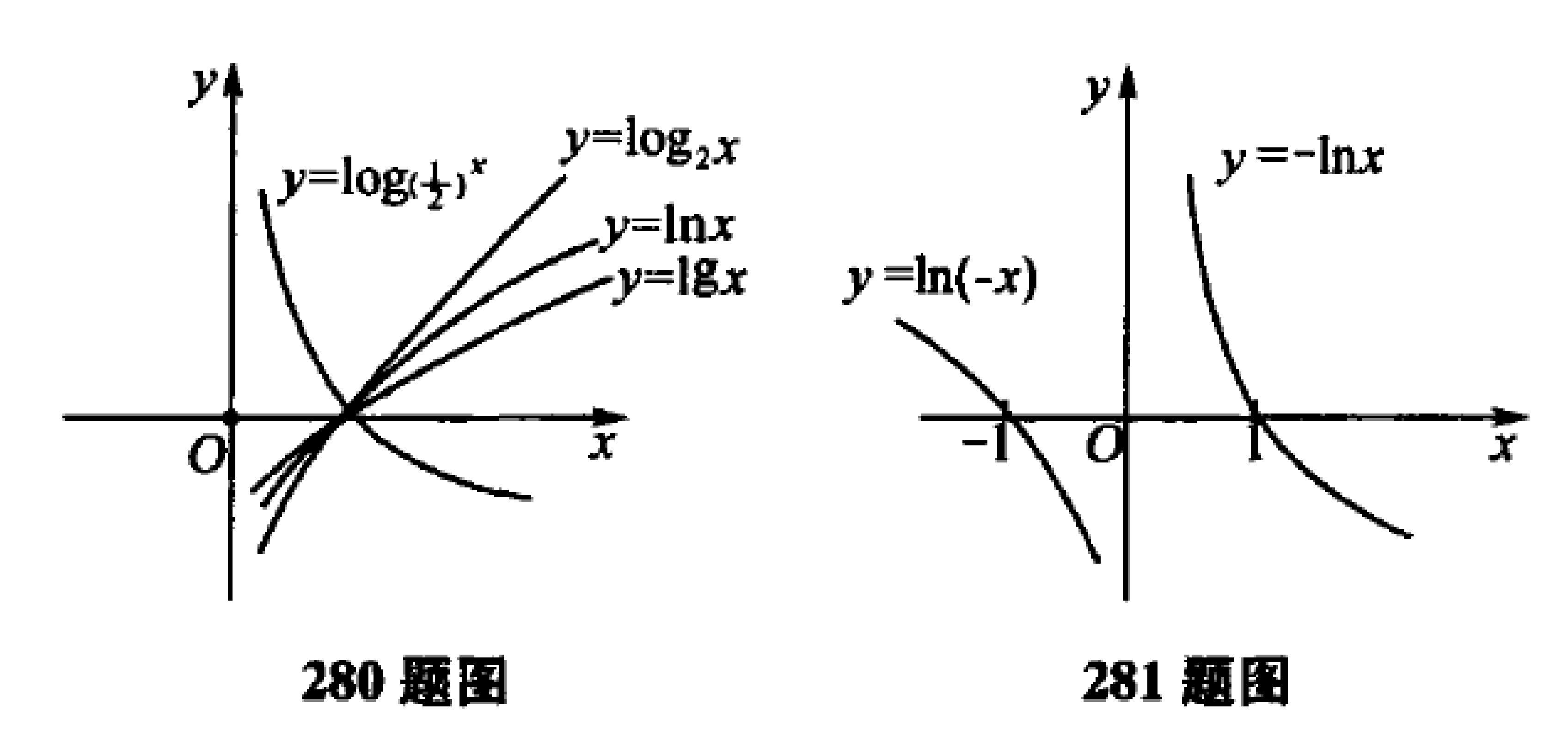
(6) 如 279 题图 6 所示.



279 题图 5　　279 题图 6

【280】 作出对数函数 $y=\log_a x$，当 $a=\frac{1}{2}$,2,e,10 时的图形.

解 如 280 题图所示.



280 题图　　281 题图

【281】 作出以下函数的图形

(1) $y=\ln(-x)$;　　(2) $y=-\ln x$.

解 如 281 题图所示.

【282】 作出复合对数函数 $y=\ln y_1$ 的图形，其中设

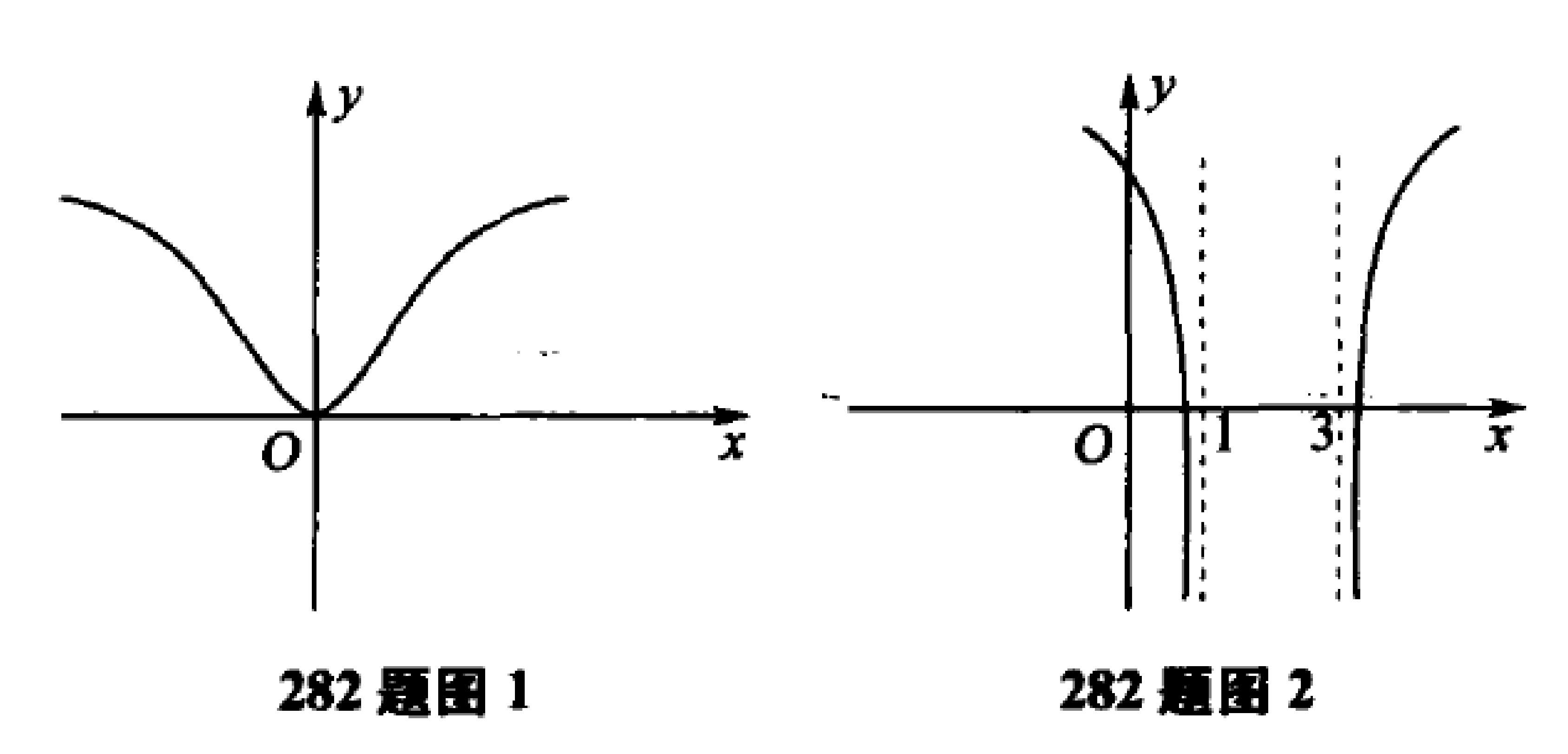
(1) $y_1=1+x^2$;

(2) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(3) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$;　(4) $y_1=\frac{1}{x^2}$;　(5) $y_1=1+e^x$.

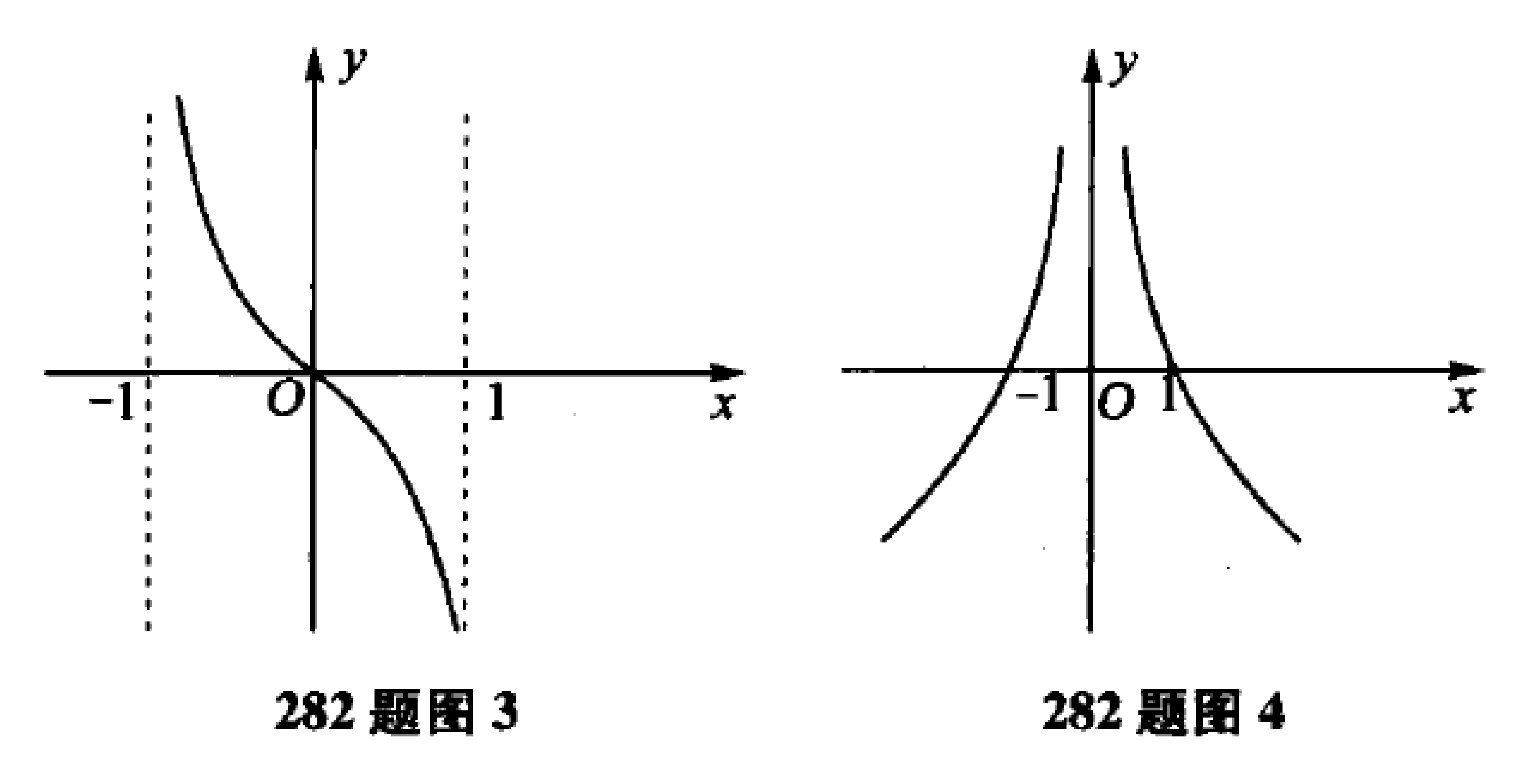
解 (1) 图形关 Oy 轴对称，如 282 题图 1 所示.

(2) 定义域为 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$，图形是 $y=\ln|x-1|$，$y=2\ln|x-2|$ 及 $y=3\ln|x-3|$ 的图形的叠加，如 282 题图 2 所示.



282 题图 1　　282 题图 2

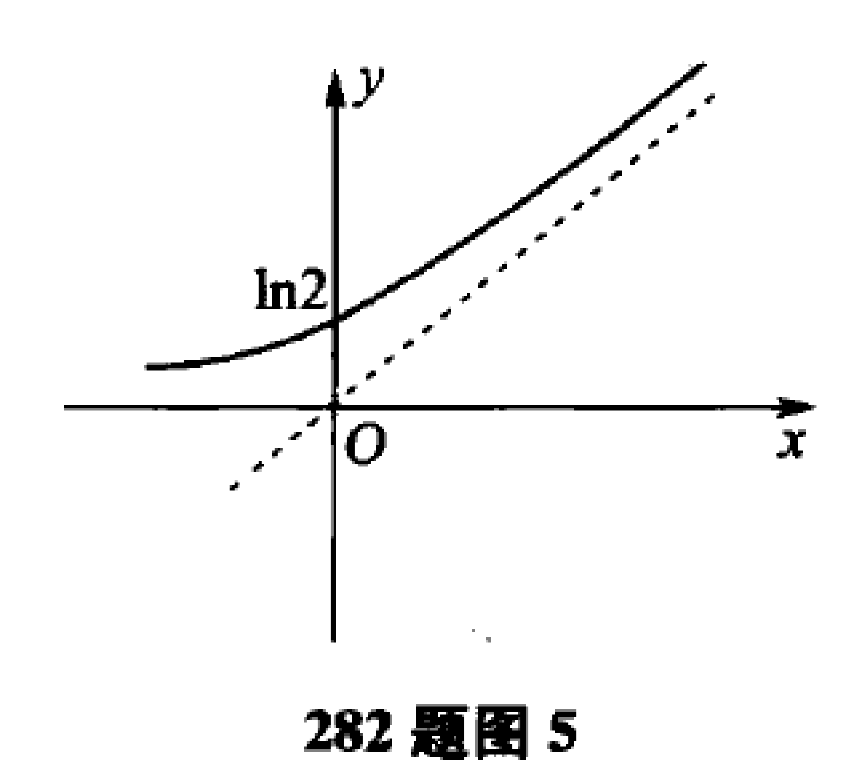
(3) 定义域为$(-1,1)$，当$x=0$时，$y=0$，$x=1$，$x=-1$为渐近线，如图282题图3.



282 题图 3　　　　282 题图 4

(4) 定义域为$x\neq 0$，图形关于Oy轴对称，当$x=\pm 1$时，$y=0$，如282题图4所示.

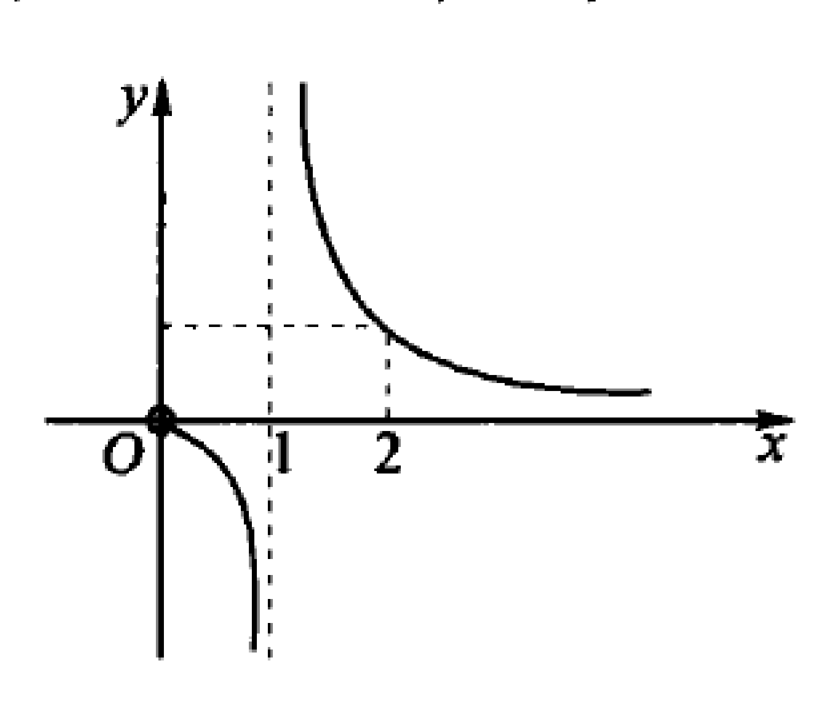
(5) 如282题图5所示.



282 题图 5

【283】 作出出函数$y=\log_x 2$的图形.

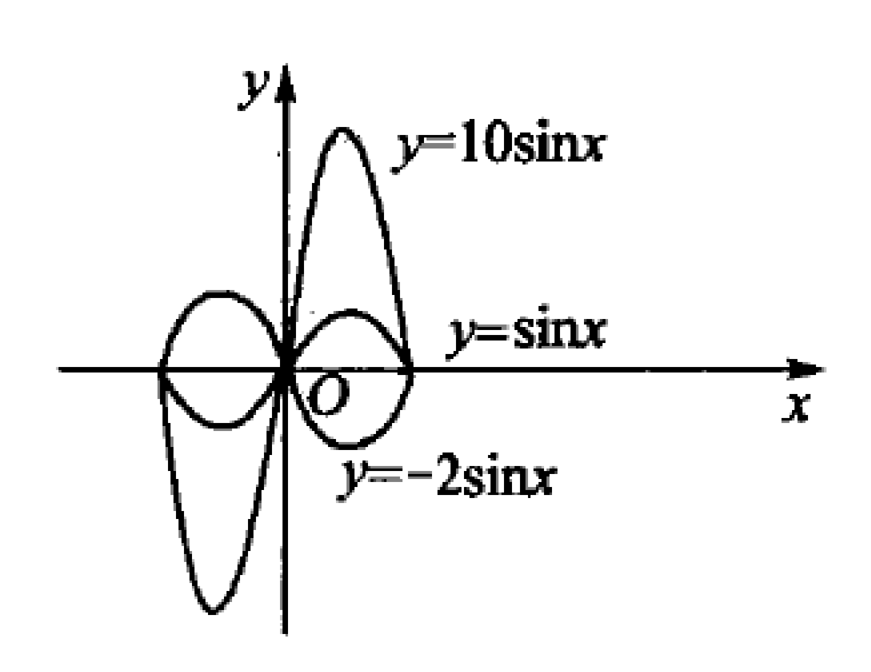
解　定义域为$x>0$，且$x\neq 1$，如283题图所示.



283 题图

【284】 作出函数 $y=A\sin x$ 的图形(当 $A=1,10,-2$ 时).

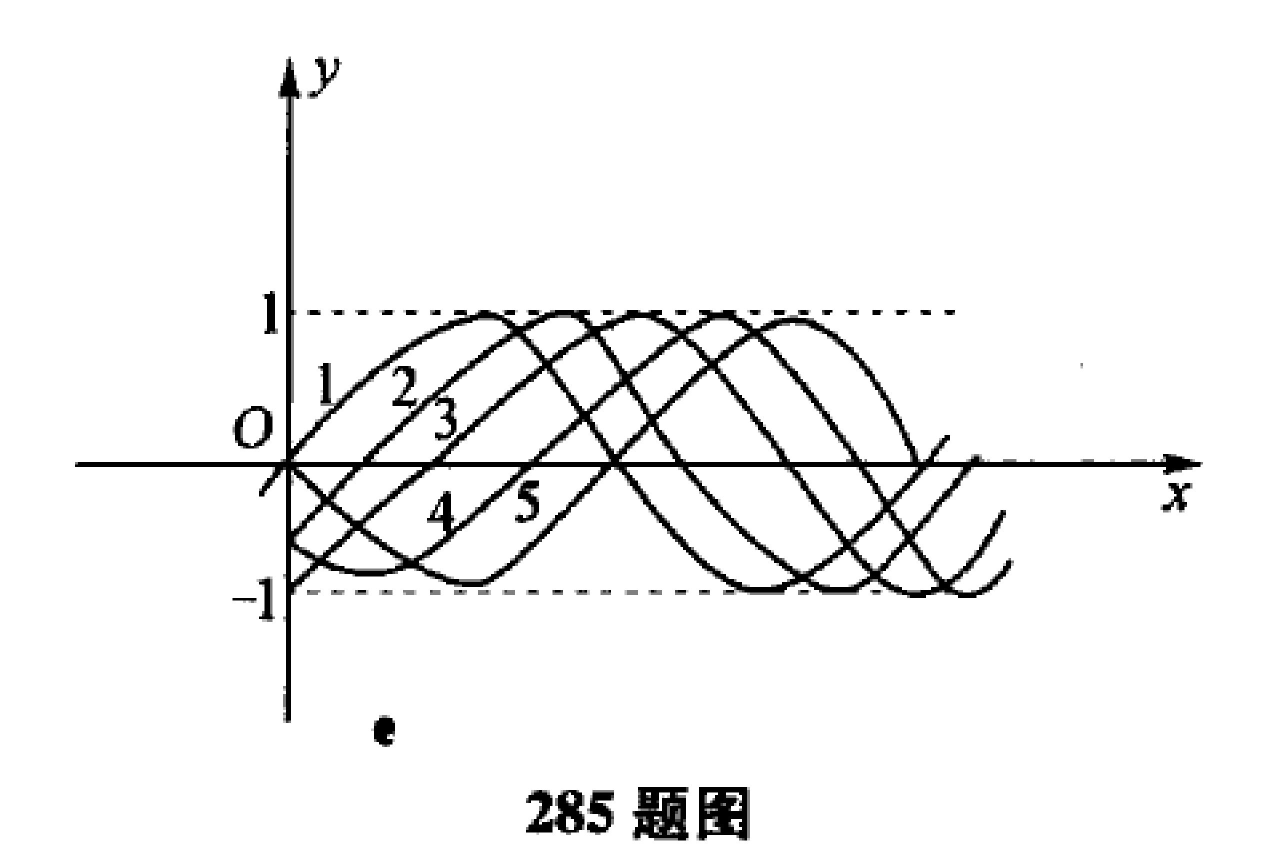
解 如 284 题图所示.



284 题图

【285】 若 $x_0=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$,作出函数 $y=\sin(x-x_0)$ 的图形.

解 将 $y=\sin x$ 的图形向右平移 $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$ 即得所有图形,如 285 题图所示.



285 题图

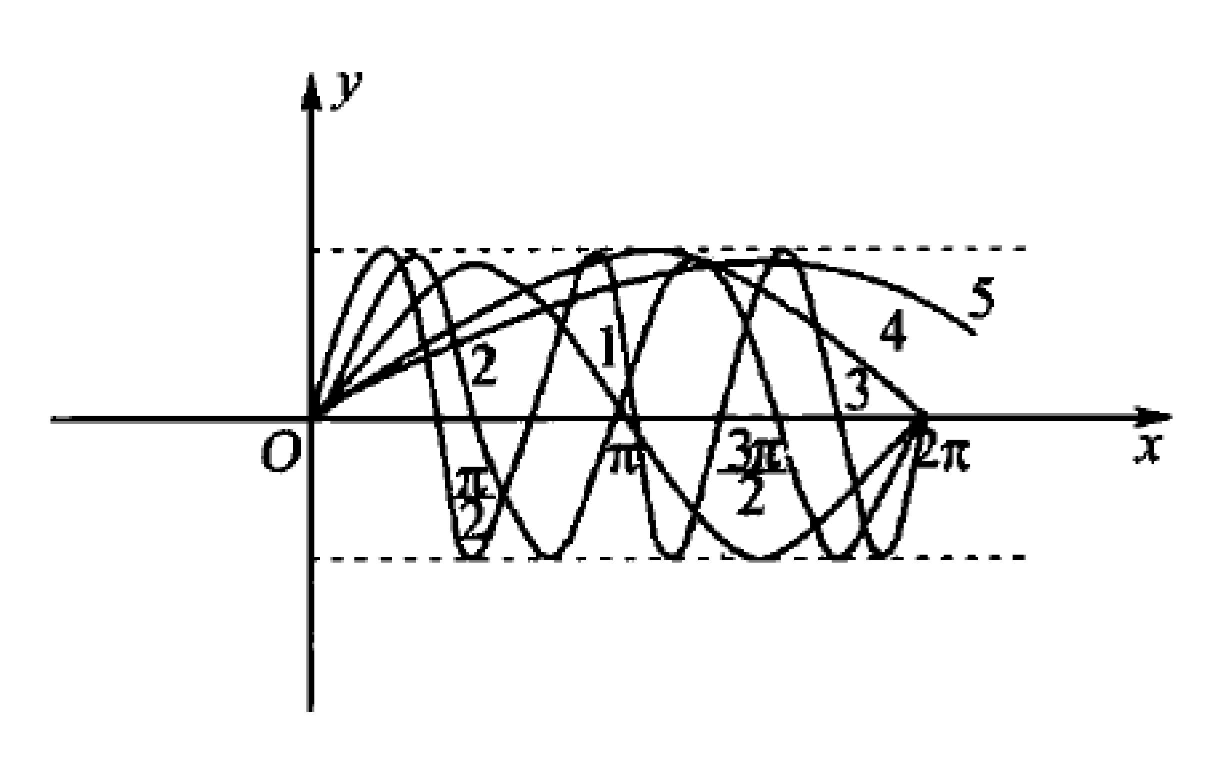
(1) $y=\sin x$; (2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; (4) $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$;

(5) $y=\sin(x-\pi)$.

【286】 若 $n=1,2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 时,作出函数 $y=\sin nx$ 的图形.

解 如 286 题图所示.



286 题图

(1) $y=\sin x$;　　(2) $y=\sin 2x$;

(3) $y=\sin 3x$;　　(4) $y=\sin\frac{1}{2}x$;

(5) $y=\sin\frac{1}{3}x$.

【287】 将函数 $y=a\cos x+b\sin x$ 化为下式的形式:

$$y=A\sin(x-x_0)$$

再作出其图形. 研究下例: $y=6\cos x+8\sin x$.

解 $y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$.

由于 $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1, \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1,$

且 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$

故设 $\sin x_0=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},$

$$\cos x_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad ①$$

于是 $y=A\sin(x-x_0)$,

其中 $A=\sqrt{a^2+b^2}$ $(a^2+b^2\neq 0)$, x_0 适合 ① 式.

我们可以这样作 $y=A\sin(x-x_0)$ 的图形: 先把正弦曲线 y

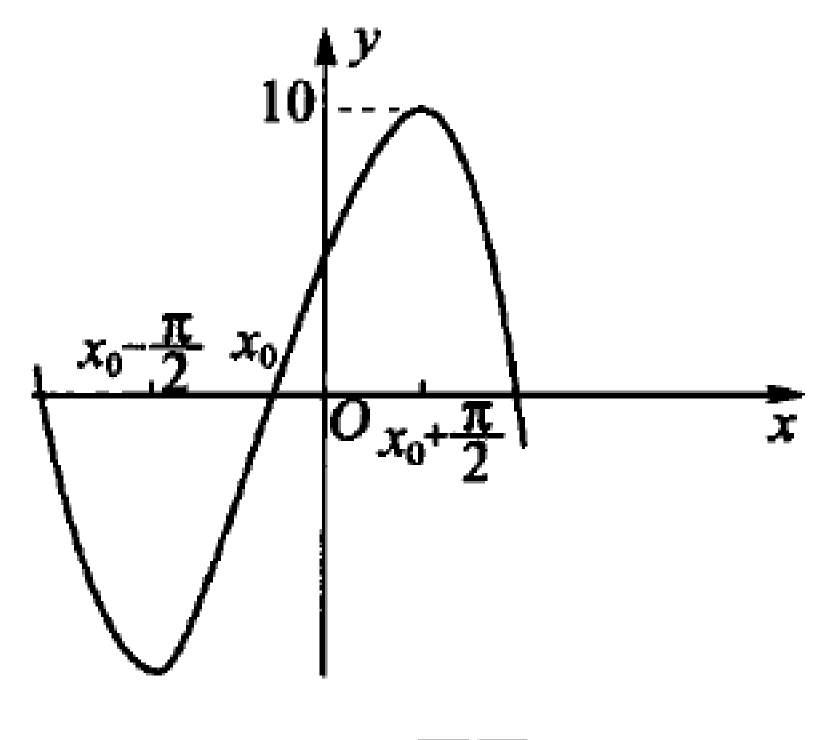
$=\sin x$ 沿 Ox 轴平移 $|x_0|$ 个单位(若 $x_0>0$,则向右平移;若 $x_0<0$,则向左平移),然后再从纵轴方向拉长 A 倍(若 $A<1$,则压缩 $\frac{1}{A}$ 倍).

对于 $$y=6\cos x+8\sin x, A=\sqrt{6^2+8^2}=10,$$

$$\sin x_0=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}, \cos x_0=\frac{4}{5},$$

则 $$x_0=-\arctan\frac{3}{4}.$$

图形如 287 题图所示.



287 题图

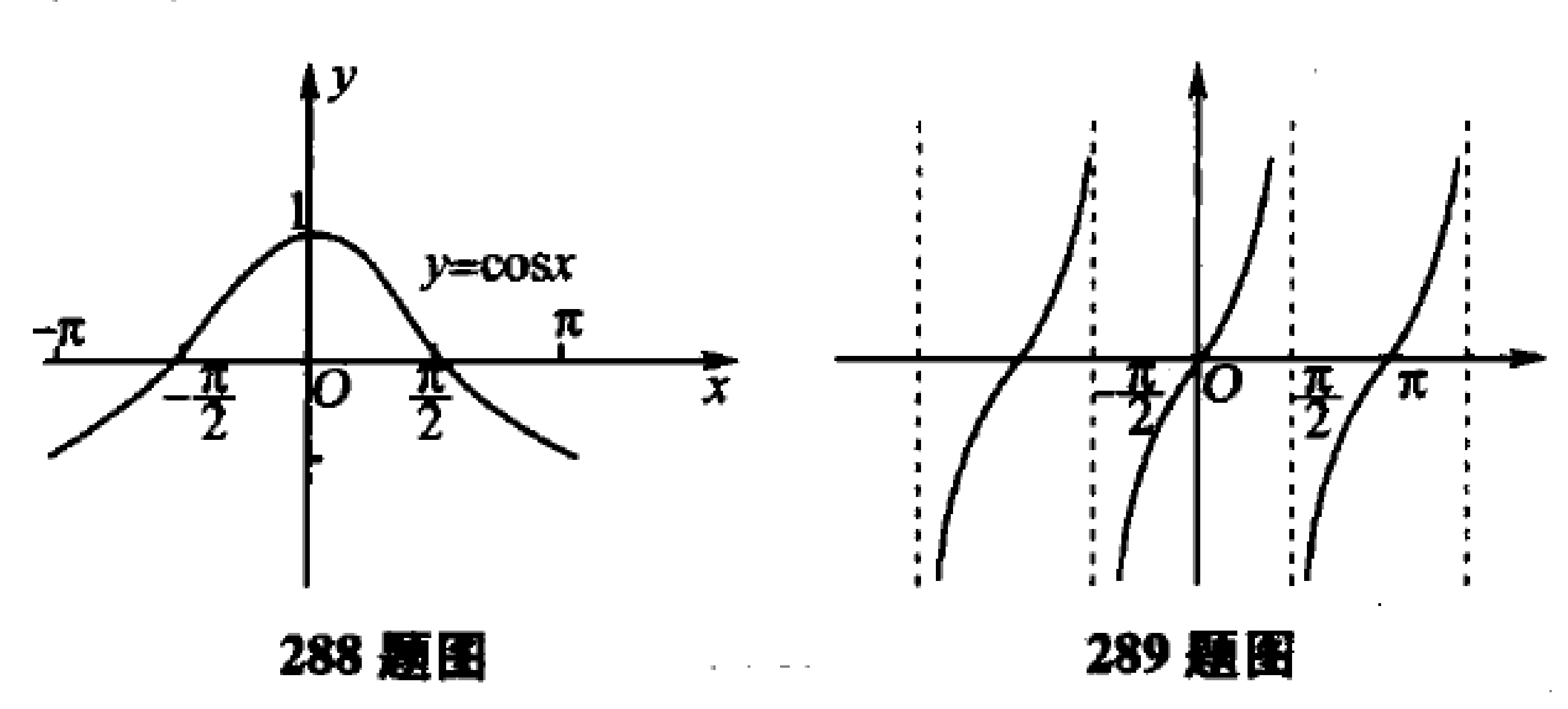
作出以下三角函数的图形(288 ~ 297).

【288】 $y=\cos x$.

解 如 288 题图所示.

【289】 $y=\tan x$.

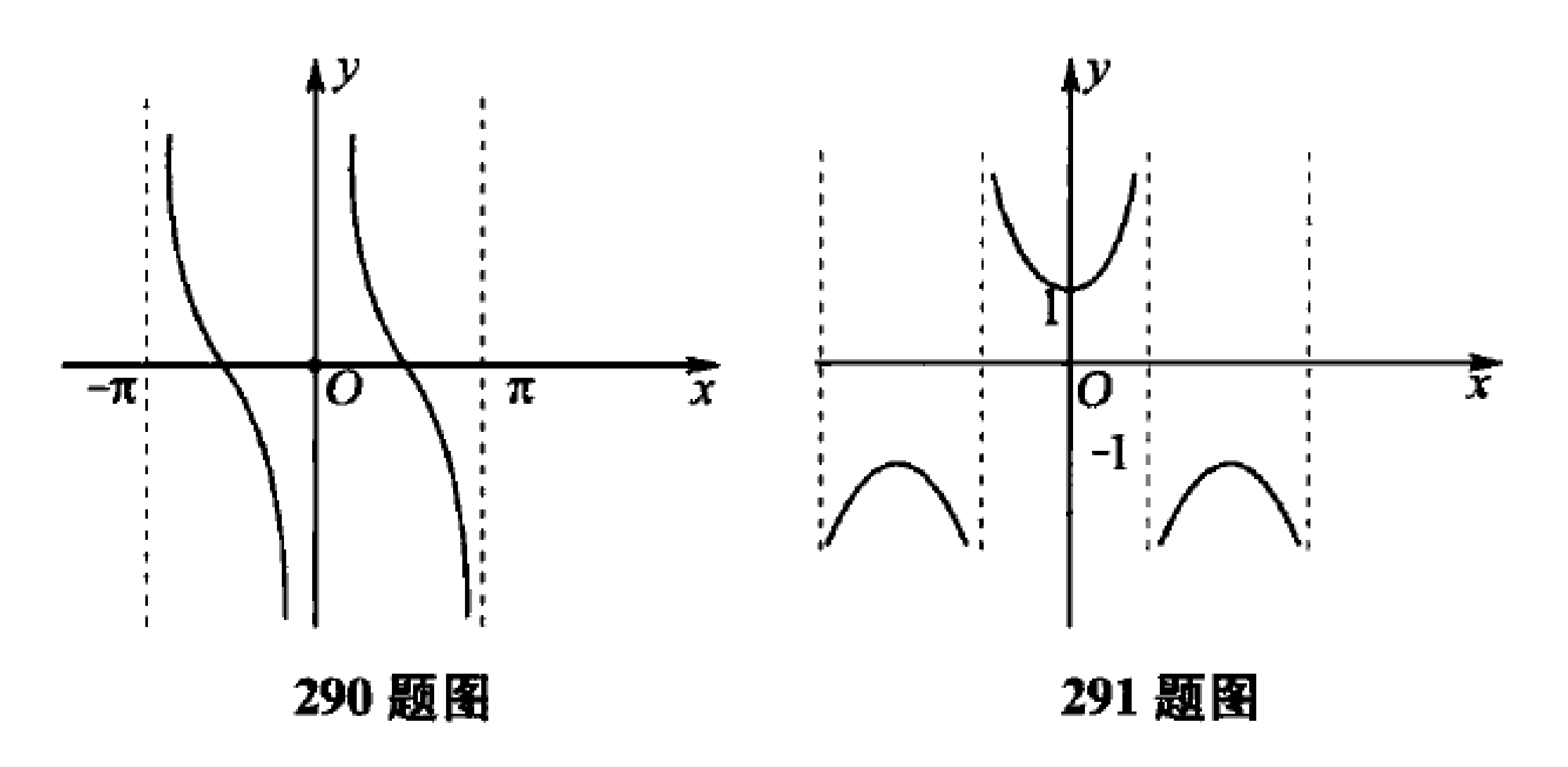
解 如 289 题图所示.



288 题图 289 题图

【290】 $y=\cot x$.

解 如 290 题图所示.



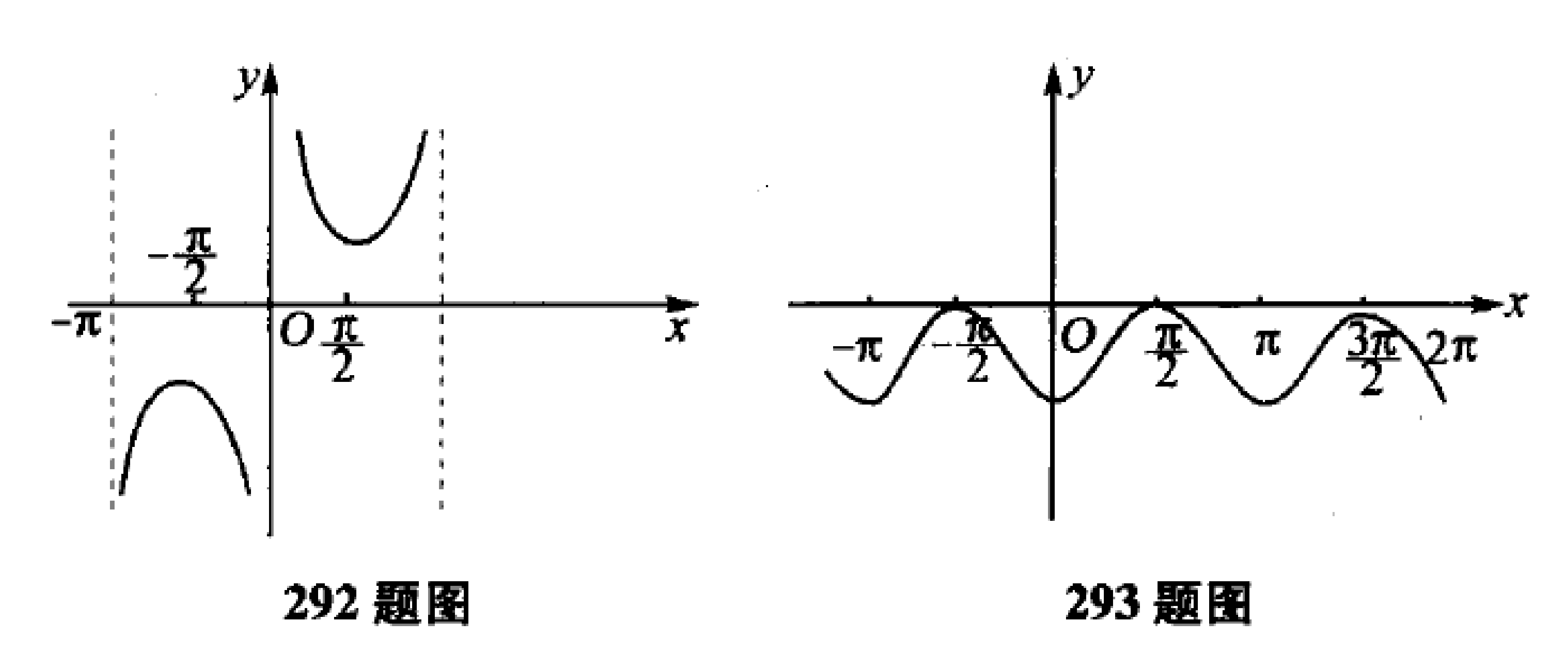
290 题图　　291 题图

【291】 $y=\sec x$.

解 如 291 题图所示.

【292】 $y=\csc x$.

解 如 292 题图所示.



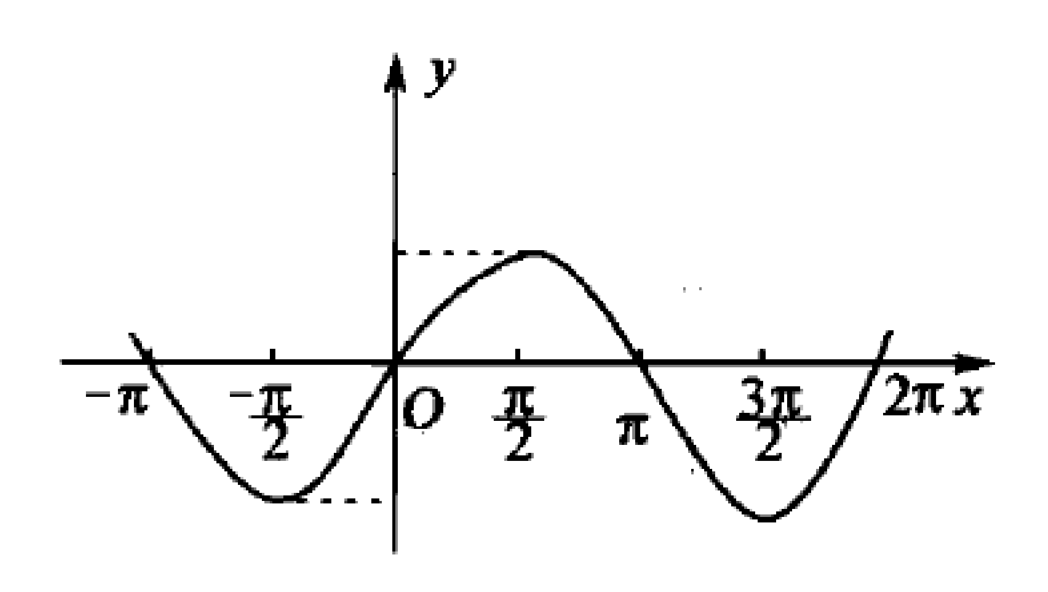
292 题图　　293 题图

【293】 $y=\sin^2 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称，且 $y\geqslant 0$，如 293 题图所示.

【294】 $y=\sin^3 x$.

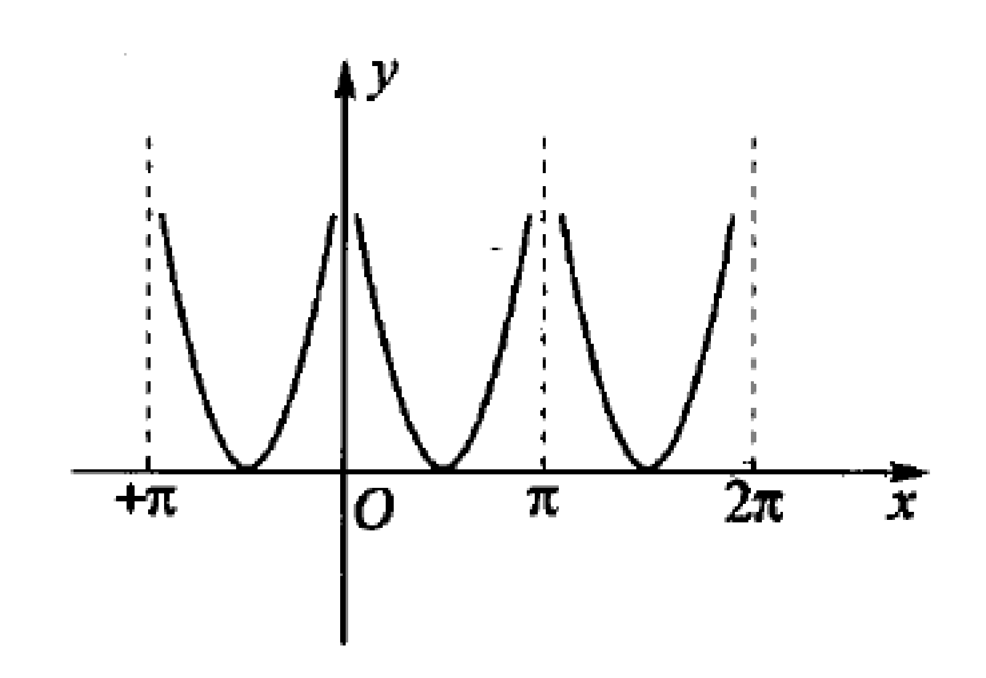
解 如 294 题图所示.



294 题图

【295】 $y=\cot^2 x$.

解　如 295 题图所示.

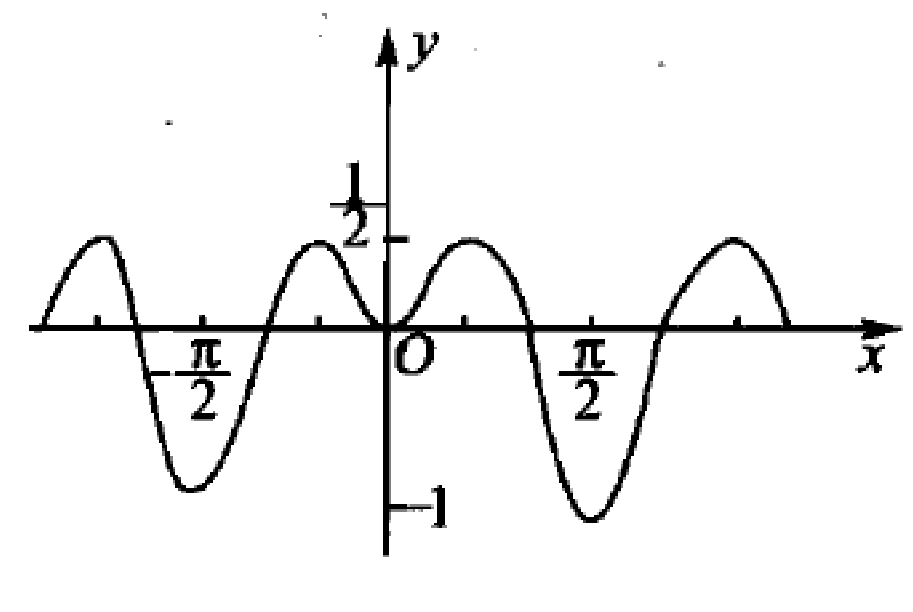


295 题图

【296】 $y=\sin x\cdot\sin 3x$.

解　$y=\sin x\cdot\sin 3x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x$,

图形关于 Oy 轴对称,将 $y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y=-\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图形叠加即得所需的图形,如 296 题图所示.



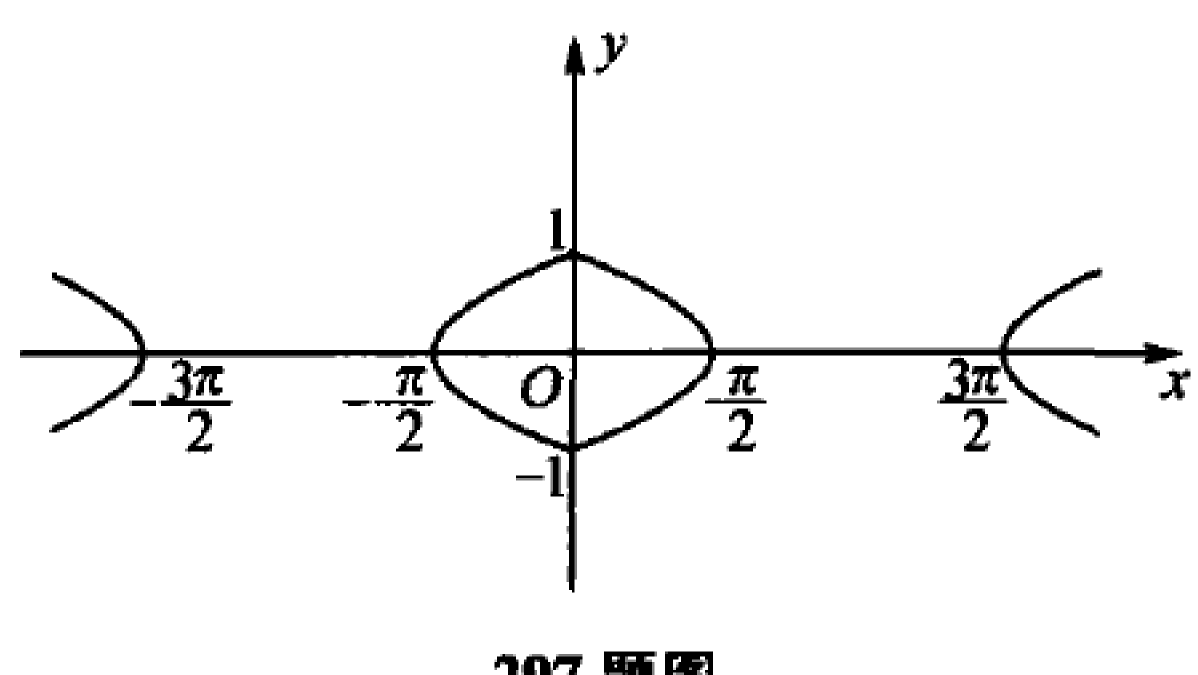
296 题图

【297】 $y=\pm\sqrt{\cos x}$.

解 函数的定义为

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}\qquad (k=0,\pm 1,\cdots),$$

函数是偶函数,且以 2π 为周期的周期函数. 所以图形关于 Oy 轴对称,如 297 题图所示.



297 题图

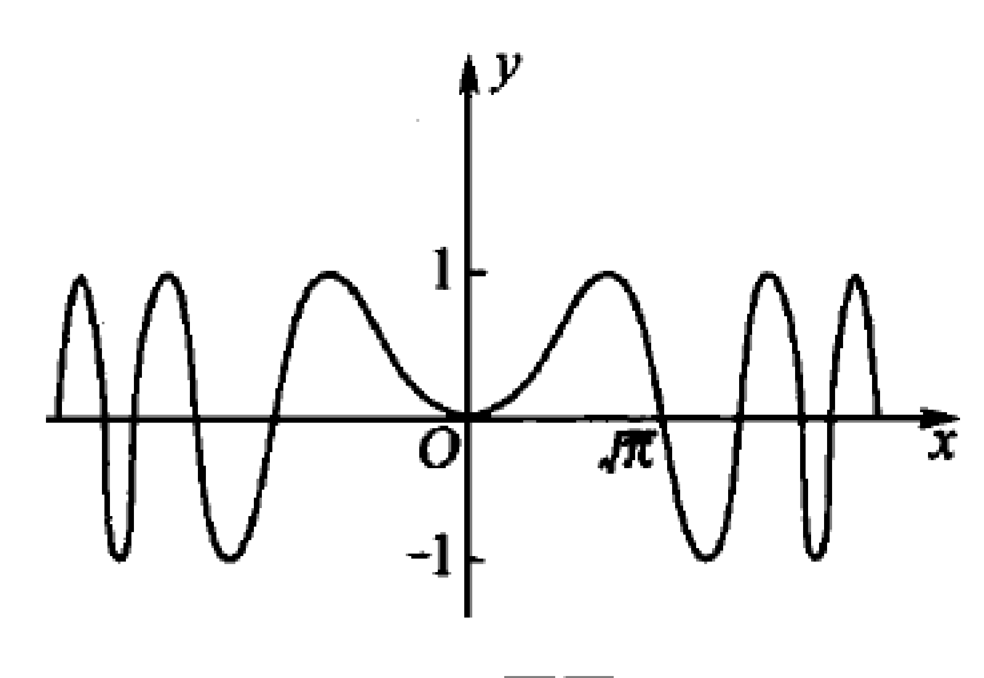
作出以下函数的图形(298 ~ 310).

【298】 $y=\sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称,又 $f(\pm\sqrt{n\pi})=0$,

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0$,

故,曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成序列的极根为 0,如 298 题图所示.



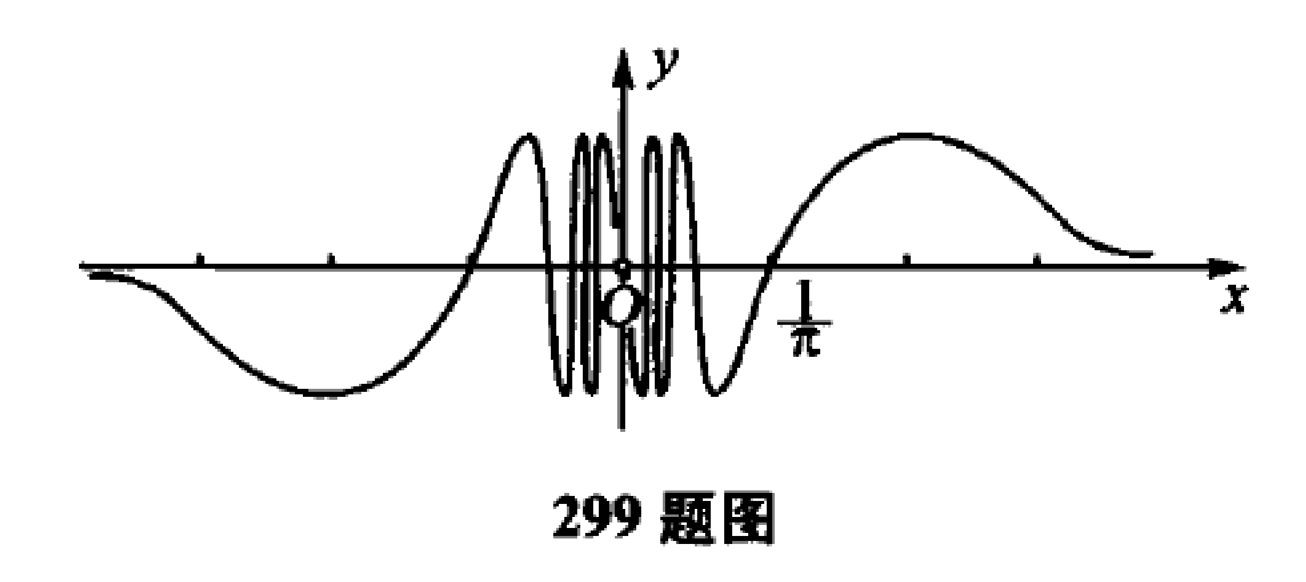
298 题图

【299】 $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $-1\leqslant y\leqslant 1$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y=0$,$y=0$ 为渐近线. 函数为奇函

数，故图形关于原点对称.

当 x 由 $+\infty$ 减少到 $\frac{2}{\pi}$ 时，$\frac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$，所以 y 由 0 变到 1，当 x 由 $\frac{2}{\pi}$ 减小到 $\frac{2}{3\pi}$ 时，则 $\frac{1}{x}$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$，y 由 1 减少到 -1，当 $x = \frac{1}{\pi}$ 时，$y = 0$. 总之，当 x 无限接近 0 时，函数在 -1 与 1 之间摆动，并且凝聚于 0 点，而在 $x = 0$ 点函数没有定义，如 299 题图所示.



299 题图

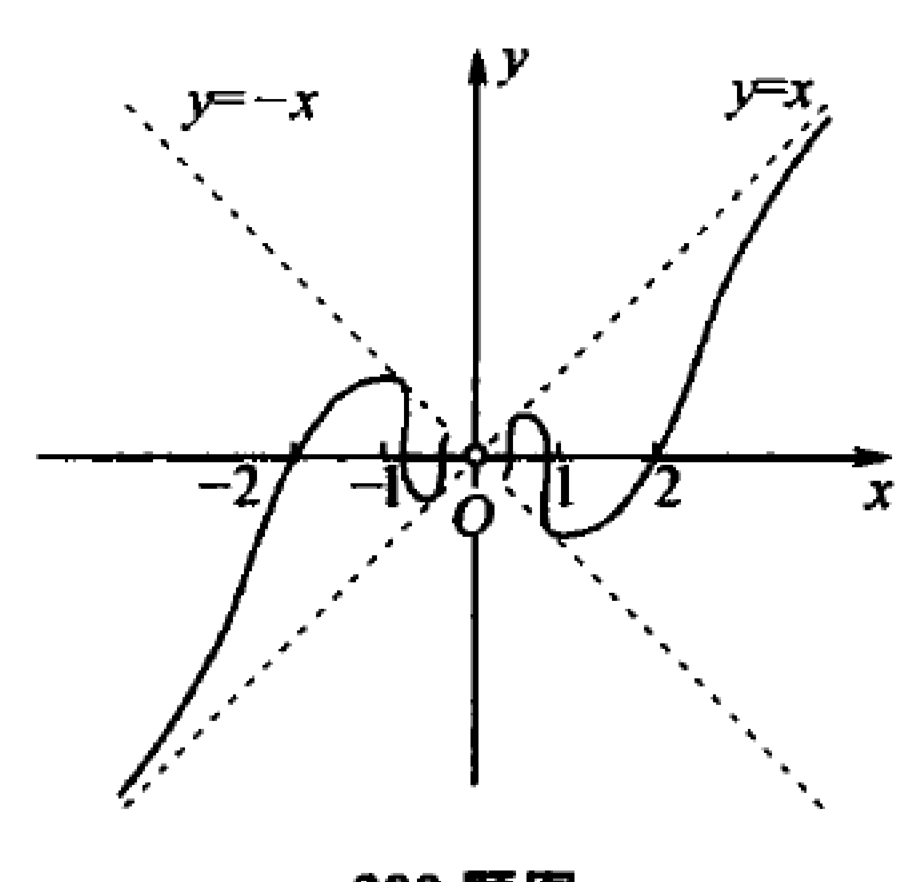
【300】 $y = \cos\frac{\pi}{x}$.

解　$-x \leqslant y \leqslant x$，$\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$，

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 时，$y = 0$. 函数是奇函数，图形关于坐标原点对称. 而在点 $x = 0$，函数 y 没有定义.

当 $x > 2$ 时，y 单调增加.

当 x 无限接近 O 时，函数作无限次衰减摆动，并凝聚于 O 点. 如 300 题图所示



300 题图

【300.1】 $y=\sin x$； $\sin\frac{1}{x}$.

解 见 286 题图及 299 题图.

【301】 $y=\tan\frac{\pi}{x}$.

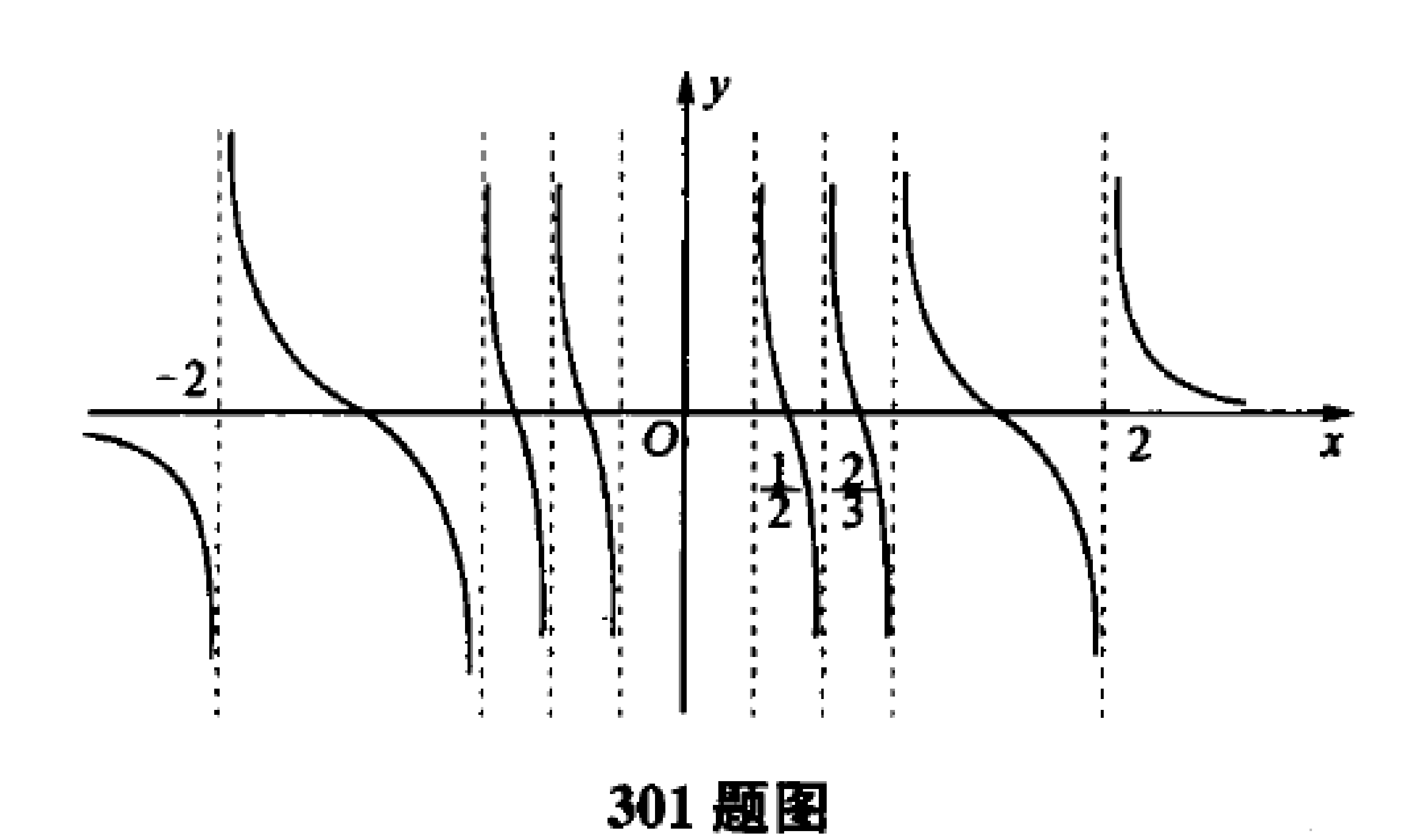
解 函数为奇函数,图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\frac{1}{k}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时, $y=0$.

当 $x=0$ 及 $x=\frac{2}{2k+1}$ 时,函数没有定义.

直线 $x=0$ 及 $x=\frac{2}{2k+1}(k=0,\pm 1,\cdots)$ 及图形的渐近线. 图形凝聚于 O 点.

当 $x>0$ 时, $y>0$,且 $y\to 0(x\to+\infty)$, $y=0$ 为图形的渐近线,如 301 题图所示.



301 题图

【301.1】 $y=\sec\frac{1}{x}$.

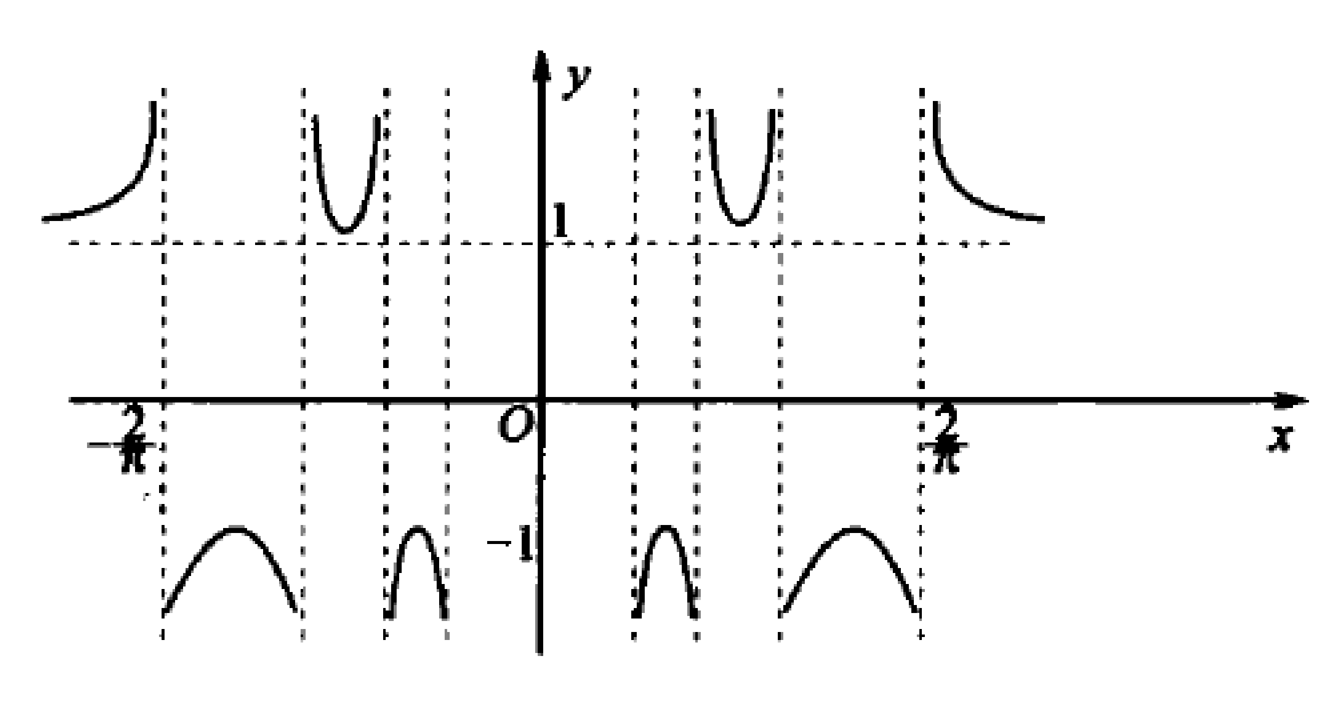
解 图形关于 Oy 轴对称,且 $|y|\geqslant 1$,当

$$x=\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

时,函数没有定义.

$$x=\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

为图形的渐近线. 当 x 由 $+\infty$ 变到 $\frac{2}{\pi}$ 时, $\frac{1}{x}$ 由 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$, y 由 1 增加至 $+\infty$. 且 $y\to 1$(当 $x\to+\infty$ 时), 所以 $y=1$ 为图形的渐近线, 如 301.1 图所示.



301.1 题图

【302】 $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.

解 先考虑 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形, 因为 y 为偶函数, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=(-1)^k x$;

当 $x=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=0$;

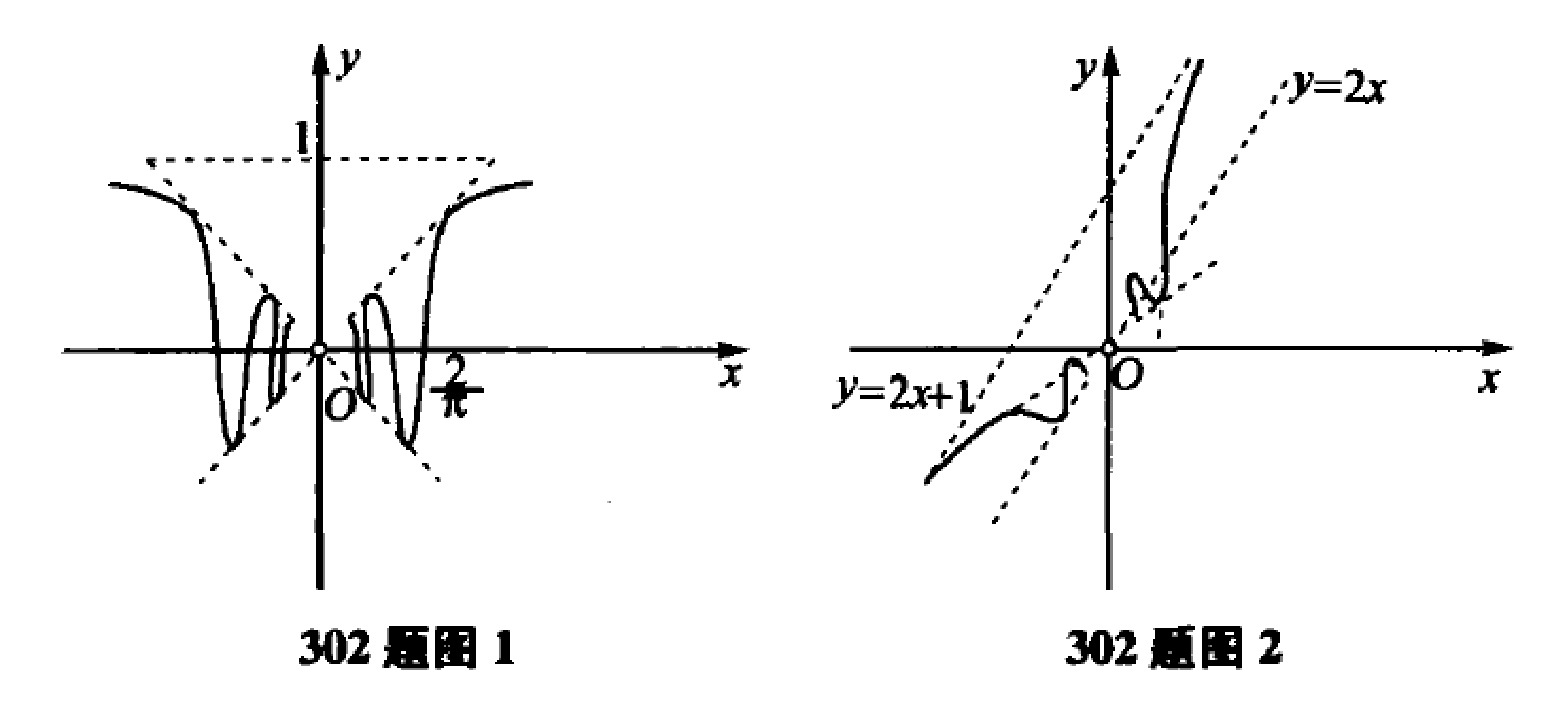
当 $x>\frac{2}{\pi}$ 时, y 单调增加, 且有

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

所以 $y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ 的图形如 302 题图 1 所示.

将 $y = 2x$ 及 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形叠加，

即得 $y = x\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$的图形，如 302 题图 2 所示.



302 题图 1　　　　302 题图 2

【303】 $y = \pm\sqrt{1 - x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$.

解　图形关于原点及 Ox 轴，Oy 轴均对称. 定义域为

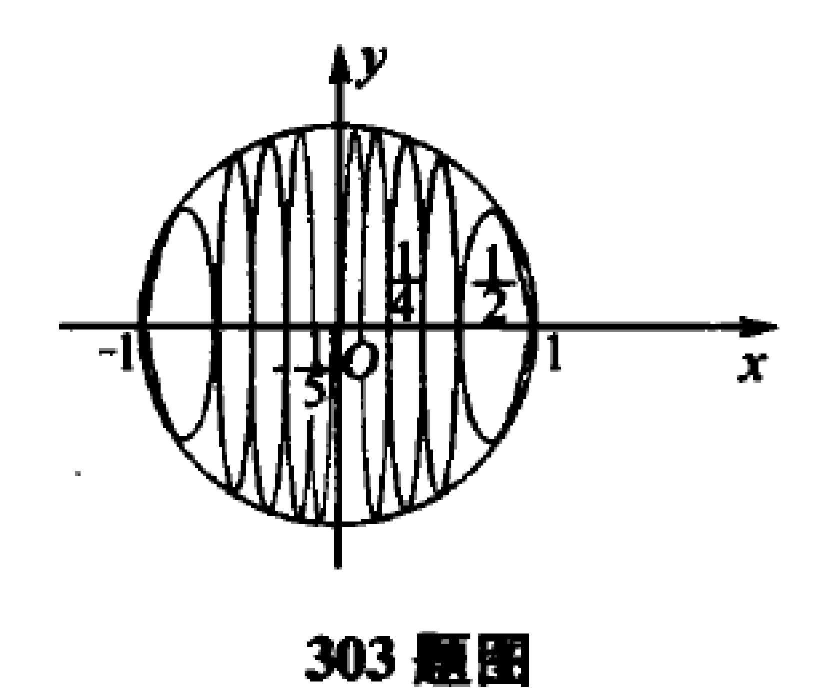
$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \qquad (x \neq 0)$$

且 $$-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},$$

故图形位于圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内，且当

$$x = \frac{1}{k}\ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

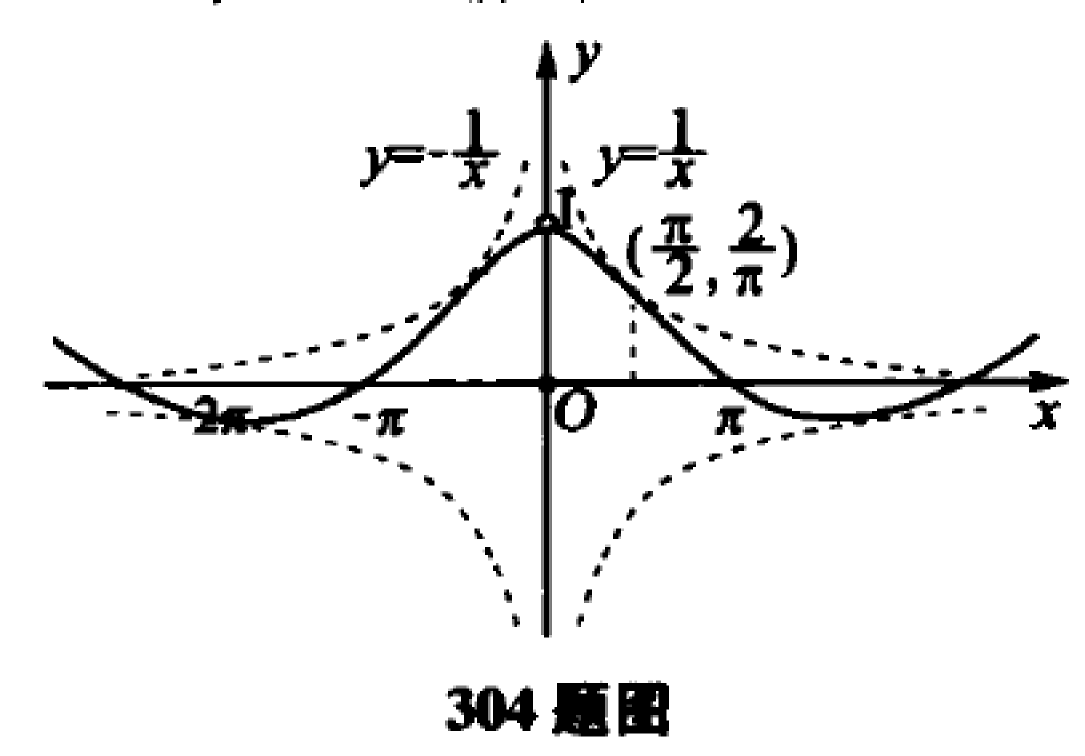
时，$y = 0$，如 303 题图所示.



303 题图

【304】 $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

解　图形关于 Oy 轴对称. 且 $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, 由于 $|y| \leqslant \left|\dfrac{1}{x}\right|$, 故图形位于 $y = \dfrac{1}{x}$ 及 $y = -\dfrac{1}{x}$ 之间, 当 $x = k\pi$ 时, $y = 0(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 如 304 题图所示



304 题图

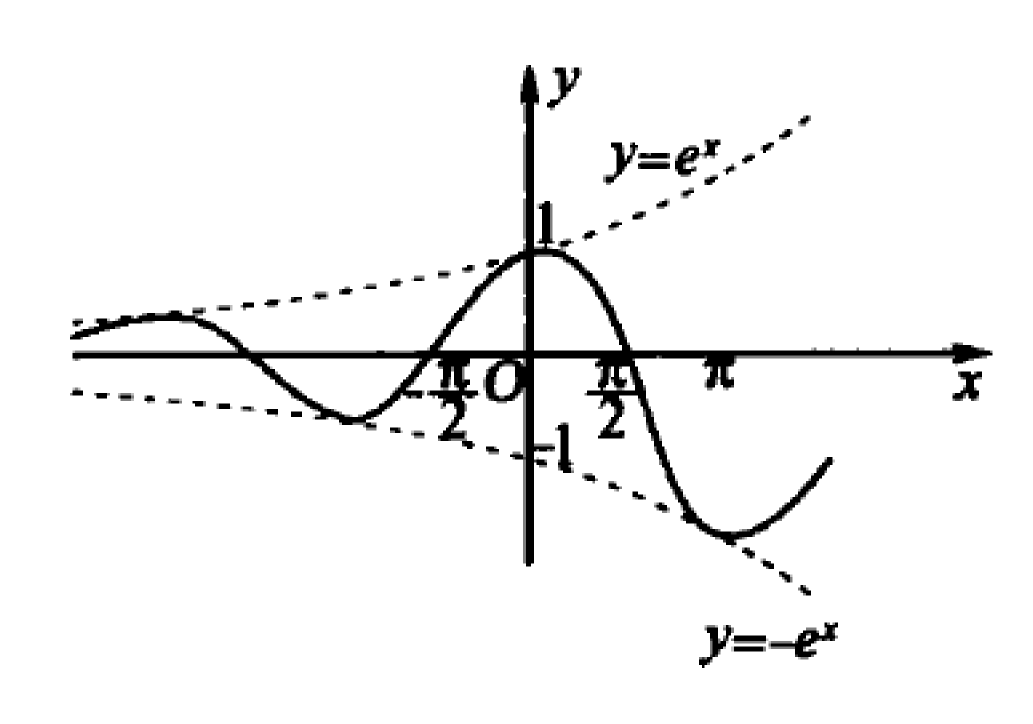
【305】　$y = e^x \cos x$.

解　由 $-e^x \leqslant y \leqslant e^x$, 故图形夹在 $y = e^x$ 及 $y = -e^x$ 之间.

当 $x = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时, $y = 0$.

当 $x = 2k\pi(k = 0, \pm 1\cdots)$ 时, $y = e^x$.

当 $x = (2k+1)\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时, $y = -e^x$, 如 305 题图所示.



305 题图

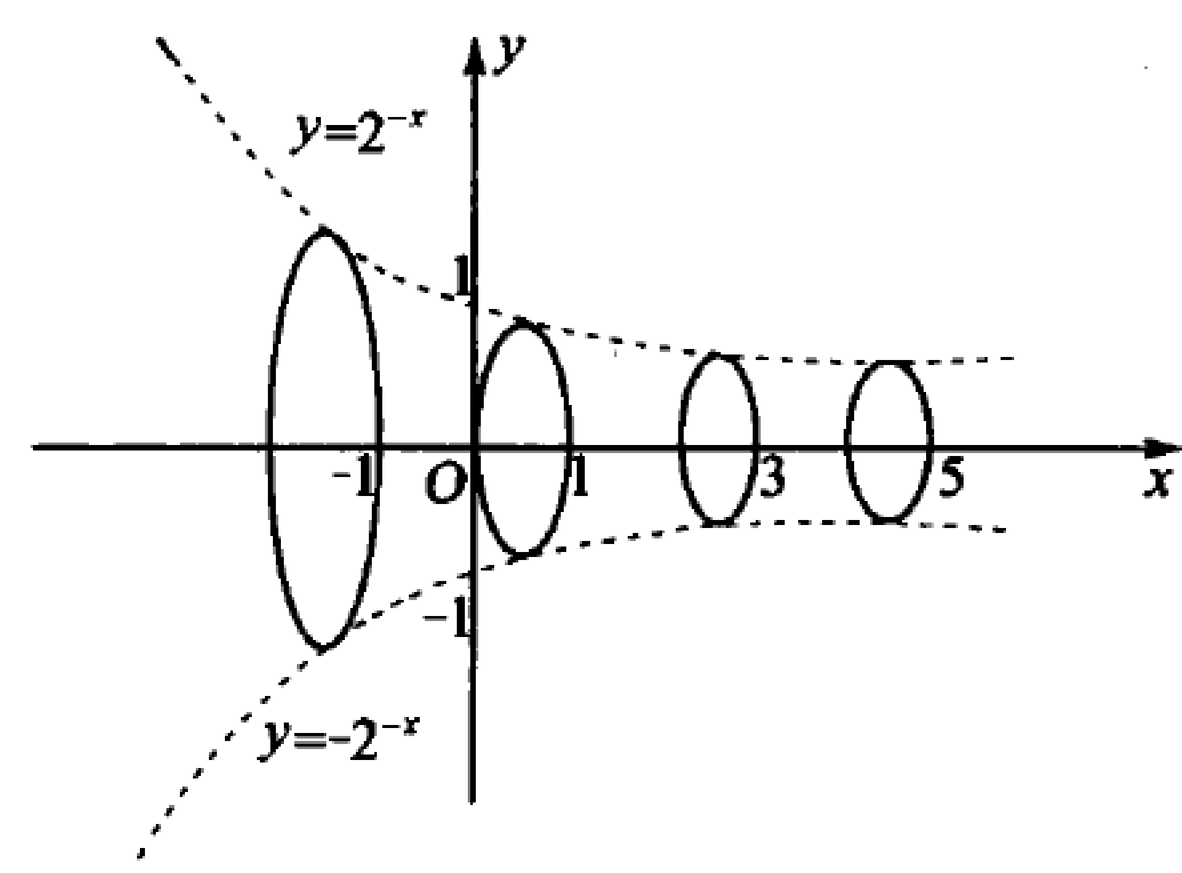
【306】　$y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

解　函数的定义域为

$$2k \leqslant x \leqslant (2k+1) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

且 $-2^{-x} \leqslant y \leqslant 2^{-x}$. 即函数的图形位于 $y = -2^{-x}$ 与 $y = 2^{-x}$ 之间

当 $x=k$ 时，$y=0$. 当 $x=2k+\frac{1}{2}$ 时，$y=\pm 2^{-x}$，如 306 题图所示.



306 题图

【307】 $y=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

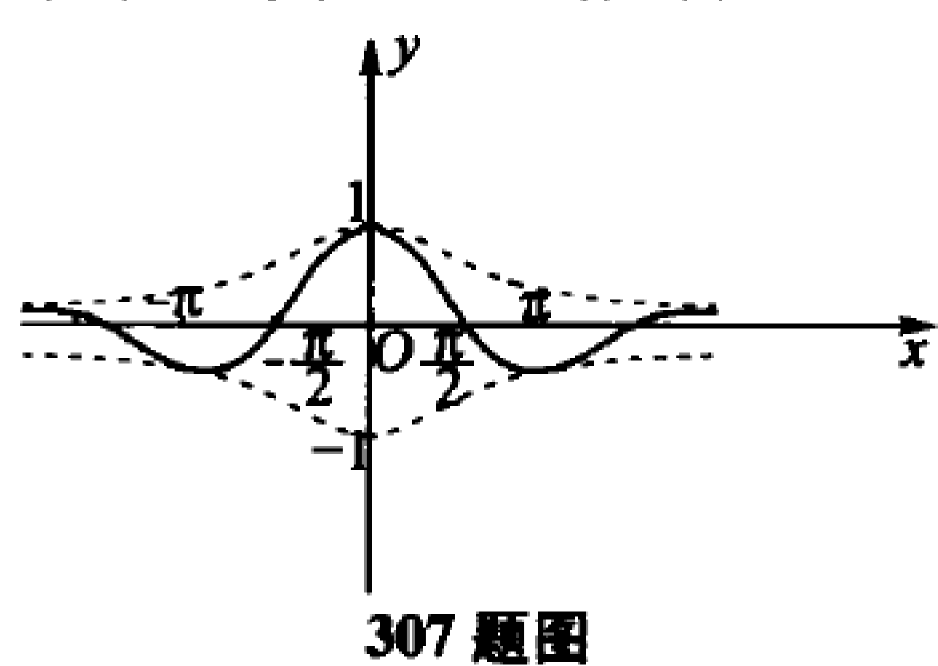
解 图形关于 Oy 轴对称. 又 $-\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$，图形位于 $y=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 及 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 之间.

当 $x=k\pi+\frac{1}{2}\pi$ 时，$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ $y=0$.

当 $x=2k\pi$ 时，$(k=0,\pm 1,\cdots)$ $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

当 $x=(2k+1)\pi$ 时，$(k=0,\pm 1,\cdots)$ $y=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

且 $y=0$ 为图形的渐近线，如 307 题图所示.



307 题图

【308】 $y = \ln(\cos x)$.

解　函数的定义域为

$$\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

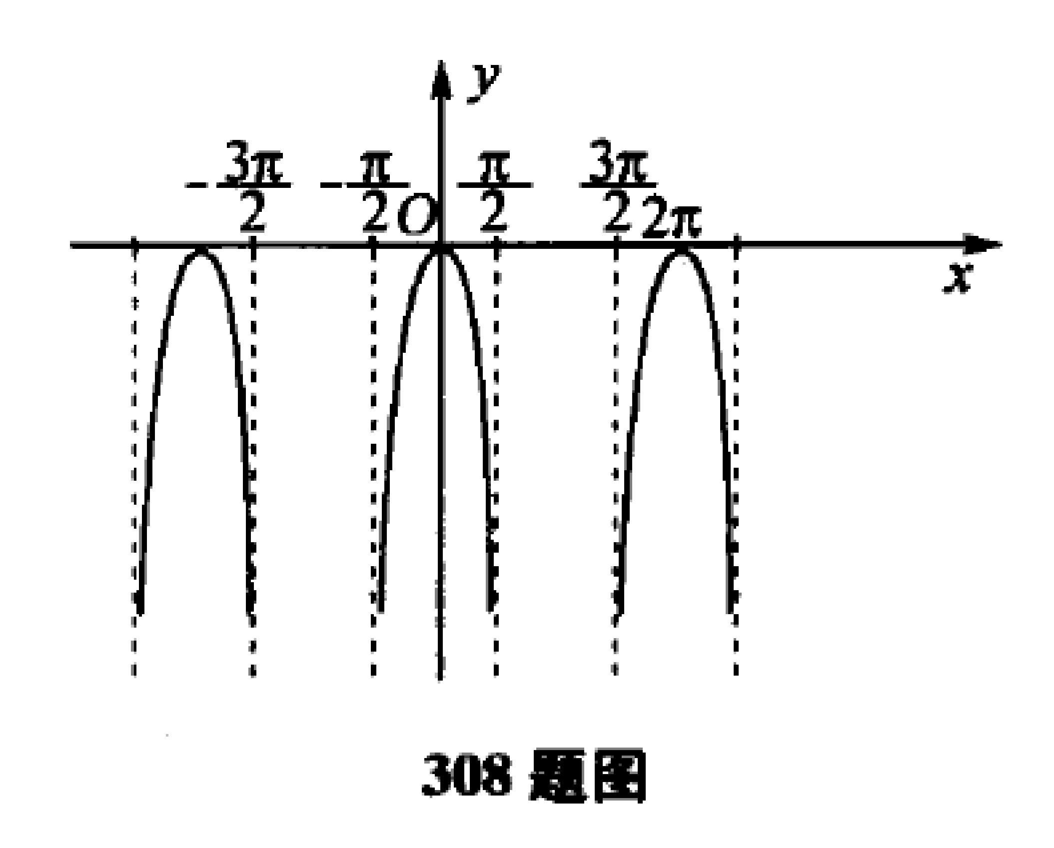
且函数是 2π 为周期的周期函数

在区间$(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内，y 单调增加，且 $y < 0$.

在区间$(0, \frac{\pi}{2})$ 内，y 单调减少，且 $y < 0$.

最大值为 $\ln\cos 0 = 0$.

$x = \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi$ 为图形的渐近线，如 308 题图所示.



308 题图

【309】 $y = \cos(\ln x)$.

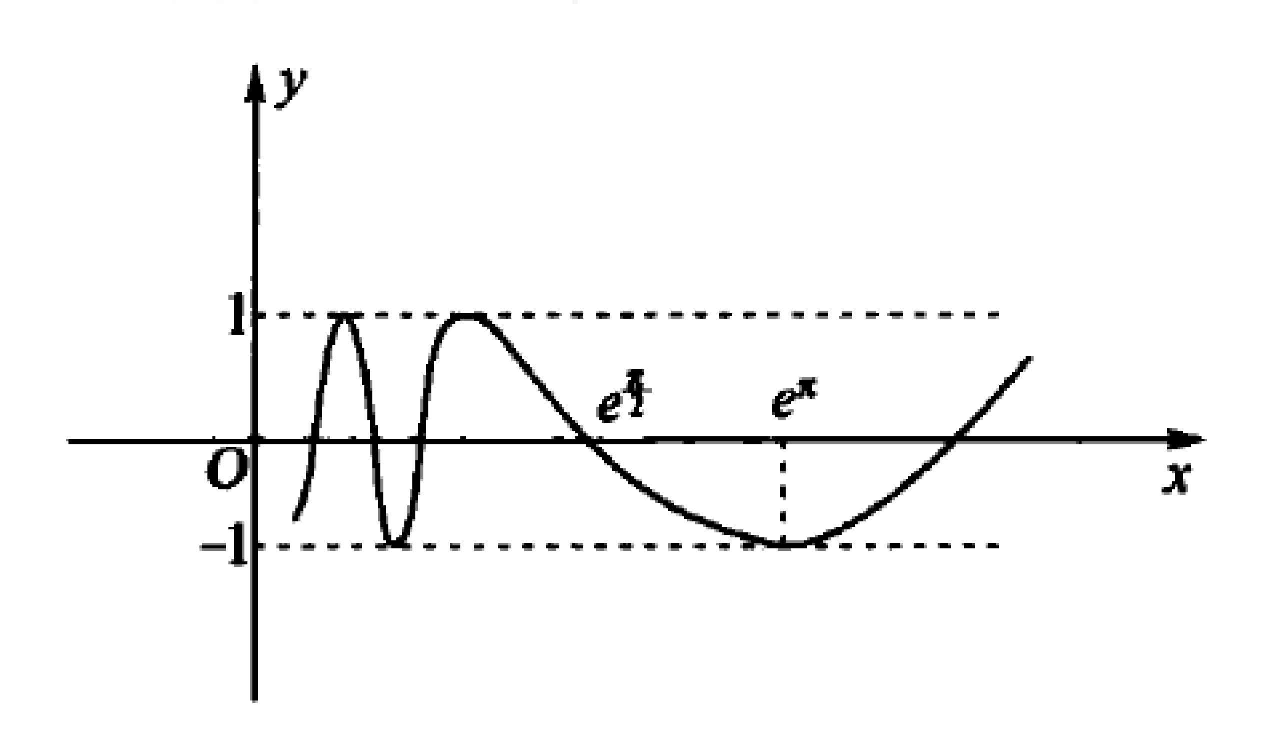
解　定义域为$(0, +\infty)$，

当 $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$，

当 $x = e^{2k\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 1$，

当 $x = e^{(2k+1)\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = -1$.

图形始终在直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间摆动，而且越靠近原点，摆动越密，如 309 题图所示.（两轴所取单位不一致）



309 题图

【310】 $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 函数的定义域为

$$x \neq k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

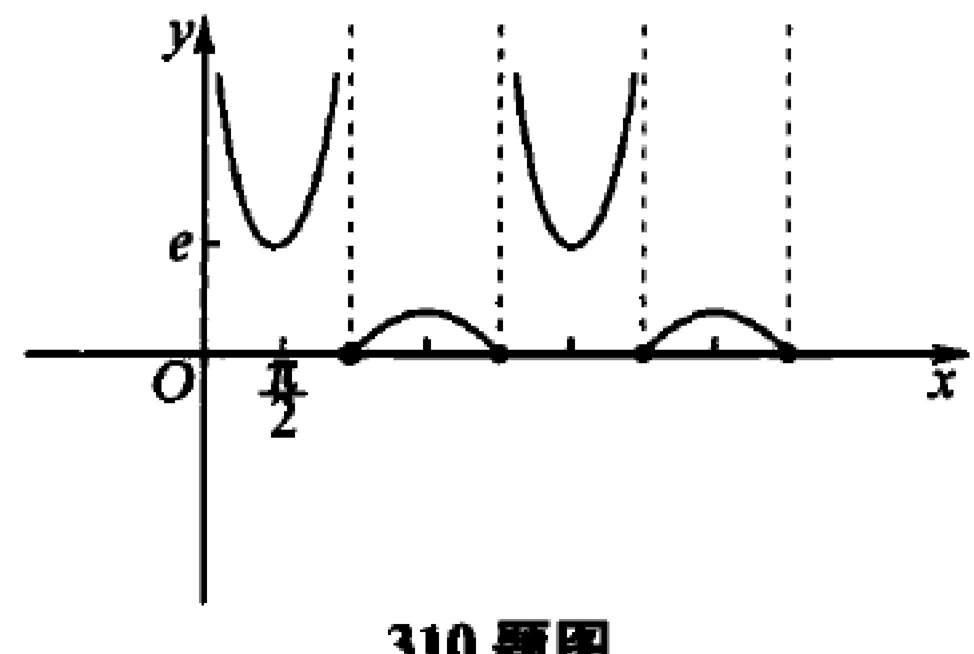
且 $y > 0$. 函数是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少.

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, y 单调增加, 又

$$\lim_{x \to 0+0} y = \lim_{x \to \pi - 0} y = +\infty,$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 为函数 y 在区间 $(0,\pi)$ 内的最小值. 当 x 由 π 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 由 0 增加到 $\frac{1}{e}$, 而当 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 时, y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0, 如 310 题图所示.



310 题图

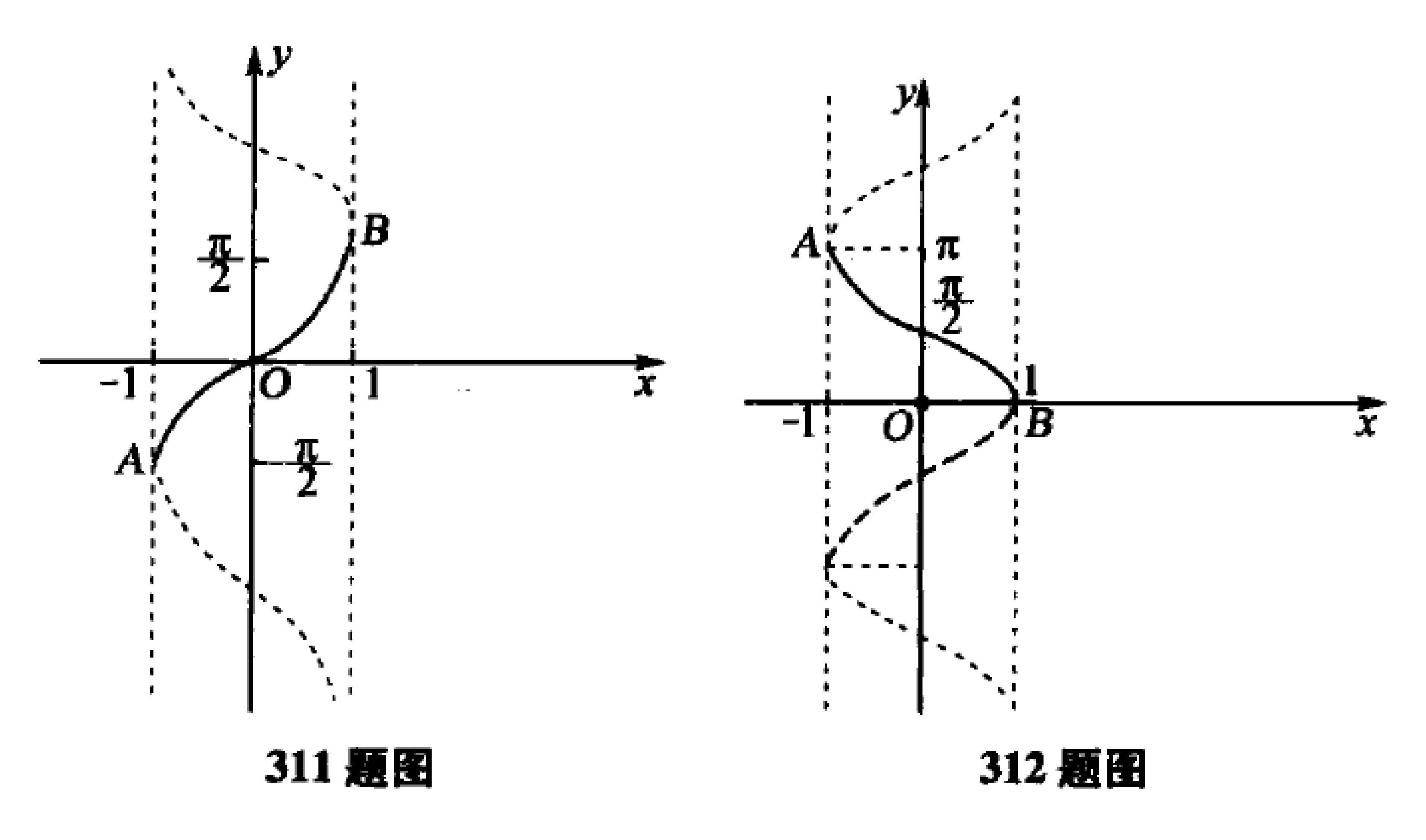
作以下反三角函数的图形(311 ～ 322).

【311】 $y = \arcsin x$.

解 如 311 题所示的$\overset{\frown}{AB}$ 曲线段

【312】 $y = \arccos x$.

解 如 312 题所示的$\overset{\frown}{AB}$ 曲线段



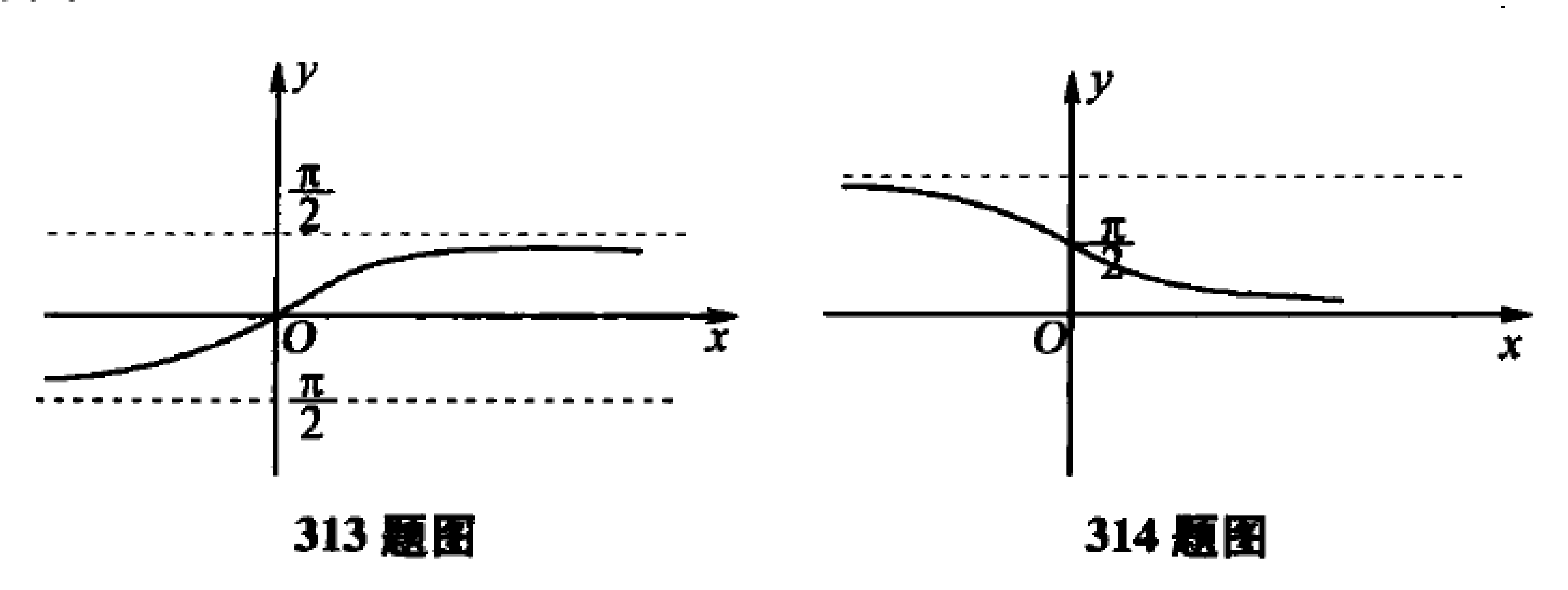
311 题图　　312 题图

【313】 $y = \arctan x$.

解 定义域为$-\infty < x < +\infty$,且$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$,$y = \pm\frac{\pi}{2}$.为图形的渐近线,如 313 题图所示.

【314】 $y = \operatorname{arccot} x$.

解 $0 < y < \pi$,$y = 0$,$y = \pi$ 为图形的渐近线,如 314 题图所示.



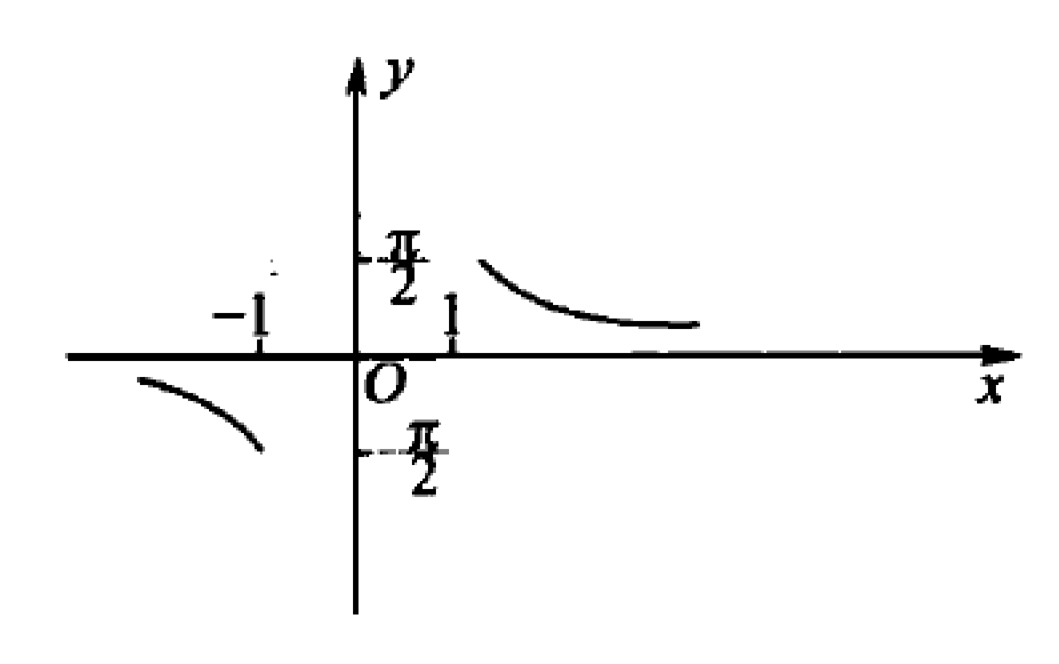
313 题图　　314 题图

【315】 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

解 定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$函数关于原点对称.

当$1\leqslant x<+\infty$时,由于$\dfrac{1}{x}$单调减少,所以y也是减函数.且

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,即$y=0$为图形的渐近线,如315题图所示.

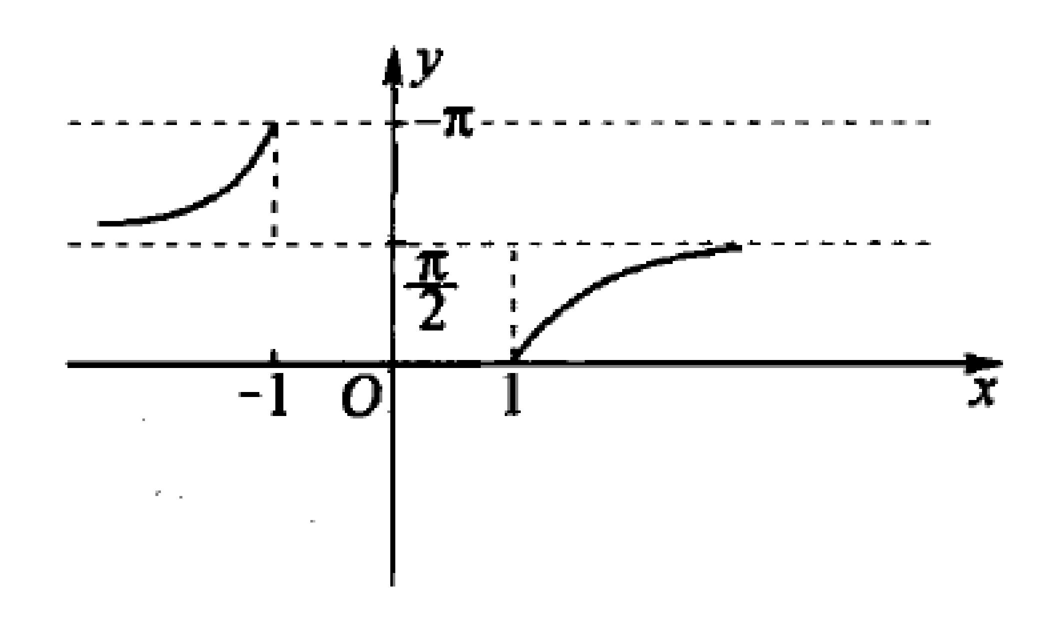


315 题图

【316】 $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

解 定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.当$1\leqslant x<+\infty$时,

$\dfrac{1}{x}$单调减少.y由0增加至$\dfrac{\pi}{2}$,当$-\infty<x\leqslant-1$时,y由$\dfrac{\pi}{2}$增加至π.$y=\dfrac{\pi}{2}$为图形的渐近线,如316题图所示.



316 题图

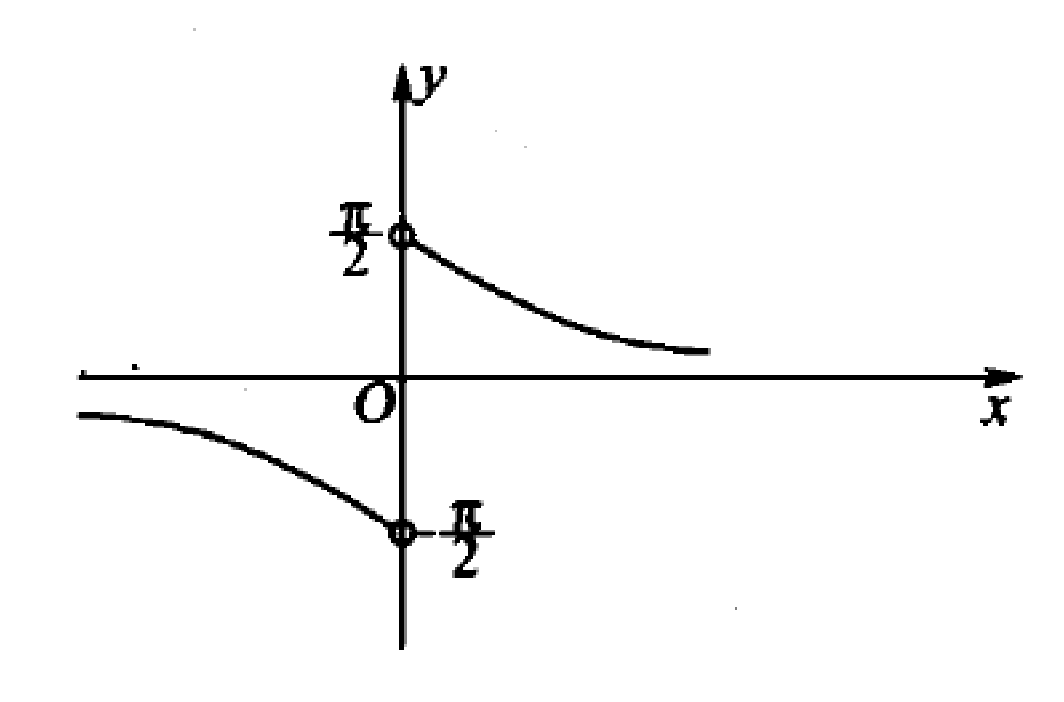
【317】 $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$.

解 定义域为 $x \neq 0$. 图形关于原点对称.

当 $x > 0$ 时,由于$\frac{1}{x}$是单调减函数,所以 y 是减函数. 且

$$\lim_{x\to+0} y = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to+\infty} y = 0$$

所以 $y = 0$ 是图形的渐近线,如 317 题图所示.



317 题图

【318】 $y = \arcsin(\sin x)$.

解 当$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$时,$\arcsin(\sin x) = x$. 故

当$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$时,$y = x$.

当$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$时,$y = \pi - x$.

当$\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$时,$y = 2\pi - x$.

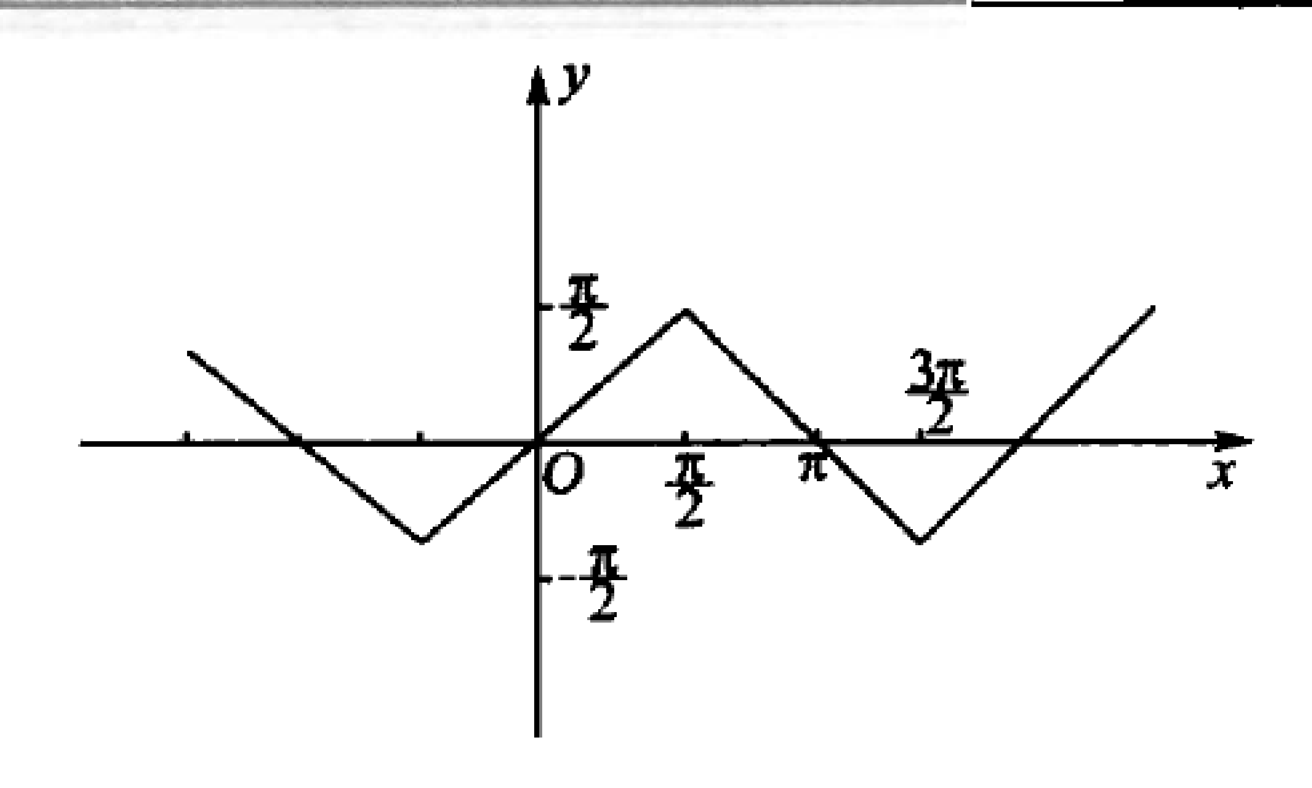
一般地,

当$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$时,$y = x - 2k\pi$.

当$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$时,

$$y = (\pi - x) + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

如 318 题图所示.



318 题图

【319】 $y=\arcsin(\cos x)$.

解 由定义有

$$\sin y=\cos x,$$

且 $$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=\frac{\pi}{2}+x$.

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$y=\frac{\pi}{2}-x$.

并且 y 是以 2π 为周期的周期函数，所以

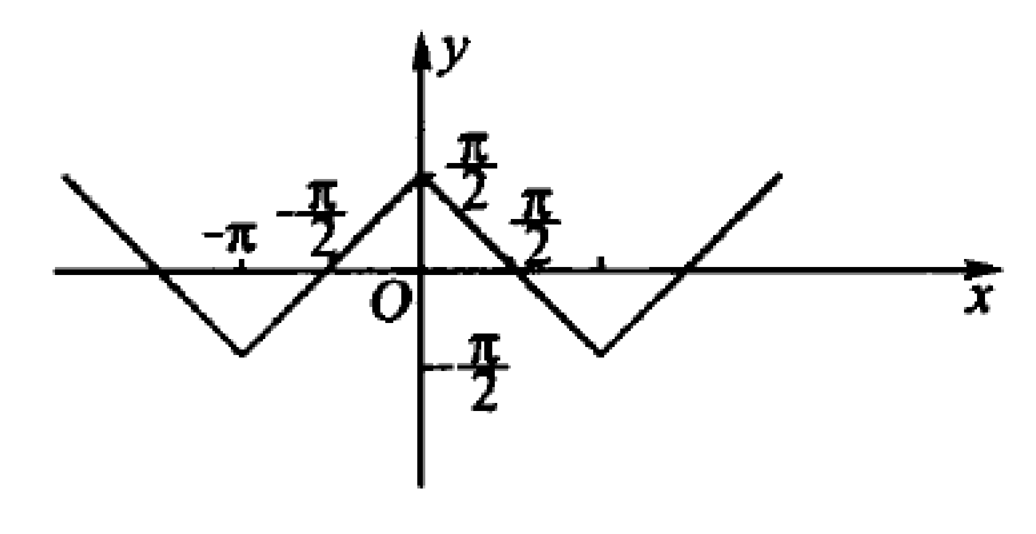
当 $(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时，

$$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi.$$

当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时，

$$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如 319 题图所示.



319 题图

【320】 $y=\arccos(\cos x)$.

解 由反余弦函数的定义有

$$\cos y=\cos x.$$

且 $\qquad 0\leqslant y\leqslant \pi,$

故当 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 时，$y=x$.

当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=-x$.

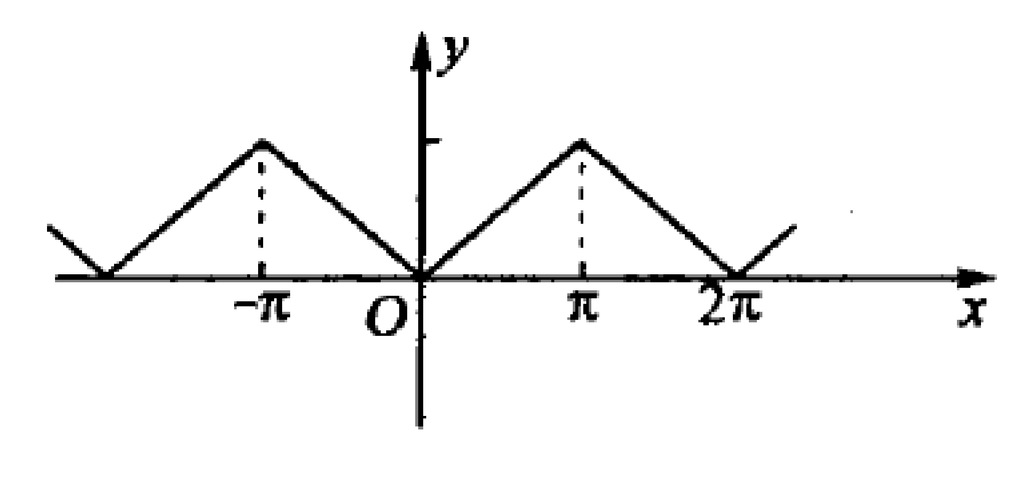
一般地当 $(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时，

$$y=-(x-2k\pi)=-x+2k\pi.$$

当 $2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi$ 时，

$$y=x-2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如图 320 题图所示.



320 题图

【321】 $y=\arctan(\tan x)$.

解 由反正切函数的定义有 $\tan y=\tan x$

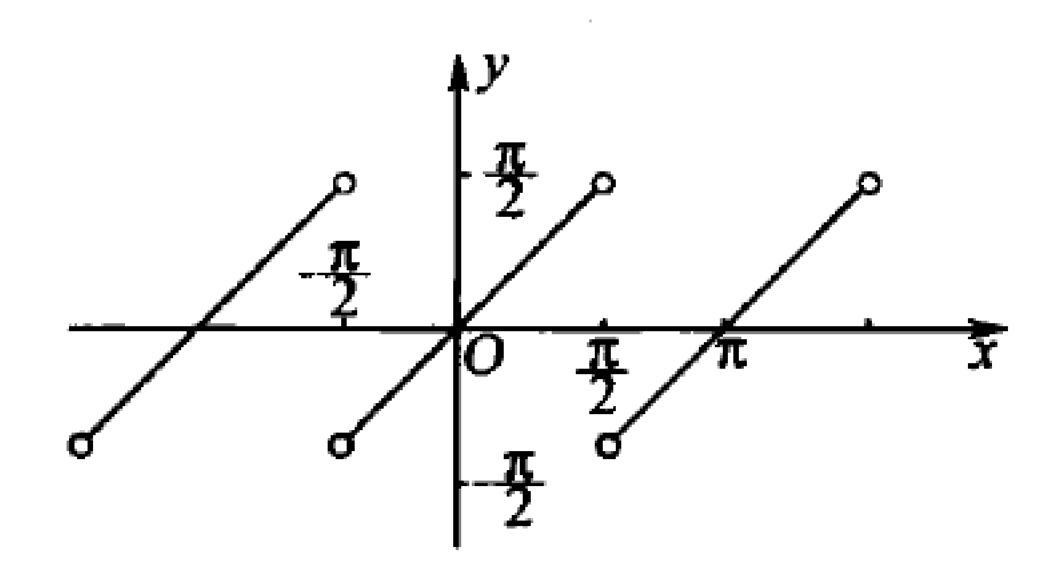
且 $\qquad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},$

所以当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y=x$；又 y 是以 π 为周期的周期函数，

所以当 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，

$$y=x-k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

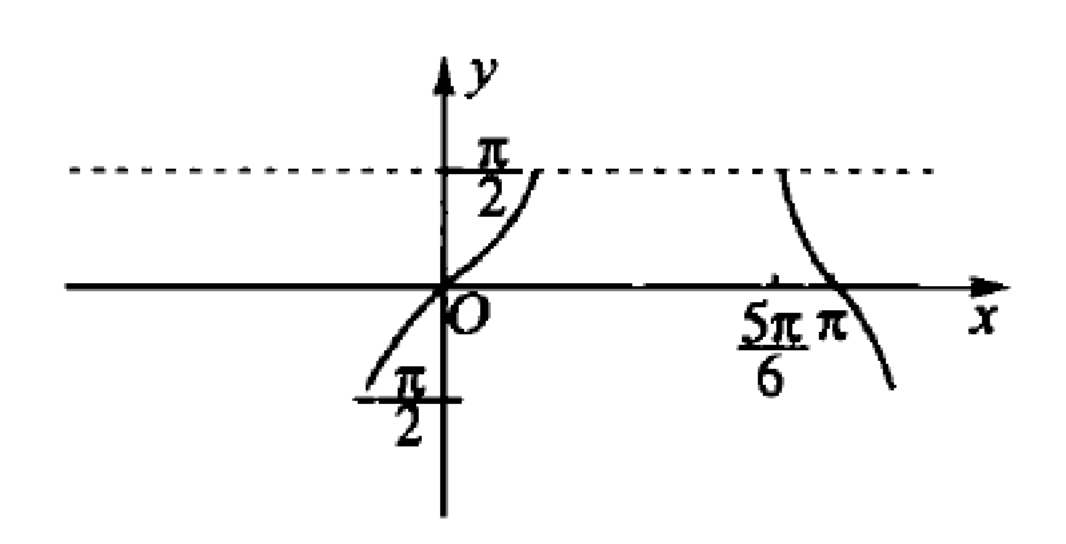
如 321 题图所示.



321 题图

【322】 $y=\arcsin(2\sin x)$.

解 由定义有 $\sin y=2\sin x$ 且 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. 函数的定义域为 $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$,如 322 题图所示.



322 题图

【323】 作出函数 $y=\arcsin y_1$ 的图形,设

(1) $y_1=1-\frac{x}{2}$; (2) $y_1=\frac{2x}{1+x^2}$;

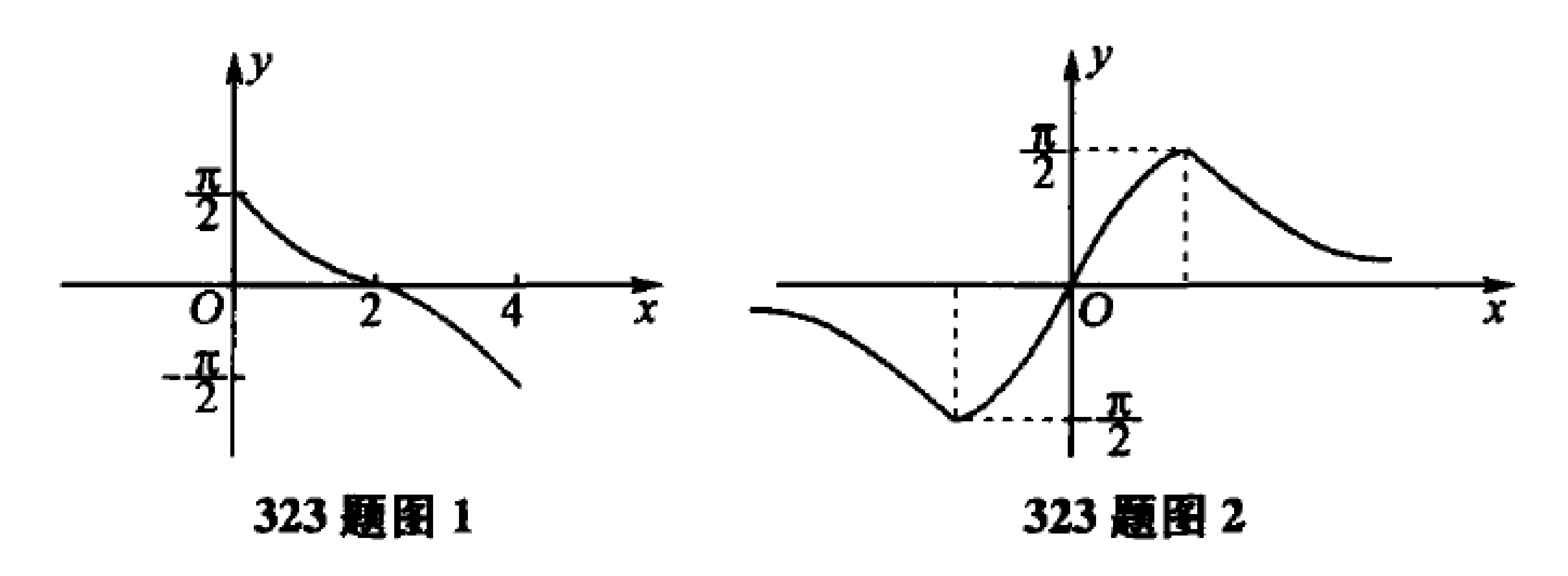
(3) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; (4) $y_1=e^x$.

解 (1) 定义域为$[0,4]$

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,y 由$\frac{\pi}{2}$ 减少到 0,而当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时,y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$,如 323 题图 1 所示.

(2) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形关于原点对称. 当 x 由 0 增到 1 时,由于$\frac{2x}{1+x^2}$ 为增函数,故由 0 增加到$\frac{\pi}{2}$. 而当 $x>1$ 时,$\frac{2x}{1+x^2}$

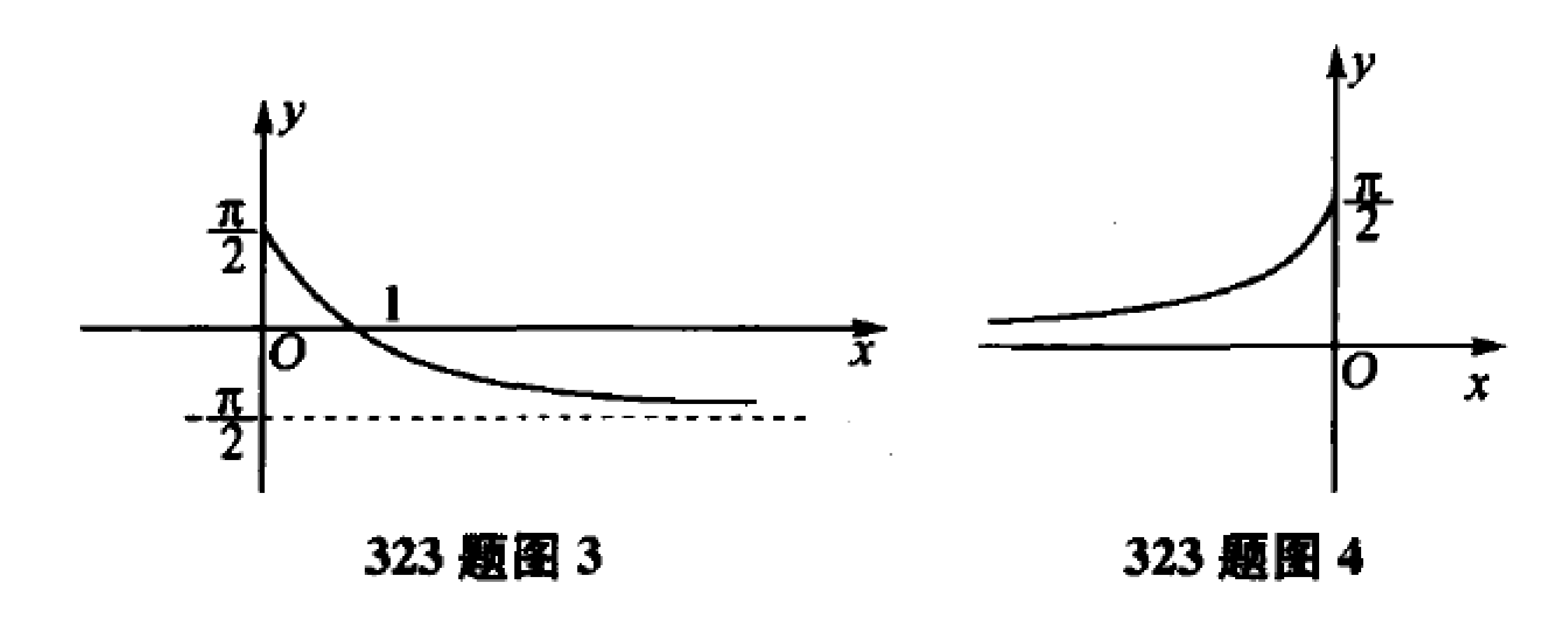
为减函数，故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0，且 $y=0$ 为图形的渐近线，如 323 题图 2.



323 题图 1　　323 题图 2

(3) 函数的定义域为 $x \geqslant 0$. 当 x 由 0 增加到 1 时，$\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0，故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0；而当 x 由 1 增加到 $+\infty$ 时，$\frac{1-x}{1+x}$ 由 0 减少到 -1. 故 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$，且 $y=-\frac{\pi}{2}$ 为图形的渐近线，如 323 题图 3 所示.

(4) 定义域为 $(-\infty,0]$，当 x 由 $-\infty$ 增加到 0 时，e^x 由 0 增加到 1. 所以 y 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$，且 $y=0$ 为图形的渐近线，如 323 题图 4.



323 题图 3　　323 题图 4

【324】 作出函数 $y=\arctan y_1$ 的图形，设

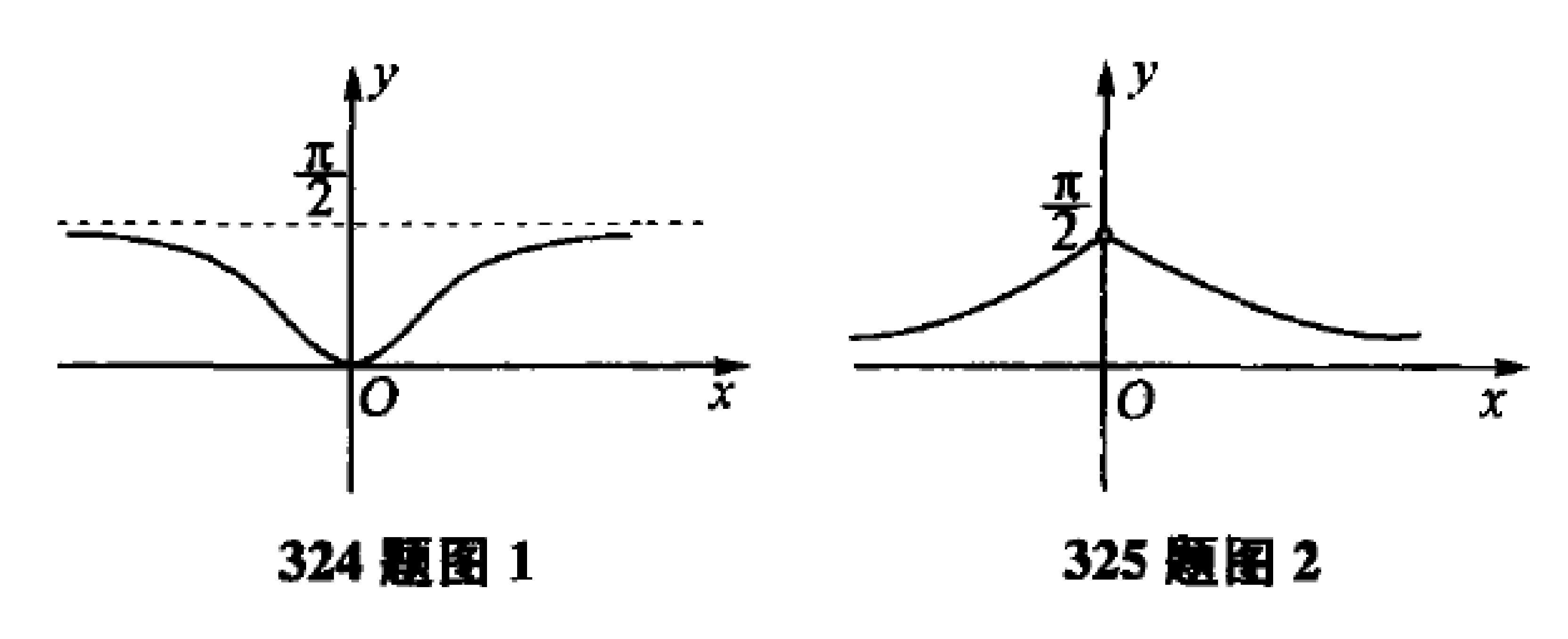
(1) $y_1=x^2$；　　(2) $y_1=\frac{1}{x^2}$；

(3) $y_1=\ln x$；　　(4) $y_1=\frac{1}{\sin x}$.

解 (1) 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=0$ 时, $y=0$. 当 x 由 0 增加至 $+\infty$ 时, y 由 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$. $y=\frac{\pi}{2}$ 为图形的渐近线, 如 324 题图 1 所示.

(2) 函数的定义域为 $x\neq 0$. 图形关于 Oy 轴对称. 当 x 趋近于 0 时, $\frac{1}{x^2}$ 趋于 $+\infty$, 故 y 趋近于 $\frac{\pi}{2}$. 当 x 由 0 增至 $+\infty$ 时, y 由 $\frac{\pi}{2}$ 单调减至 0, $y=0$ 为图形的渐近线, 如 324 题图 2 所示.



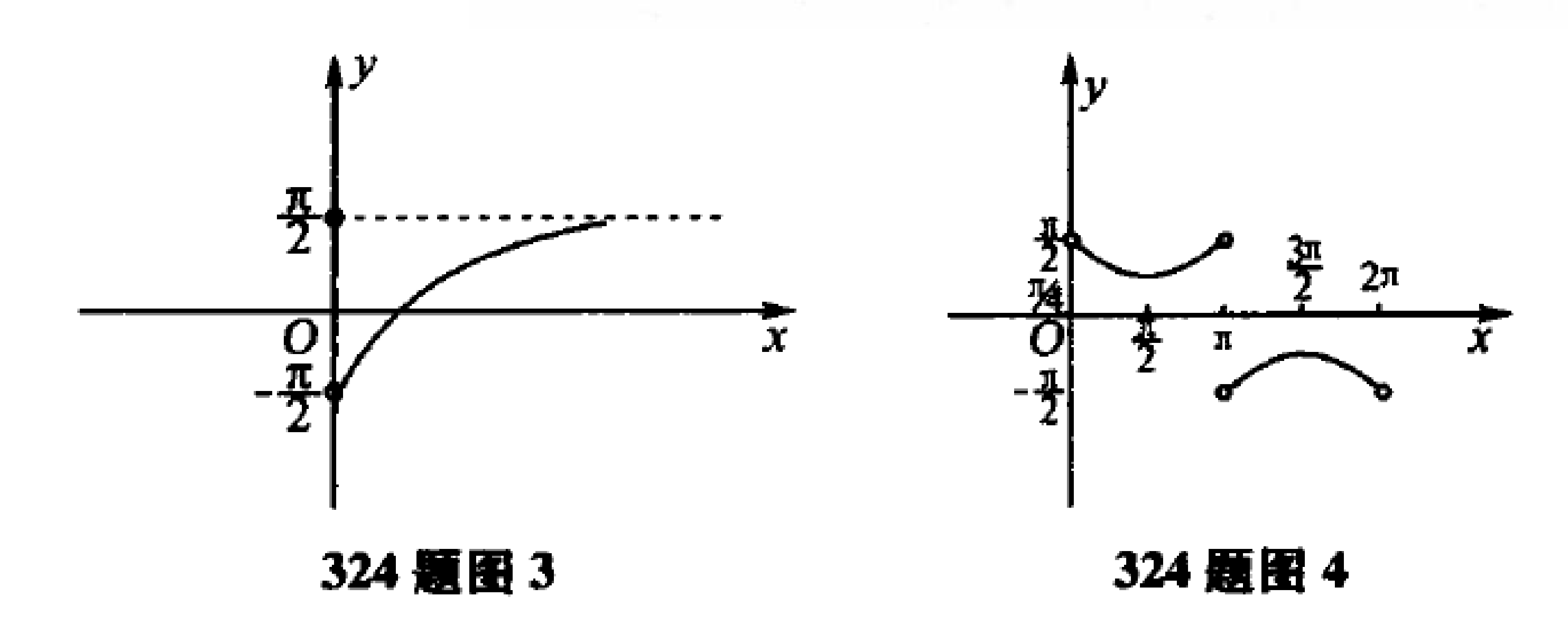
324 题图 1 **325 题图 2**

(3) 函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 x 由 0 单调增加到 $+\infty$ 时, $\ln x$ 由 $-\infty$ 单调增加至 $+\infty$. 故 y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 单调增加到 $\frac{\pi}{2}$. 且当 $x=1$ 时, $y=0$, 如 324 题图(3) 所示.

(4) 函数是以 2π 为周期的周期函数

当 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$ 减至 1, 则 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减至 $\frac{\pi}{4}$. 当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 1 增加到 $+\infty$, 则 y 由 $\frac{\pi}{4}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$. 当 x 由 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $-\infty$ 增加到 -1, 则 y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $-\frac{\pi}{4}$. 当 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 时, y 由 $-\frac{\pi}{4}$ 减至 $-\frac{\pi}{2}$, 如 324 题图 4 所示.



324 题图 3　　　　324 题图 4

【324.1】 作出以下函数的图形：

(1) $y=x^3-3x+2$；　　(2) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$；

(3) $y=\dfrac{x^2}{|x|-1}$；　　(4) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$；

(5) $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　(6) $y=\cot\dfrac{\pi x}{1+x^2}$；

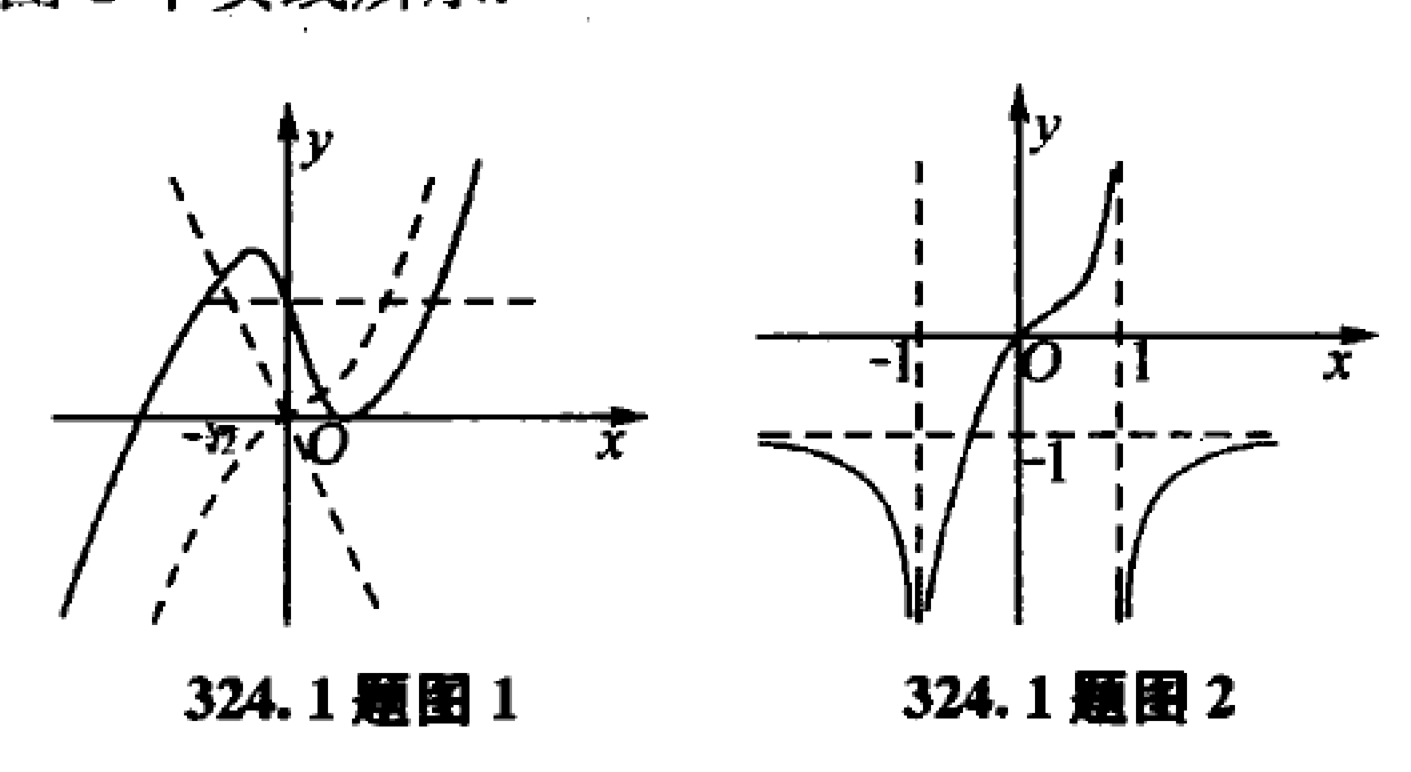
(7) $y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$；　　(8) $y=\lg(x^2-3x+2)$；

(9) $y=\arcsin\left(\dfrac{3}{2}-\sin x\right)$；

(10) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}\right)$；

(11) $y=\log_{\cos x}\sin x$；　　(12) $y=(\sin x)^{\cot x}$.

解 (1) 图形由 $y=x^3$，$y=-3x$，$y=2$ 的图形叠加而成，如 324.1 题图 1 中实线所示.



324.1 题图 1　　　　324.1 题图 2

(2) 函数的定义域为 $x\neq\pm1$.

且 $$y=-1+\frac{x}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}$$

$y=-1,x=1$,及 $x=-1$ 为图形的渐近线. 当 $x=0$ 时,$y=0$,如 324.1 图 2 所示.

(3) 函数的定义域 $x\neq\pm1$,且

当 $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$ 时,

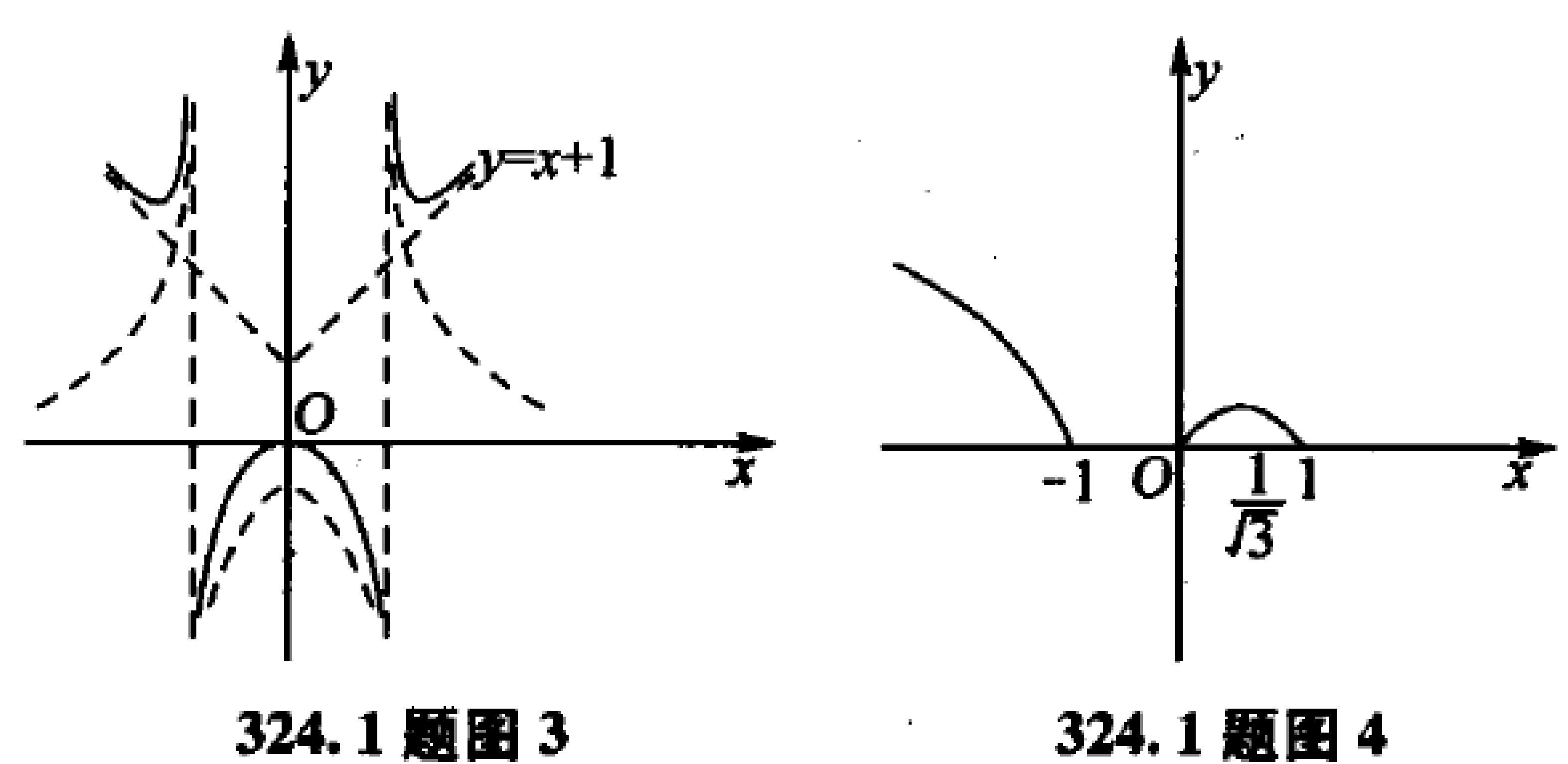
$$y=\frac{x^2}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1},$$

当 $x<0$ 且 $x\neq-1$ 时,

$$y=\frac{x^2}{-x-1}=-x+1-\frac{1}{x+1},$$

故当 $x\geqslant0$ 时,图形由 $y=x+1$ 及 $y=\frac{1}{x-1}$ 叠加而成.

当 $x<0$ 时,图形由 $y=-x+1$ 及 $y=-\frac{1}{x+1}$ 叠加而成,如 324.1 题图 3 中实线所示.



324.1 题图 3　　　　324.1 题图 4

(4) 函数的定义域为$(-\infty,-1]\cup[0,1]$,

当 x 由 $-\infty$ 增至 -1 时,y 由 $+\infty$ 减至 0.

在$\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$,函数单调增加;

在$\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1\right]$函数单调减少,如 324.1 题图 4 所示.

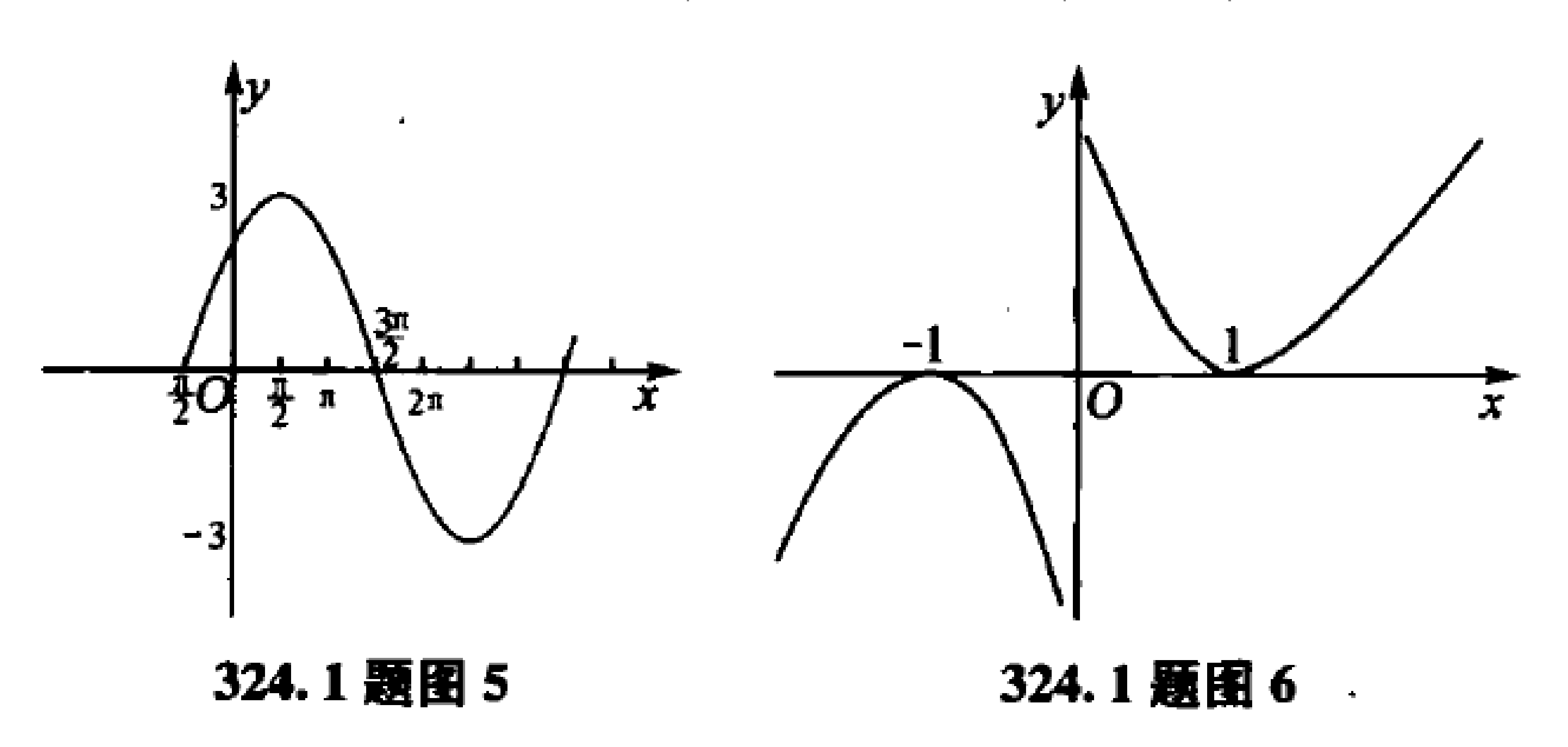
(5) 将 $y=\sin x$ 的图形向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位. 再沿 Ox 轴的方向

拉长 2 倍,然后再沿 Oy 轴的方向拉长 3 倍,如 324.1 题图 5 所示.

(6) 定义域为 $x \neq 0$.

当 x 由 $-\infty$ 增至 -1 时,$\frac{\pi x}{1+x^2}$ 由 0 减至 $-\frac{\pi}{2}$,故 y 由 $-\infty$ 增至 0.

当 x 由 -1 增至 0 时,$\frac{\pi x}{1+x^2}$ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 0^-,故 y 由 0 减至 $-\infty$,且图形关于原点对称,如 324.1 题图 6 所示.



324.1 题图 5　　324.1 题图 6

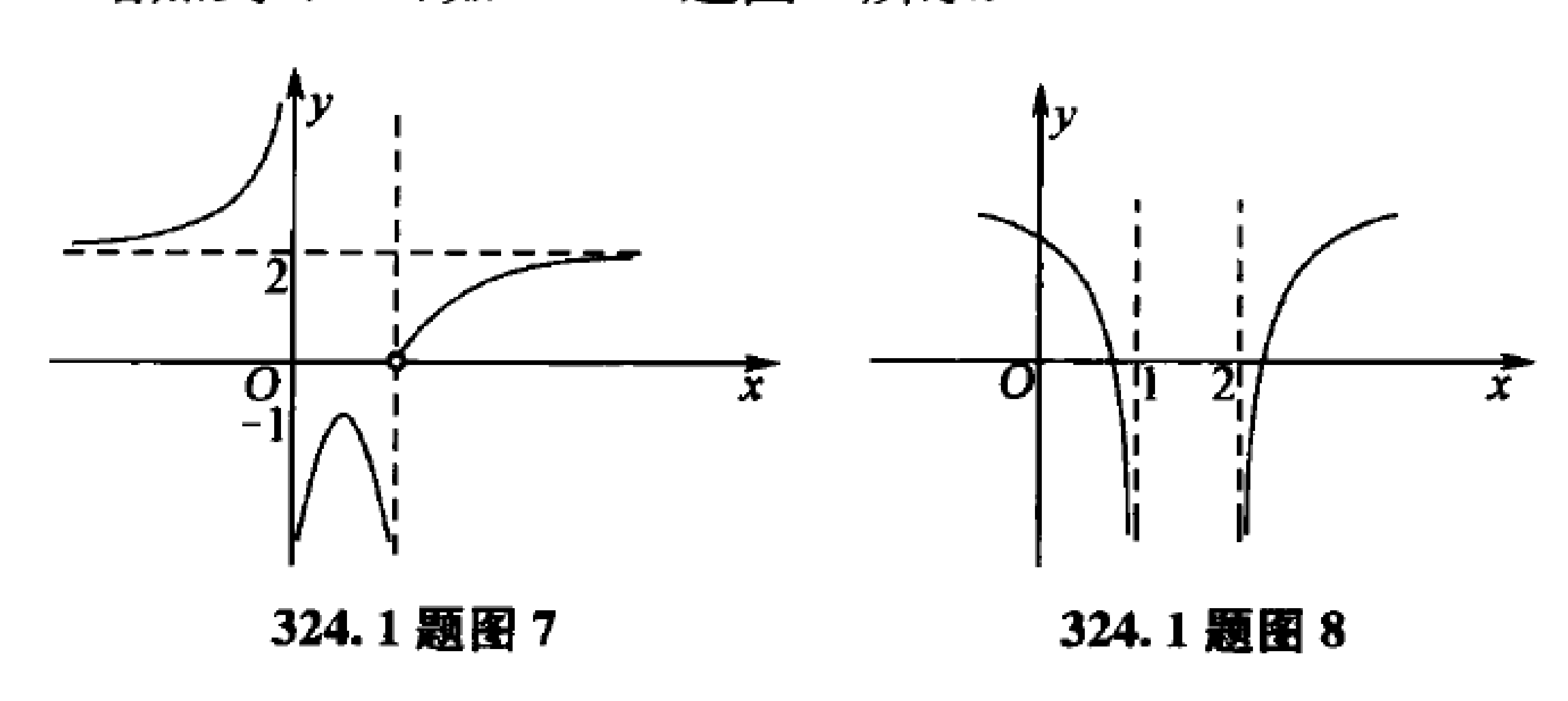
(7) 定义域为 $x \neq 0$,且 $x \neq 1$.

$y = 2, x = 0, x = 1$ 为图形的渐近线,如 324.1 题图 7 所示.

(8) 函数的定义域 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

当 x 由 $-\infty$ 增至 1 时 $x^2 - 3x + 2$ 由 $+\infty$ 减至 0. 故 y 由 $+\infty$ 减到 $-\infty$

当 x 由 2 增至 $+\infty$ 时,$x^2 - 3x + 2$ 由 0 增加到 $+\infty$. 故 y 由 $-\infty$ 增加到 $+\infty$,如 324.1 题图 8 所示.



324.1 题图 7　　324.1 题图 8

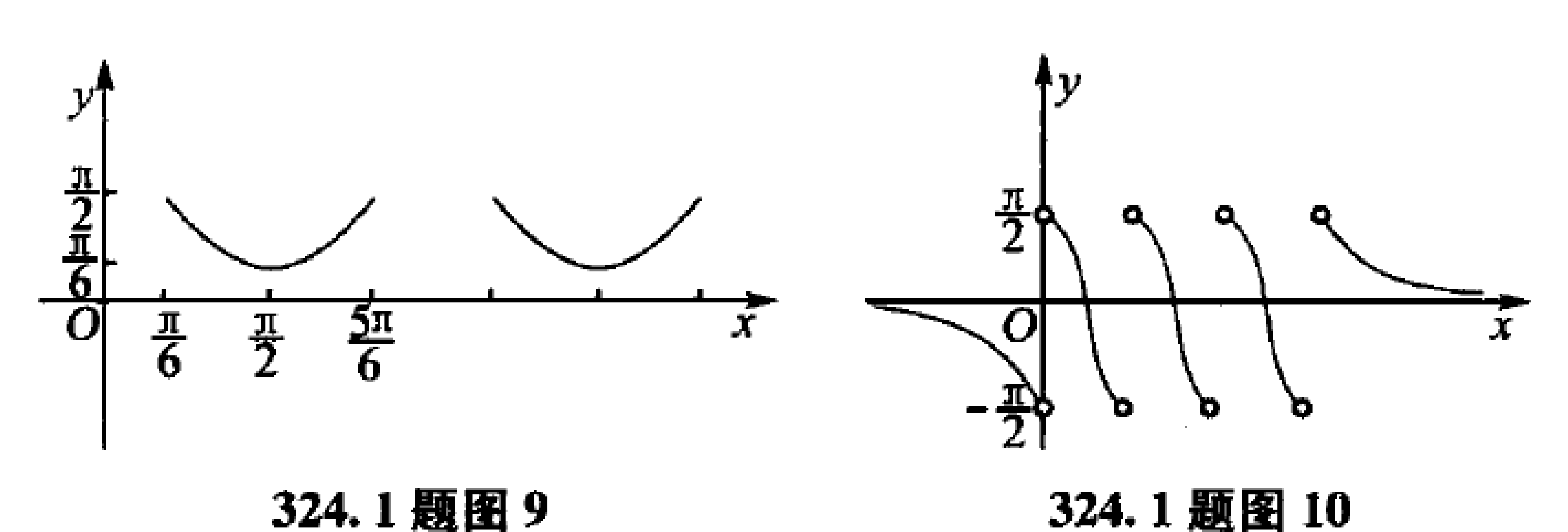
(9) 函数为周期为 2π 的周期函数定义域为

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right].$$

当 x 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{3}{2}-\sin x$ 由 1 减至 $\frac{1}{2}$，故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减至 $\frac{\pi}{6}$；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增至 $\frac{5\pi}{6}$ 时，$\frac{3}{2}-\sin x$ 由 $\frac{1}{2}$ 增加至 1，故 y 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$，如 324.1 题图 9 所示.

(10) 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

$y=0$ 为图形的渐近线，如 324.1 图示 10 所示.



324.1 题图 9　　324.1 题图 10

(11) 函数为以 2π 为周期的周期函数定义域为

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$y=\frac{\lg\sin x}{\lg\cos x}.$$

当 $x\to0^+$ $(x>0$，且 x 趋于 0) 时，$y\to+\infty$.

当 $x\to\frac{\pi}{2}-0(x<\frac{\pi}{2}$，且 x 趋于 $\frac{\pi}{2})$ 时，$y\to0$.

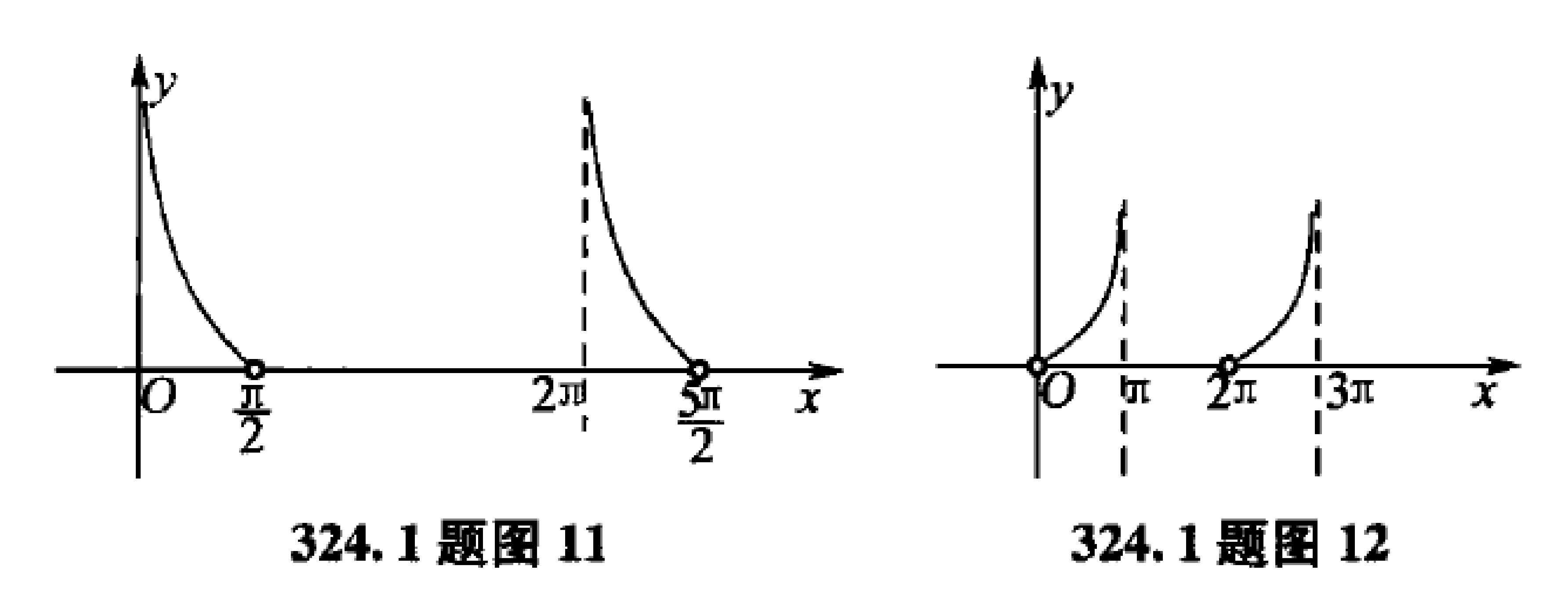
如 324.1 题图 11 所示.

(12) 函数是以 2π 为周期的周期函数.

定义域为 $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}(2k\pi,(2k+1)\pi)$.

当 $x\to0+$ 时，$y\to0$，当 $x\to\pi-0$ 时，$y\to+\infty$，且当 $x=\frac{\pi}{2}$

时，$y=1$，如 324.1 题图 12 所示.



324.1 题图 11　　324.1 题图 12

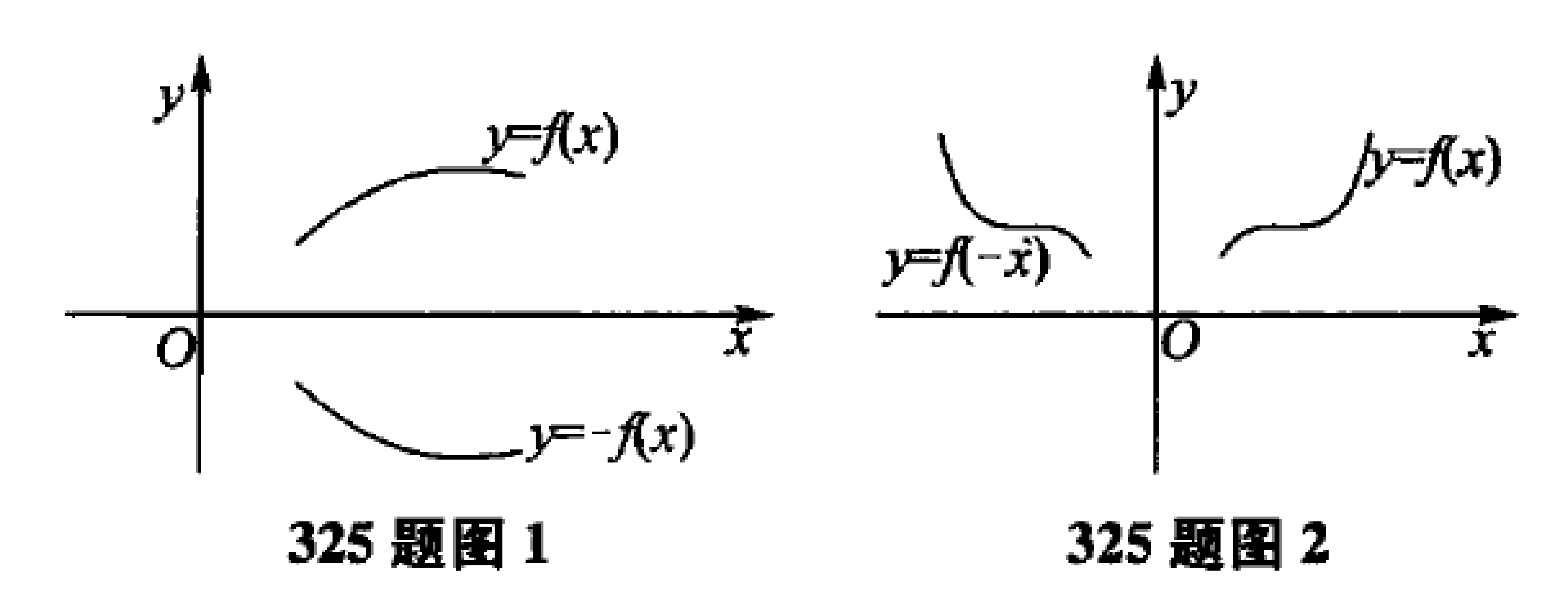
【325】　已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作出下列各函数的图形：

(1) $y=-f(x)$；　　(2) $y=f(-x)$；

(3) $y=-f(-x)$.

解　(1) 函数 $y=-f(x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于 Ox 轴对称，如 325 题图 1 所示.

(2) 函数 $y=f(-x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于 Oy 轴对称，如 325 题图 2 所示.



325 题图 1　　325 题图 2

(3) 函数 $y=-f(-x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于坐标原点对称. 如图所示.

【326】　已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作出下列各函数的图形：

(1) $y=f(x-x_0)$；　　(2) $y=y_0+f(x-x_0)$；

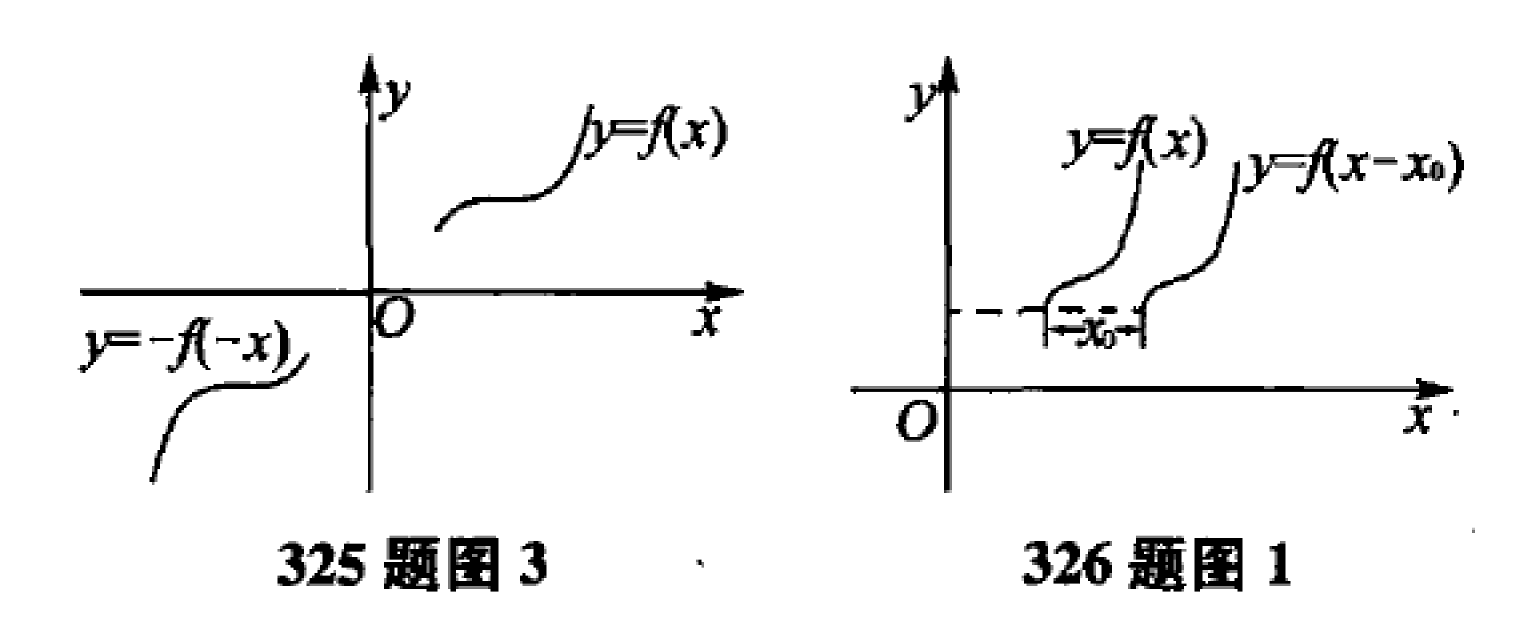
(3) $y=f(2x)$；　　(4) $y=f(kx+b)\quad(k\neq0)$.

解　(1) 函数 $y=f(x-x_0)$ 的图形可由 $y=f(x)$ 的图形向左(或向右) 平移距离 $|x_0|$ 得到：

当 $x > 0$ 时,向右平移;

当 $x < 0$ 时,向左平移.

如 326 题图 1 所示.



325 题图 3　　326 题图 1

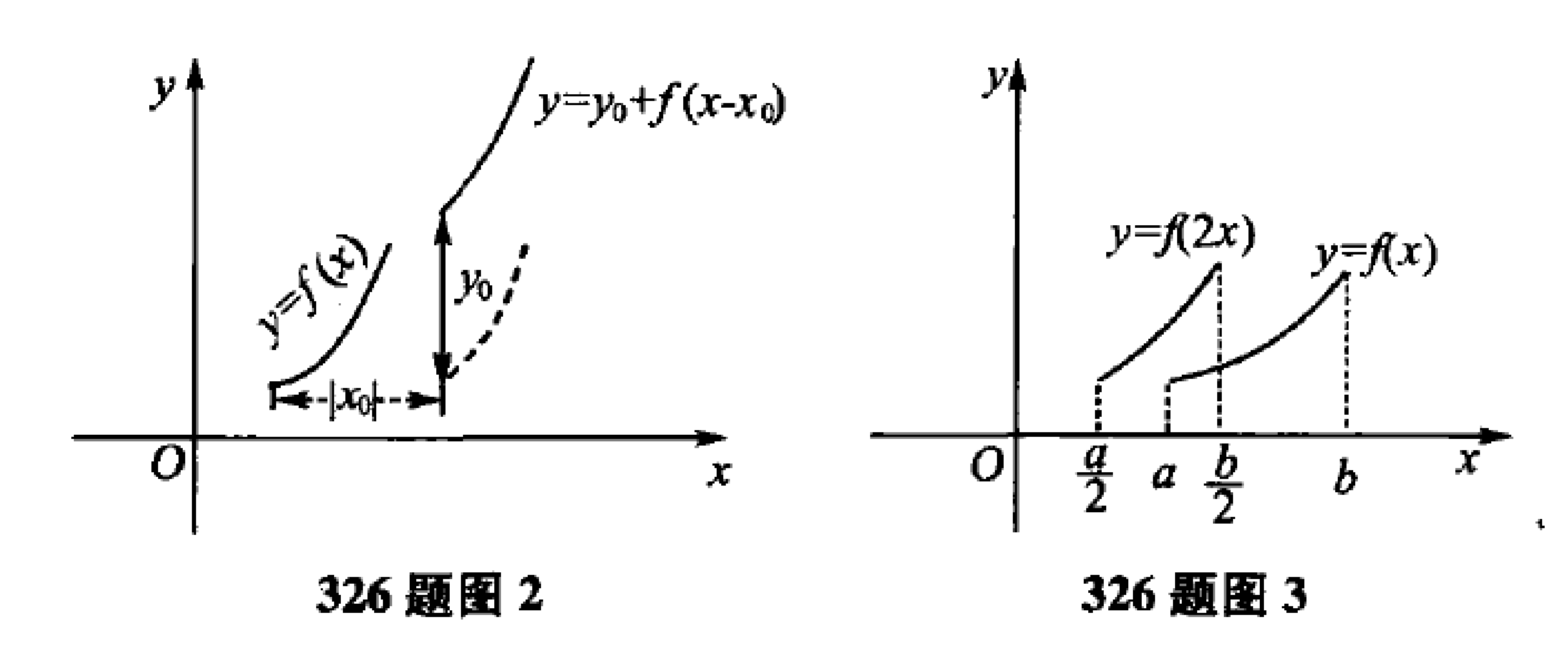
(2) 将 $y = f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$,得到 $y = f(x - x_0)$ 的图形,再将其上下平移距离 $|y_0|$,即得 $y = y_0 + f(x - x_0)$ 的图形.

当 $y_0 > 0$ 时,向上平移;

当 $y_0 < 0$ 时,向下平移.

如 326 题图 2 所示.

(3) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得到,如 326 题图 3 所示.



326 题图 2　　326 题图 3

(4) 若 $k > 0$, $y = f(kx + b)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先沿 Ox 轴方向压缩($k > 1$),或放大$\frac{1}{k}$倍($0 < k < 1$),然后将所得图形向左(或向右)平移距离 $|b|$,若 $k < 0$,作图形 $y = f(x)$ 关于 Oy 轴对称的图形,得到 $y = f(-x)$ 的图形,将其沿 Ox 轴方向

压缩 $|k|$ 倍（$|k|>1$）或放大 $\frac{1}{(k)}$ 倍（$0<|k|<1$），然后将所得图形平移距离 $|b|$，如 326 题图 4

【326.1】 设 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } |x|>1 \text{ 时.}\end{cases}$

作出函数

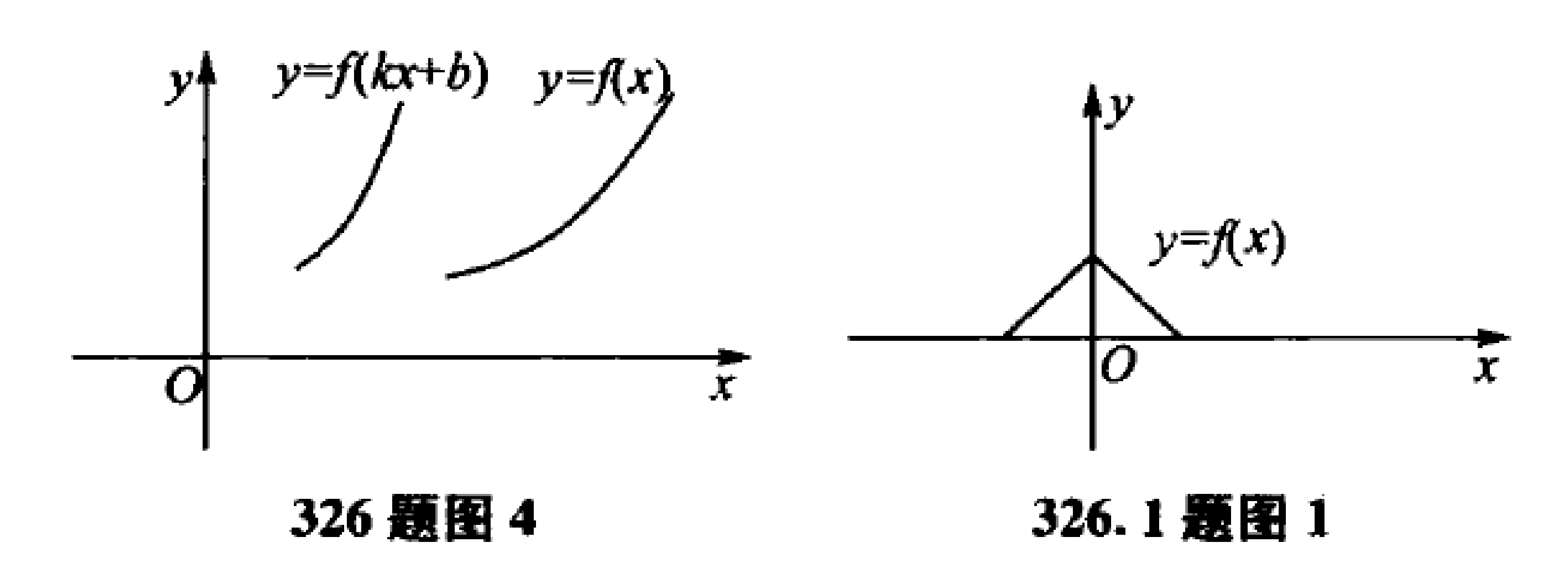
$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)],$$

当 $t=0, t=1$ 和 $t=2$ 时的图形.

解 (1) 当 $t=0$ 时，

$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]=f(x).$$

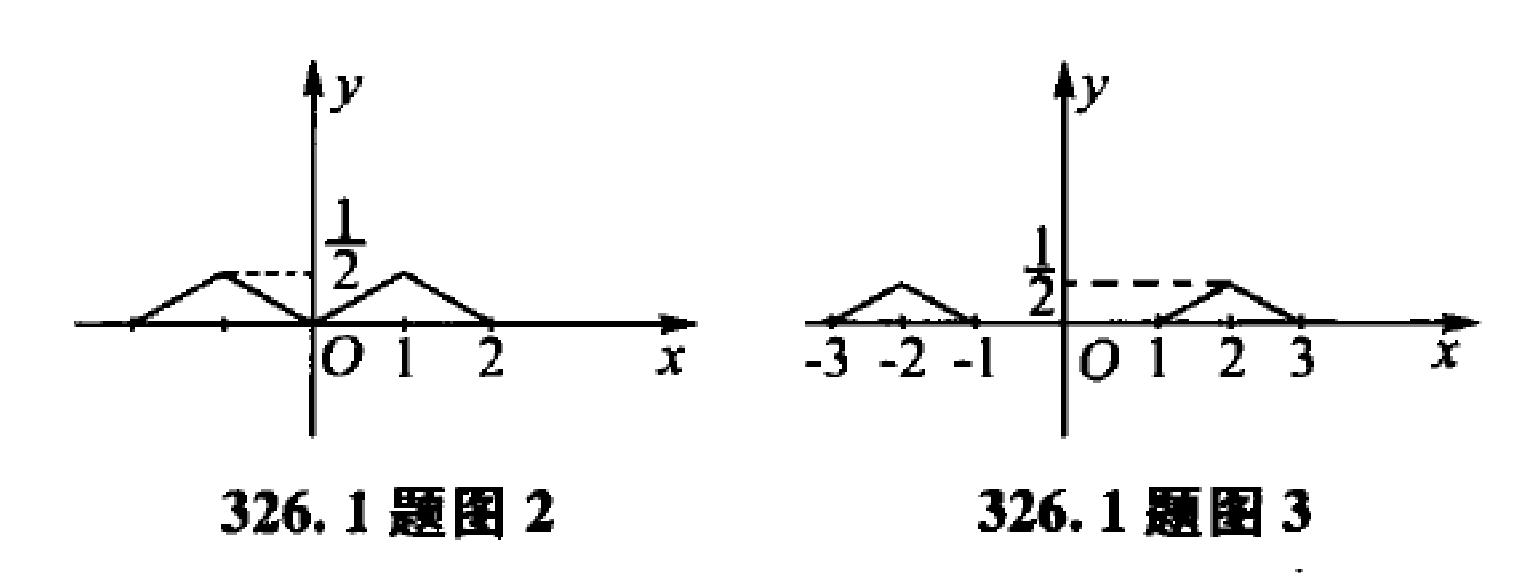
如 326.1 题图 1 所示.



326 题图 4　　326.1 题图 1

(2) 将 $y=f(x)$ 向右平移 1 个单位得 $y=f(x-1)$ 的图形，向左平移 1 个单位得 $y=f(x+1)$ 的图形，将 $y=f(x-1)$ 及 $y=f(x+1)$ 的图形叠加再将所得图形沿 Oy 轴的方向压缩 2 倍即得所求图形，如 326.1 题图 2 所示.

(3) 如 326.1 题图 3 所示.



326.1 题图 2　　326.1 题图 3

【327】 作出以下函数的图形：

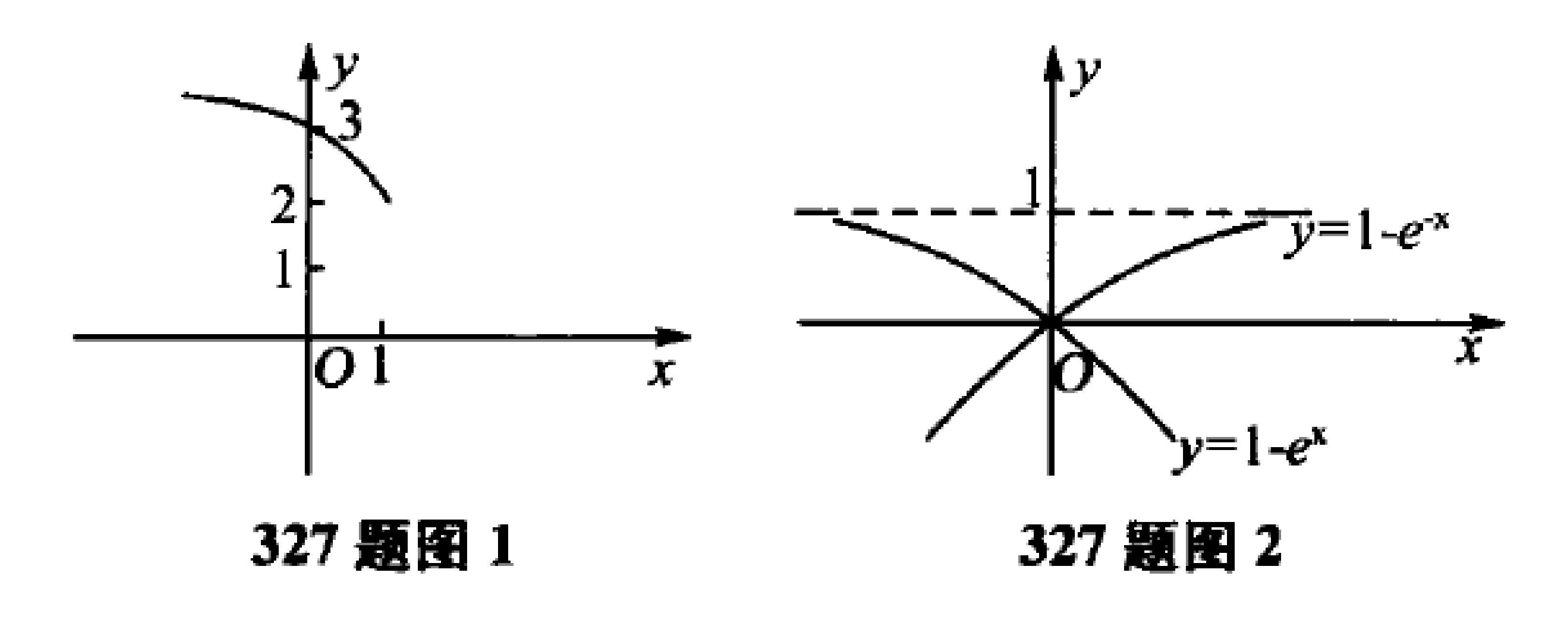
(1) $y = 2 + \sqrt{1-x}$；　　(2) $y = 1 - e^{-x}$；

(3) $y = \ln(1+x)$；　　(4) $y = -\arcsin(1+x)$；

(5) $y = 3 + 2\cos 3x$.

解 (1) 如 327 题图 1 所示.

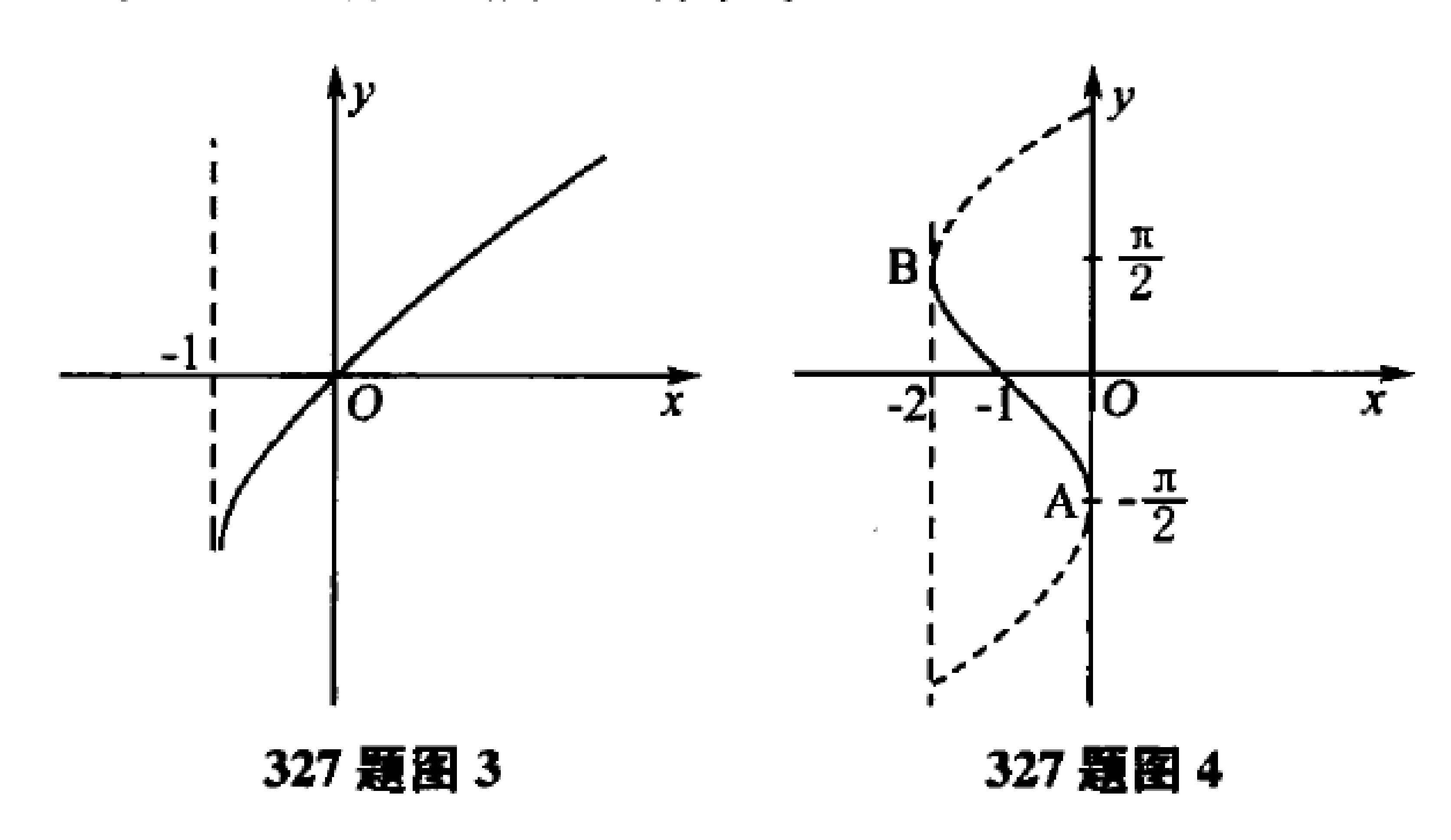
(2) 如 327 题图 2 所示.



327 题图 1　　327 题图 2

(3) 如 327 题图 3 所示.

(4) 如 327 题图 4 所示的曲线$\overset{\frown}{AB}$



327 题图 3　　327 题图 4

(5) 如 327 题图 5 所示.

【328】 已知函数 $y = f(x)$ 的图形，作出以下函数的图形：

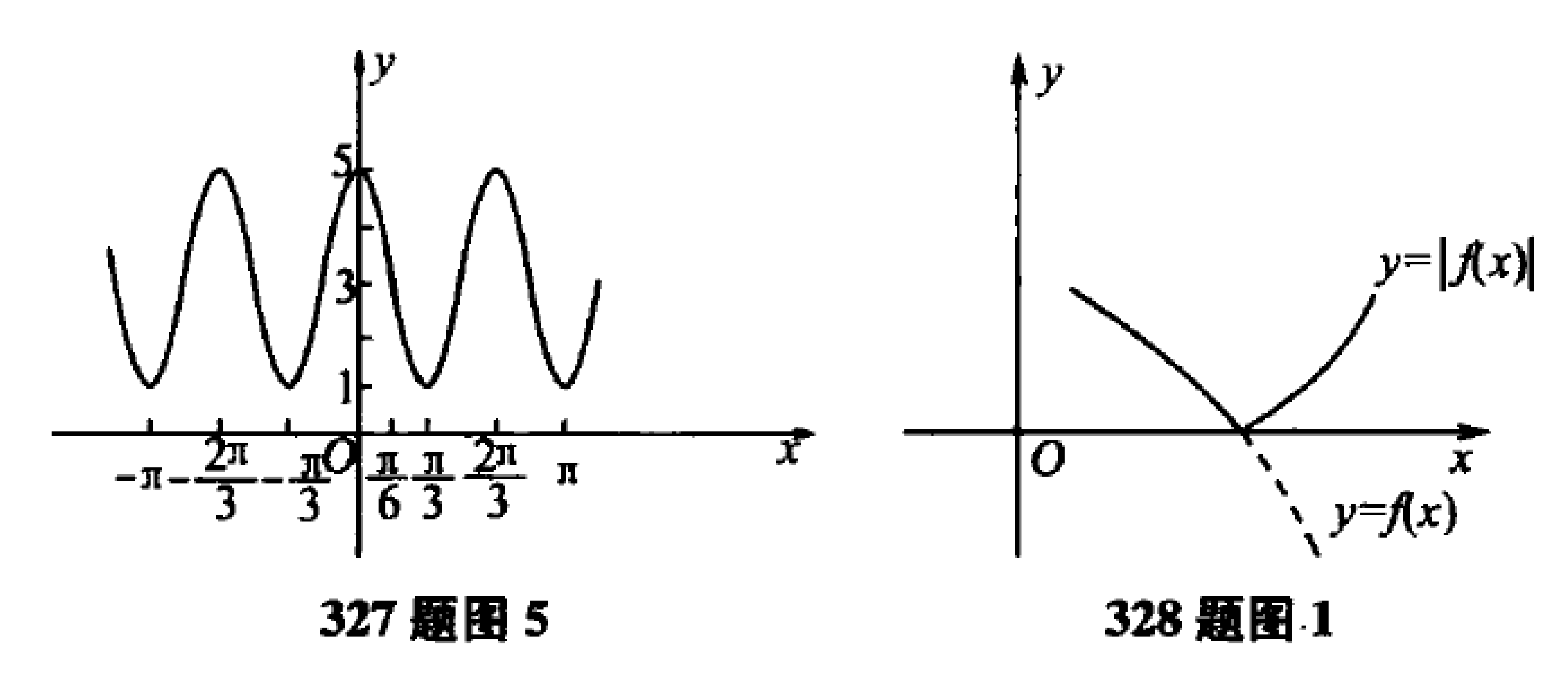
(1) $y = |f(x)|$；

(2) $y = \dfrac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$；

(3) $y = \dfrac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

解 (1) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时, $y=f(x)$.

当 $f(x)<0$ 时, $y=-f(x)$, 如 328 题图 1 所示.



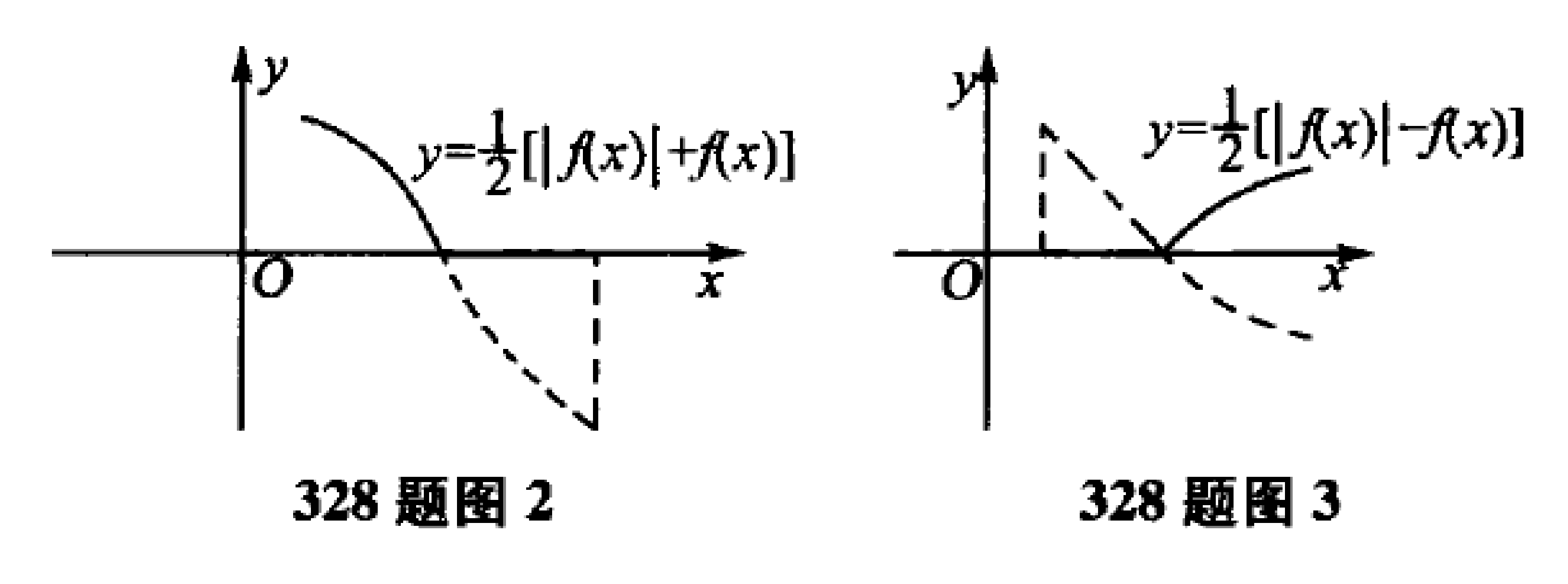
327 题图 5　　328 题图 1

(2) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时, $y=f(x)$.

当 $f(x)<0$ 时, $y=0$, 如 328 题图 2 所示.

(3) 当 $f(x)\leqslant 0$ 时, $y=-f(x)$.

当 $f(x)>0$ 时, $y=0$, 如 328 题图 3 所示.



328 题图 2　　328 题图 3

【329】 已知函数 $y=f(x)$ 的图形, 作出以下函数的图形:

(1) $y=f^2(x)$;　　(2) $y=\sqrt{f(x)}$;

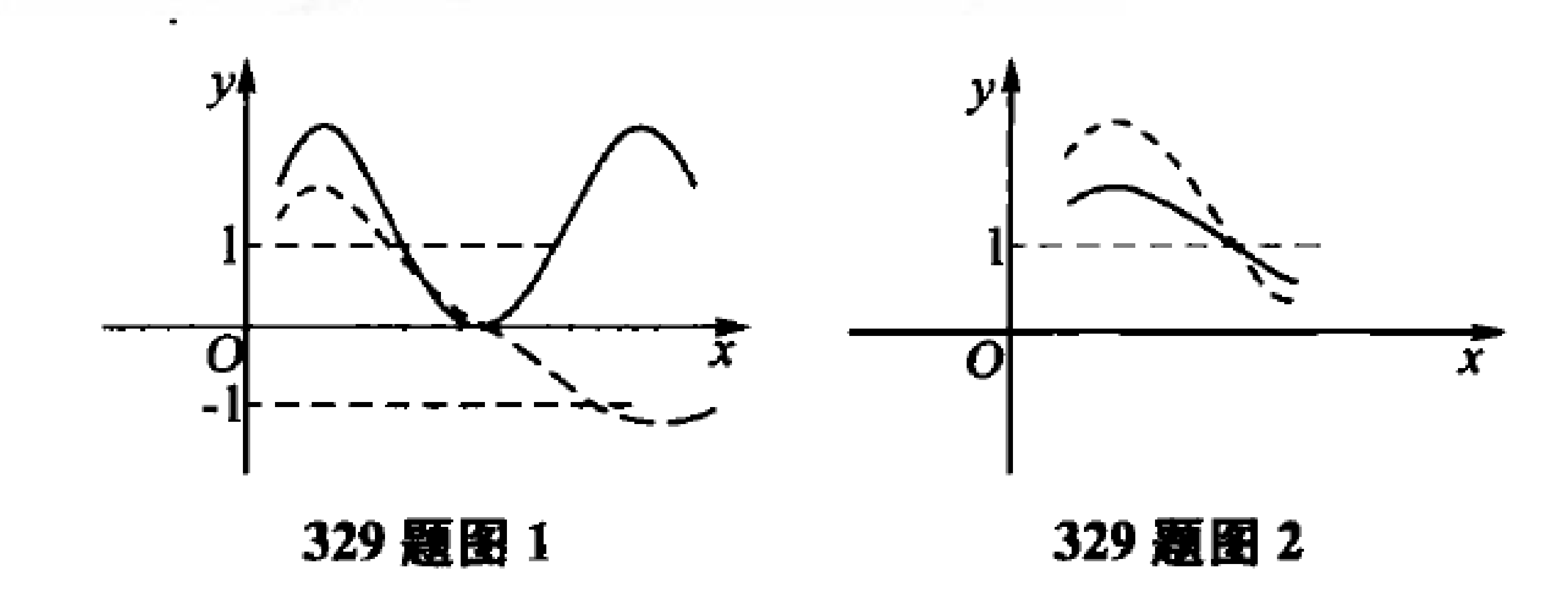
(3) $y=\ln f(x)$;　　(4) $y=f(f(x))$;

(5) $y=\operatorname{sgn} f(x)$;　　(6) $y=[f(x)]$.

解 (1) 以 $y=1$ 为图形的分界线.

如 329 题图 1 所示, 虚线表 $y=f(x)$ 的图形, 实线表 $y=[f(x)]^2$ 的图形.

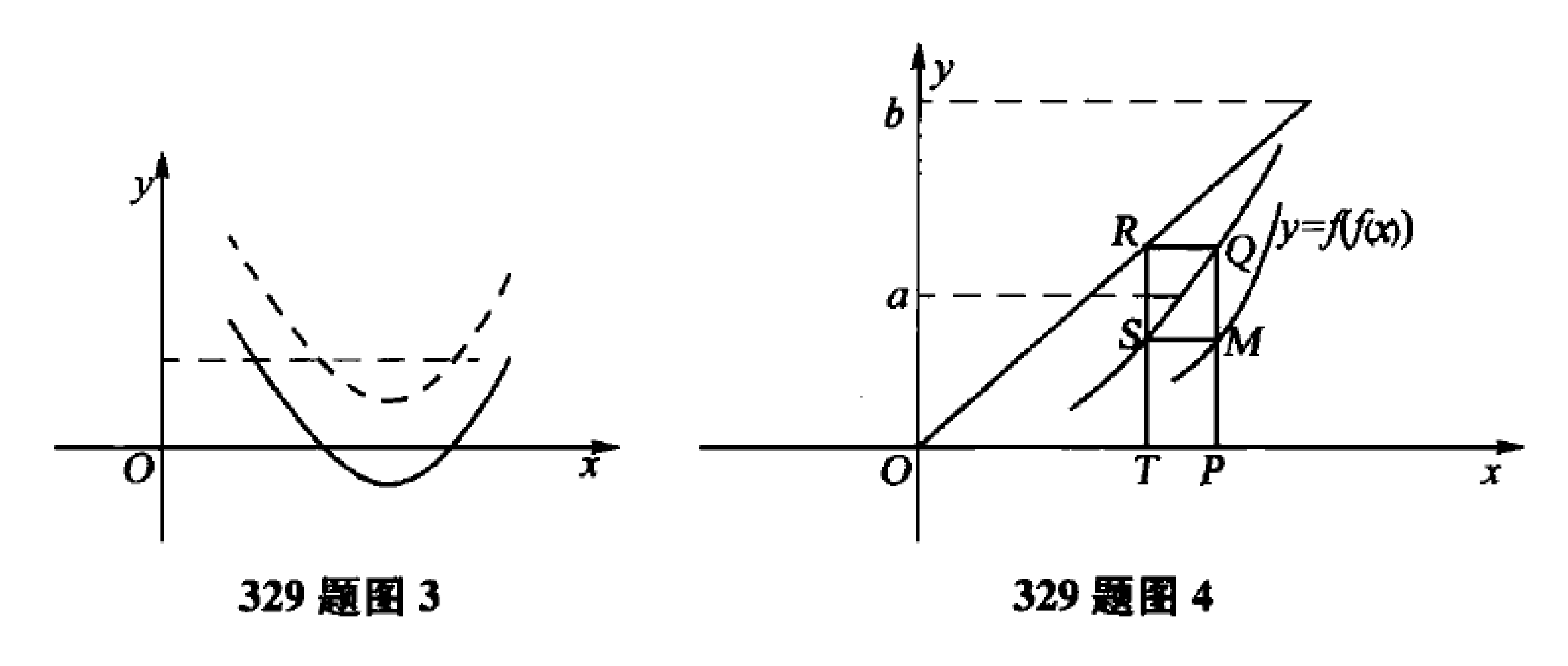
(2) 如 329 题图 2 所示, 虚线表 $y=f(x)$ 的图形, 实线表 $y=\sqrt{f(x)}$ 的图形.



329 题图 1　　　　329 题图 2

(3) 函数的定义域为使得 $f(x) > 0$ 的 x 全体，且 $\ln f(x) < f(x)$.

如 329 题图 3 所示，虚线表 $y = f(x)$ 的图形，实线表 $y = \ln f(x)$ 的图形.



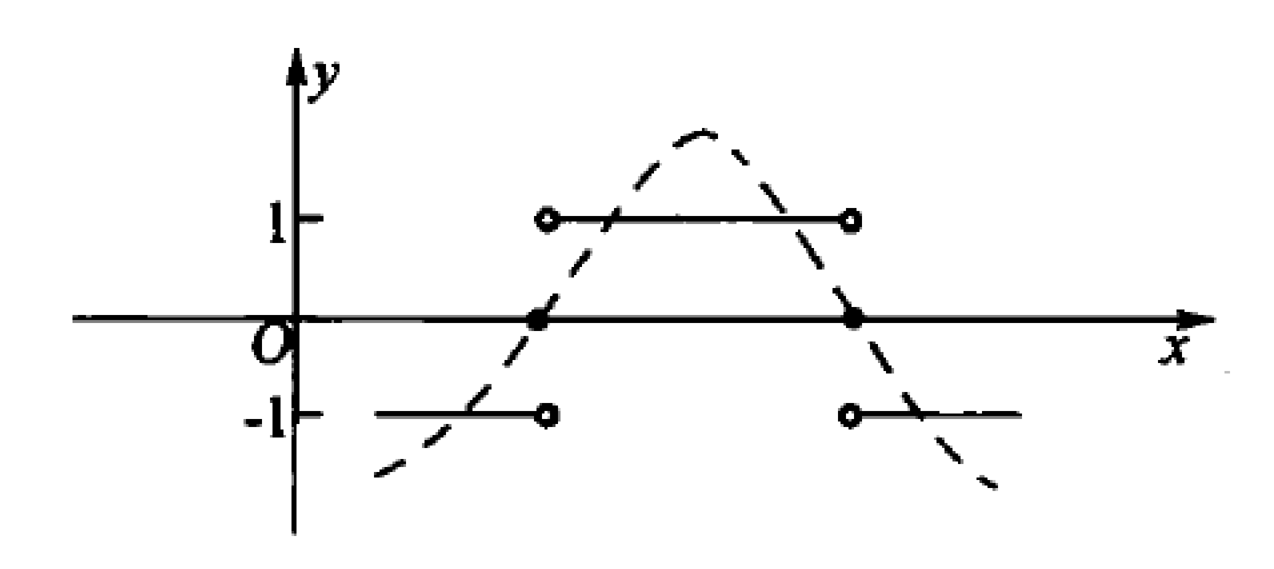
329 题图 3　　　　329 题图 4

(4) 不妨设 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$，则当 $a \leqslant f(x) \leqslant b$ 时，y 才有定义. 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点且 $a \leqslant f(x) \leqslant B$. 过 P 点作垂直于 Ox 轴的直线，它与 $y = f(x)$ 的图形相交于 Q 点，则 $PQ = f(x)$，过 Q 点引水平线与直线 $y = x$ 交于 R 点，过 R 点作直线垂直于 Ox 轴，垂足为 T. 且与 $y = f(x)$ 的图形相交于 S 点，则 $OT = TR = PQ = f(x)$. 因而 $TS = f(f(x))$. 过 S 点作垂直于 PQ 的直线，垂足为 M，此即 $y = f(f(x))$ 图形上的点，如图 329 题图 4 所示.

(5) 当 $f(x) > 0$ 时，$y = 1$；当 $f(x) = 0$ 时，$y = 0$.

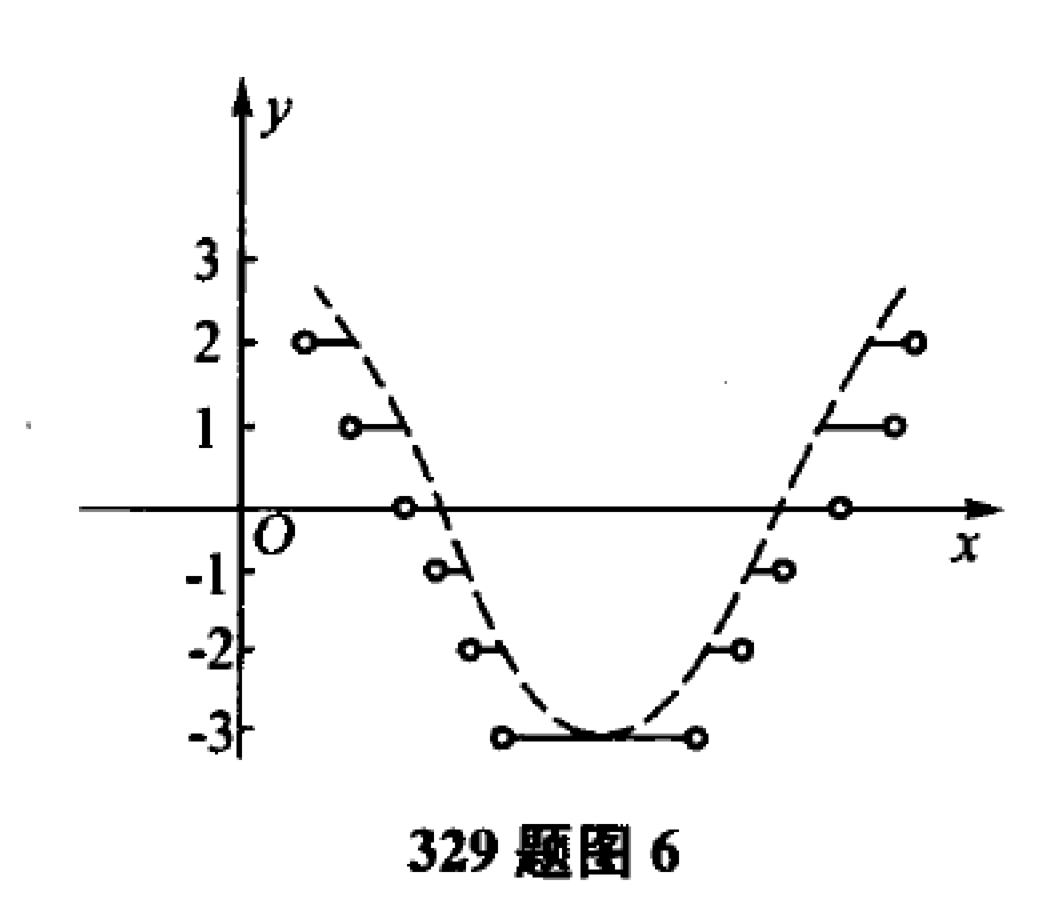
当 $f(x) < 0$ 时，$y = -1$，如 329 题图 5 所示.

虚线表 $y = f(x)$ 的图形，实线表 $y = \operatorname{sgn} f(x)$ 的图形.



329 题图 5

(6) 当 $n \leqslant f(x) \leqslant n+1$ 时，$y = n$（n 为整数），如 329 题图 6 所示.



329 题图 6

【329.1】 设

$$f(x) = (x-a)(b-x) \qquad (a < b),$$

作出以下函数的图形：

(1) $y = f(x)$；　　(2) $y = f^2(x)$；

(3) $y = \dfrac{1}{f(x)}$；　　(4) $y = \sqrt{f(x)}$；

(5) $y = e^{f(x)}$；　　(6) $y = \lg f(x)$；

(7) $y = \operatorname{arccot} f(x)$.

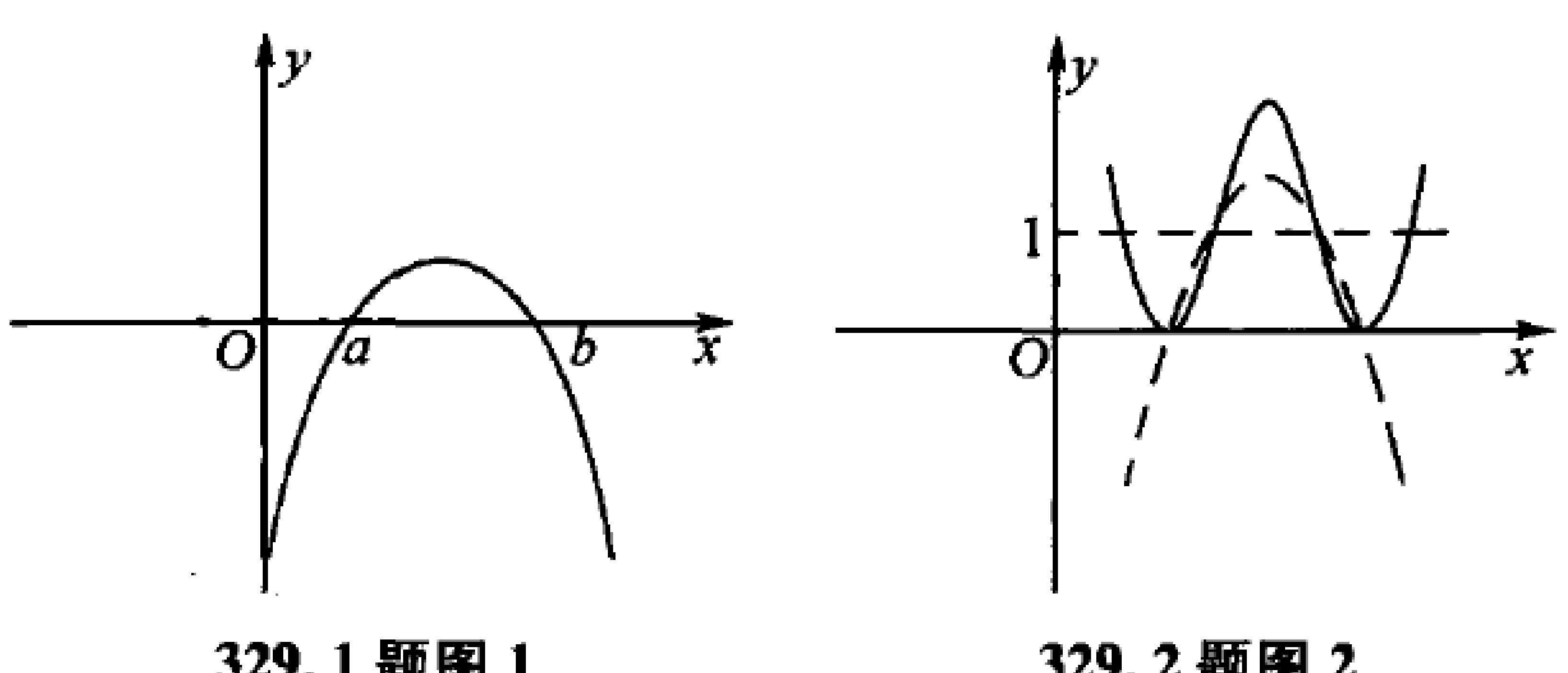
解 (1) $f(x) = -x^2 + (a+b)x - ab$

$$= -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

所以 $y = f(x)$ 的图形为开口向下的抛物线，顶点为

$\left(\frac{a+b}{2},\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$，如 329.1 题图 1 所示.

(2) 如 329.1 题图 2 所示，其中虚线表 $y=f(x)$ 的图形. 实线表 $y=f^2(x)$ 的图形$\left(设\frac{b-a}{2}>1\right)$.



329.1 题图 1　　329.2 题图 2

(3) 定义域为$(-\infty,a)\cup(a,b)\cup(b,+\infty)$，且

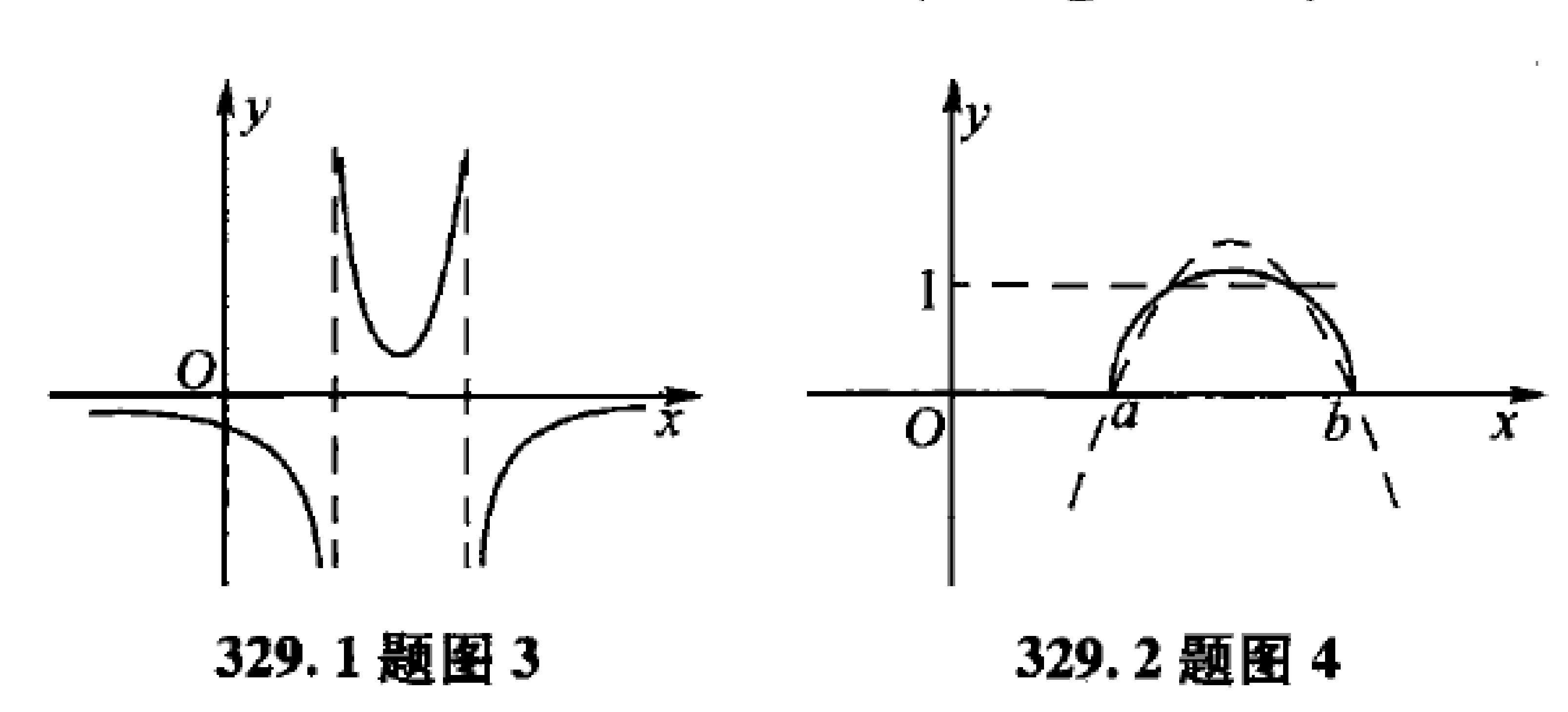
$$y=\frac{1}{(x-a)(b-x)}$$

$$=\frac{1}{b-a}\frac{1}{x-a}-\frac{1}{b-a}\frac{1}{x-b}.$$

$y=0$，$x=a$ 及 $x=b$ 为图形的渐近线.

函数的图形为 $y=\frac{1}{b-a}\frac{1}{x-a}$ 及 $y=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{x-b}$ 的图形的叠加，如 329.1 题图 3 所示.

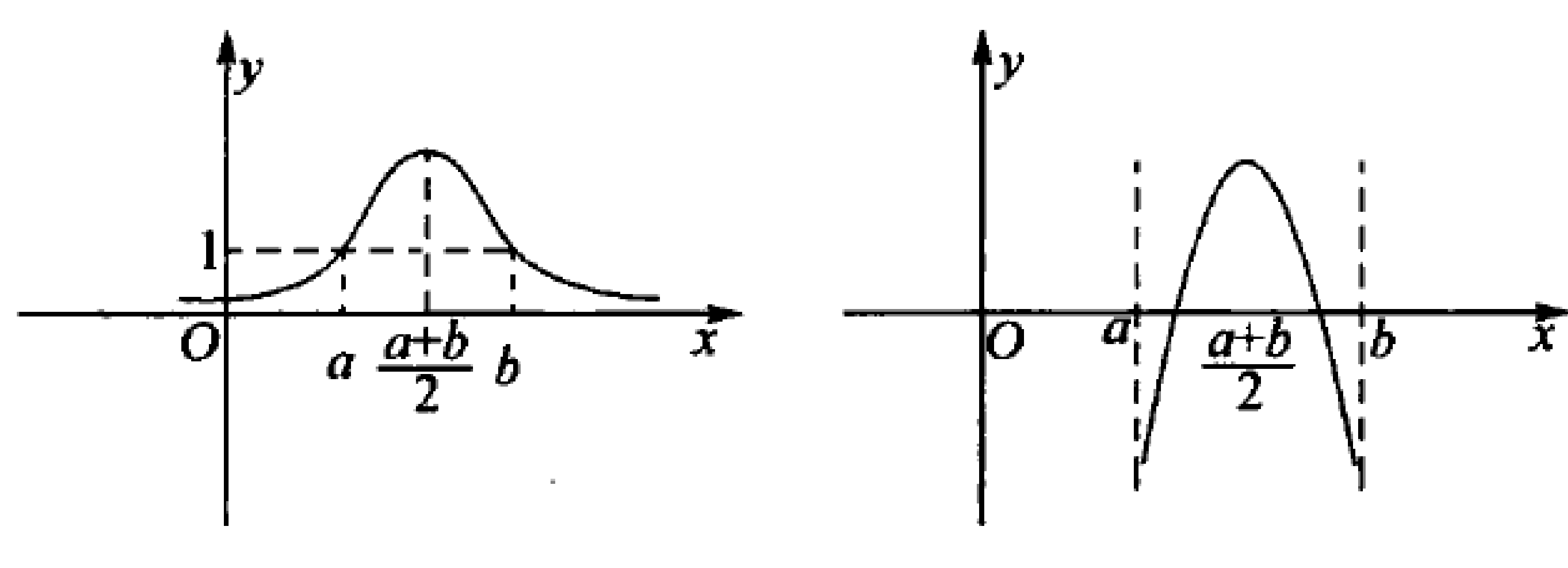
(4) 定义域为$[a,b]$，如 329.1 题图 4 所示，虚线表 $y=f(x)$ 的图形，实线表 $y=\sqrt{f(x)}$ 的图形$\left(设\frac{b-a}{2}>1\right)$.



329.1 题图 3　　329.2 题图 4

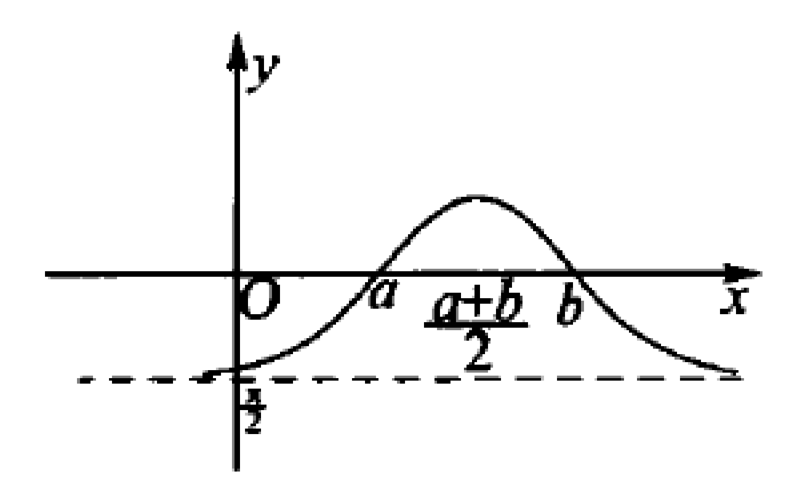
(5) 如 329.1 题图 5 所示.

(6) 存在域(a,b),$x=a$ 及 $x=b$ 为图形的渐近线,如 329.1 题图 6 所示.



329.1 题图 5　　329.2 题图 6

(7) 如 329.1 题图 7 所示.



329.1 题图 7

【329.2】 作出下列各函数在:(a) $f(x)=x^2$, (b) $f(x)=x^3$ 时的图形:

(1) $y=\arcsin[\sin f(x)]$;

(2) $y=\arcsin[\cos f(x)]$;

(3) $y=\arccos[\sin f(x)]$;

(4) $y=\arccos[\cos f(x)]$;

(5) $y=\arctan[\tan f(x)]$.

解 (1) (a) 当$0\leqslant x^2\leqslant\frac{\pi}{2}$,即$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$时,$y=x^2$.

当$\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant\frac{3\pi}{2}$,即$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$时,$y=\pi-x^2$.

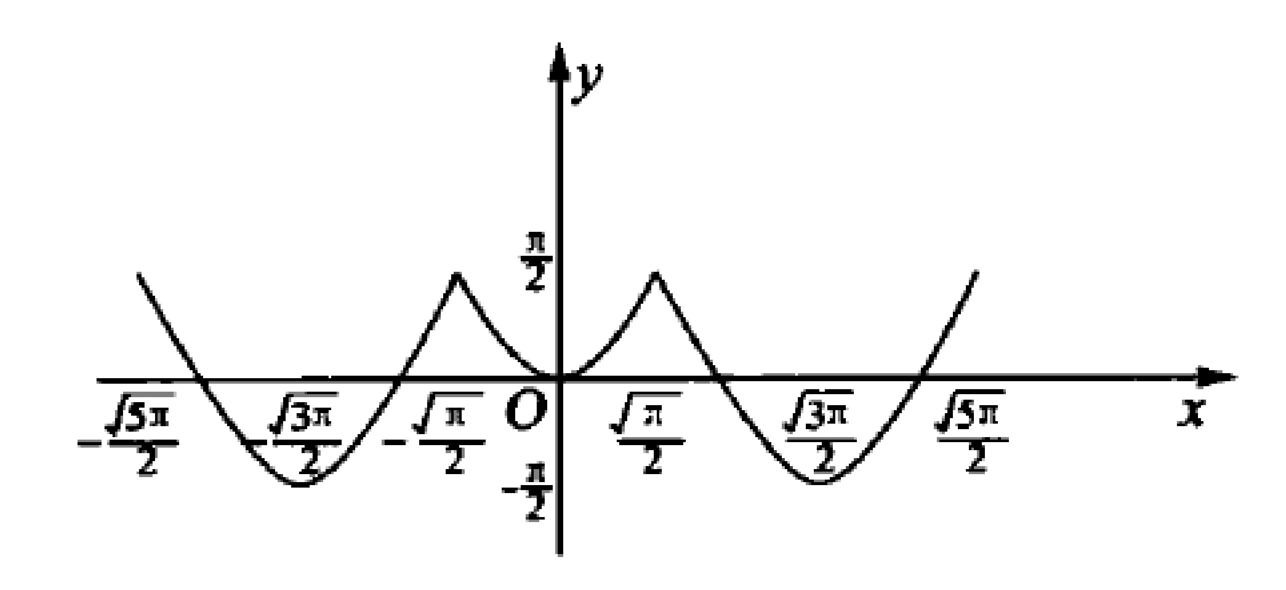
一般地,当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,

$$y = x^2 - 2k\pi \qquad (k = 1,2\cdots).$$

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant x^2 \leqslant 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y = (\pi - x^2) + 2k\pi \qquad (k = 0,1,2\cdots).$$

如 329.2 题图 1(a) 所示.



329.2 题图 1(*a*)

(b) 当 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x^3 \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,即 $-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}, y = x^3$.

当 $\frac{\pi}{2} \leqslant x^3 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ 时,即 $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}, y = \pi - x^3$.

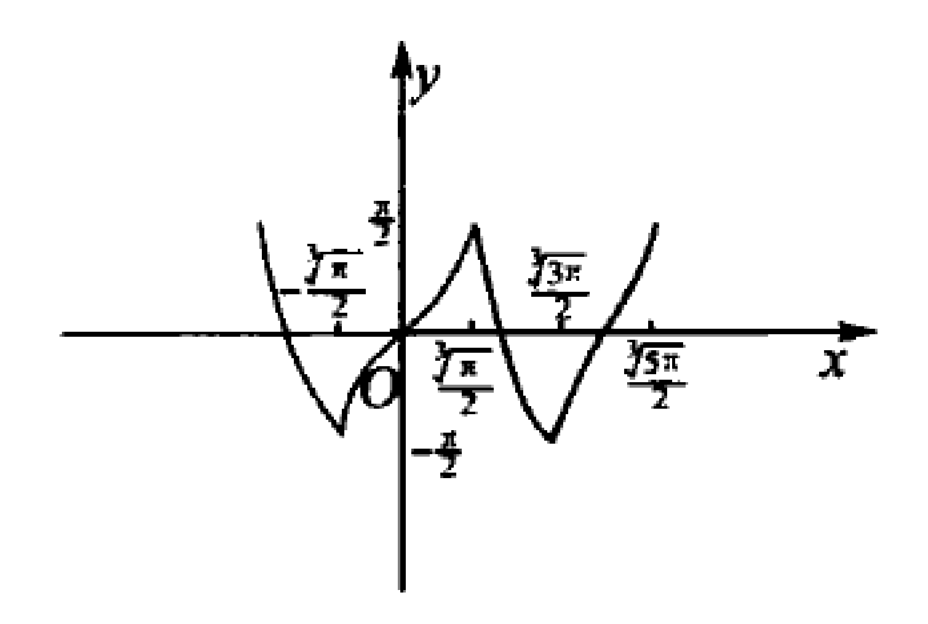
一般地,当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x^3 \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,

$$y = x^3 - 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant x^3 \leqslant 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y = (\pi - x^3) + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

如 329.2 题图 1(b) 所示.



329.2 题图 1(b)

(2) (a) 当 $0 \leqslant x^2 \leqslant \pi$，即 $-\sqrt{\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi}$ 时，

$$y = \frac{\pi}{2} - x^2.$$

当 $\pi \leqslant x^2 \leqslant 2\pi$，即 $\sqrt{\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2\pi}$ 时，

$$y = x^2 - \frac{3\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + x^2\right) - 2\pi.$$

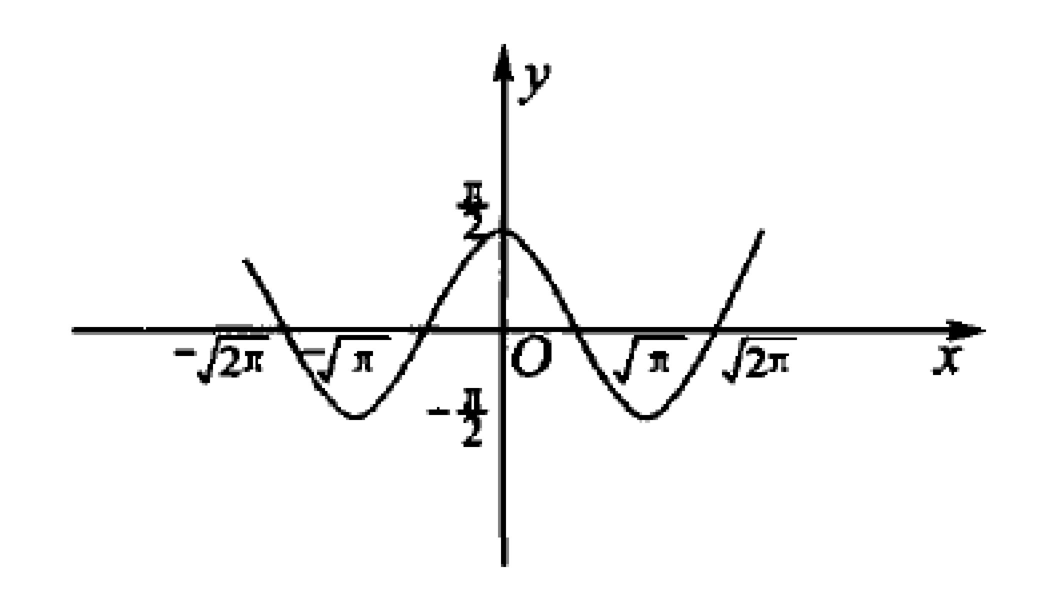
一般地，当 $(2k-1)\pi \leqslant x^2 \leqslant 2k\pi$ 时，

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + x^2\right) - 2k\pi \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

当 $2k\pi \leqslant x^2 \leqslant (2k+1)\pi$ 时，

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - x^2\right) + 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

如 329.2 题图 2(a) 所示.



329.2 题图 2(a)

(b) 当 $-\pi \leqslant x^3 \leqslant 0$ 时，即

$$-\sqrt[3]{\pi} \leqslant x \leqslant 0, \qquad y = \frac{\pi}{2} + x^3.$$

当 $0 \leqslant x^3 \leqslant \pi$ 时，即 $0 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{\pi}$，$y = \frac{\pi}{2} - x^3$.

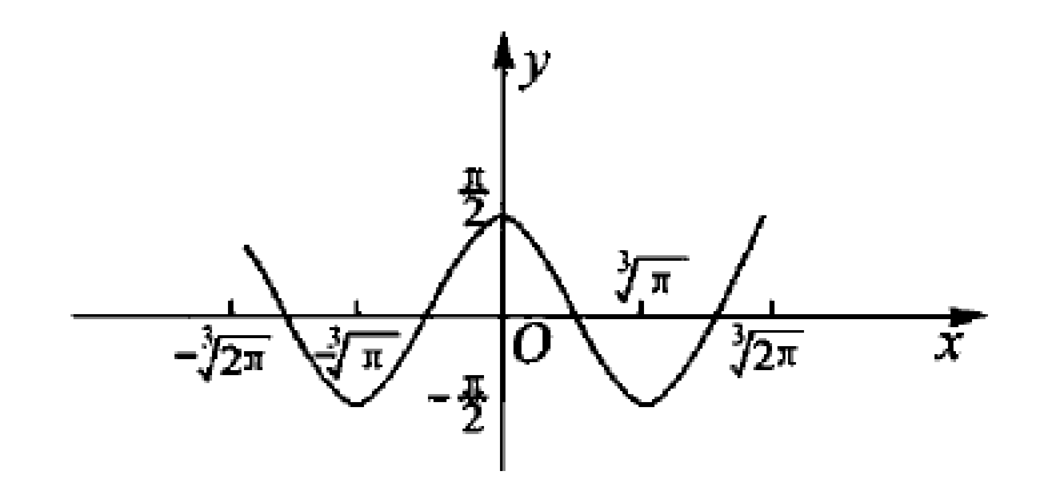
一般地，当 $(2k-1)\pi \leqslant x^3 \leqslant 2k\pi$ 时，

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + x^3\right) - 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $2k\pi \leqslant x^3 \leqslant (2k+1)\pi$ 时，

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - x^3\right) + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

如 329.2 题图 2(b) 所示.



329.2 题图 2(b)

(3) (a) $\cos y=\sin f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-f(x)\right)$,

且 $0\leqslant y\leqslant\pi$.

当 $0\leqslant x^2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, $y=\frac{\pi}{2}-x^2$;

当 $\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时, $y=x^2-\frac{\pi}{2}$;

当 $\frac{3\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant\frac{5\pi}{2}$ 时, $y=\frac{\pi}{2}-x^2+2\pi$;

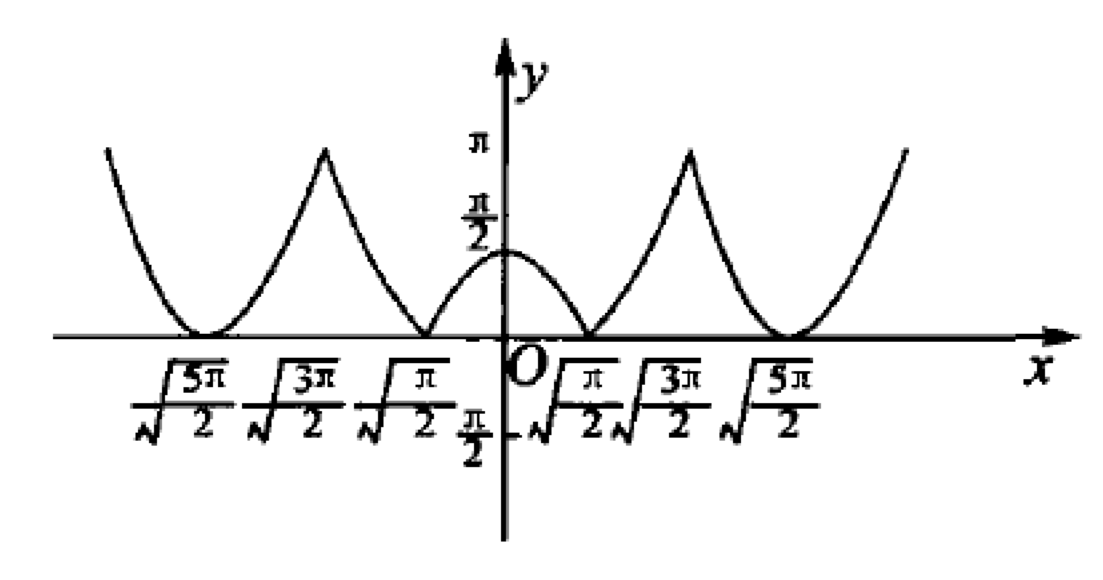
一般地,当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,

$$y=\frac{\pi}{2}-x^2+2k\pi\qquad(k=1,2,\cdots);$$

当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y=x^2-\frac{\pi}{2}-2k\pi\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

如 329.2 题图 3(a) 所示.



329.2 题图 3(a)

(b) 当$-\frac{\pi}{2}\leqslant x^3\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$y=\frac{\pi}{2}-x^3$；

当$\frac{\pi}{2}\leqslant x^3\leqslant\frac{3\pi}{2}$时，$y=x^3-\frac{\pi}{2}$.

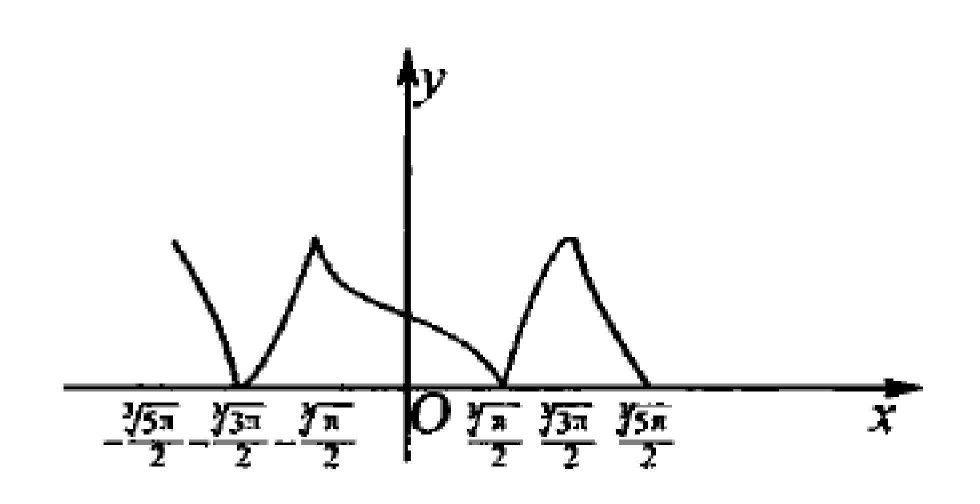
一般地，当$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x^3\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$时，

$$y=\frac{\pi}{2}-x^3+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

当$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x^3\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$时，

$$y=x^3-\frac{\pi}{2}-2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如 329.2 题图 3(b) 所示.



329.2 题图 3(b)

(4) (a) 当$0\leqslant x^2\leqslant\pi$，即$-\sqrt{\pi}\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi}$时，$y=x^2$，当$\pi\leqslant x^2\leqslant 2\pi$时

$$y=2\pi-x^2.$$

一般地，当$(2k-1)\pi\leqslant x^2\leqslant 2k\pi$时，

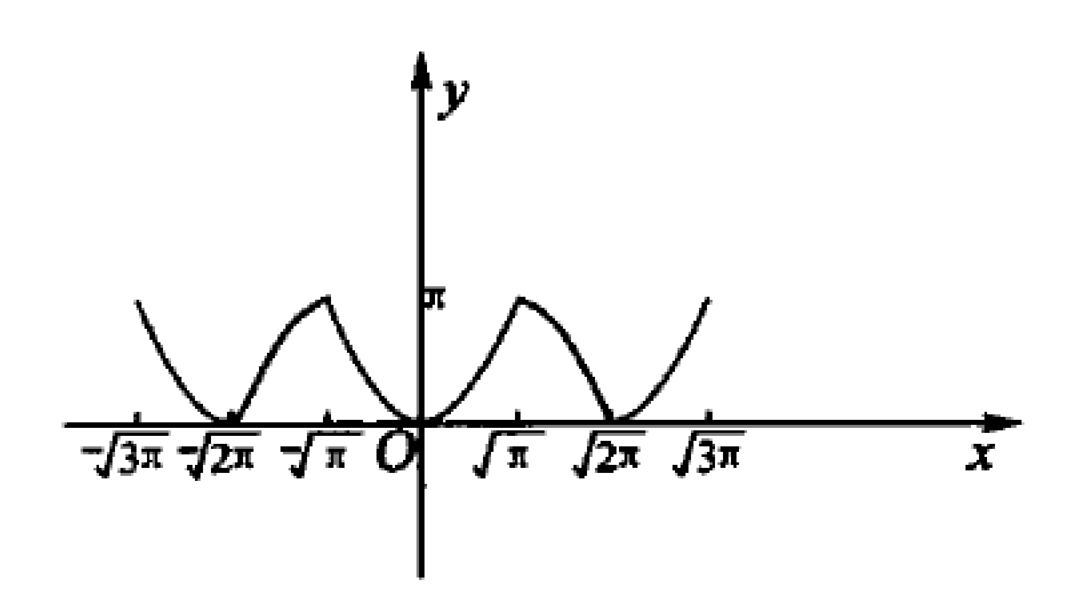
$$y=2k\pi-x^2 \qquad (k=1,2,\cdots);$$

当$2k\pi\leqslant x^2\leqslant(2k+1)\pi$时，

$$y=x^2-2k\pi \qquad (k=0,1,2,\cdots);$$

y的零点为$x=\pm\sqrt{2k\pi}$. 而$\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt{2(k+1)\pi}-\sqrt{2k\pi})=0$

所以当x趋于无穷时，零点起来越密集，即y的图形的振动越来越频密，如 329.2 题图 4(a) 所示.



329.2 题图 4(a)

(b) 当 $0 \leqslant x^3 \leqslant \pi$ 时，$y = x^3$；

当 $\pi \leqslant x^3 \leqslant 2\pi$ 时，$y = 2\pi - x^3$；

当 $-\pi \leqslant x^3 \leqslant 0$ 时，$y = -x^3$.

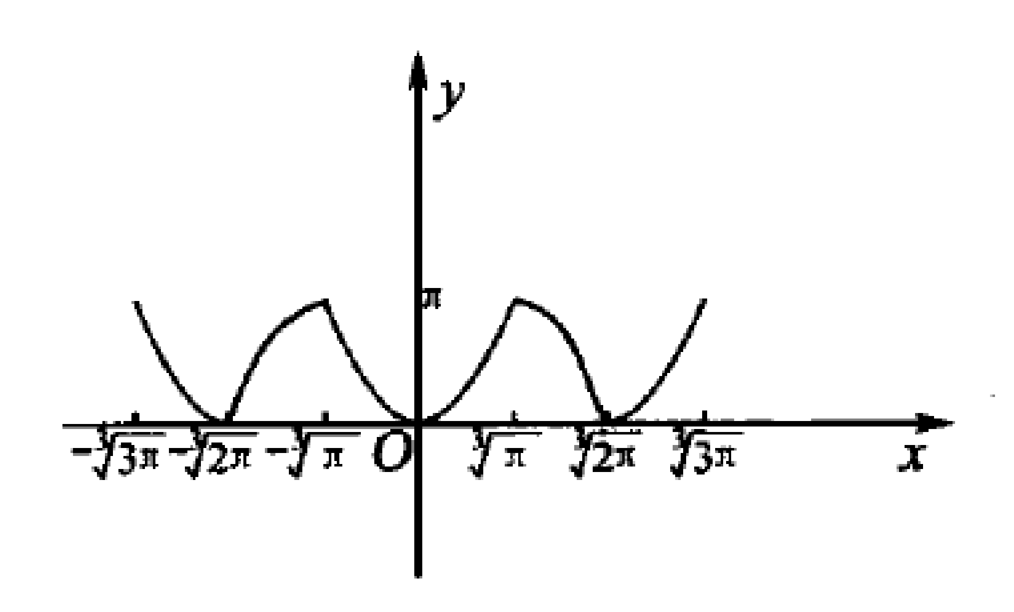
一般地，当$(2k-1)\pi \leqslant x^3 \leqslant 2k\pi$ 时，

$$y = 2k\pi - x^3 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

当 $2k\pi \leqslant x^3 \leqslant (2k+1)\pi$ 时，

$$y = x^3 - 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

如 329.2 题图 4(b) 所示.



329.2 题图 4(b)

(5) (a) 当 $0 < x^2 < \frac{\pi}{2}$，即 $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，

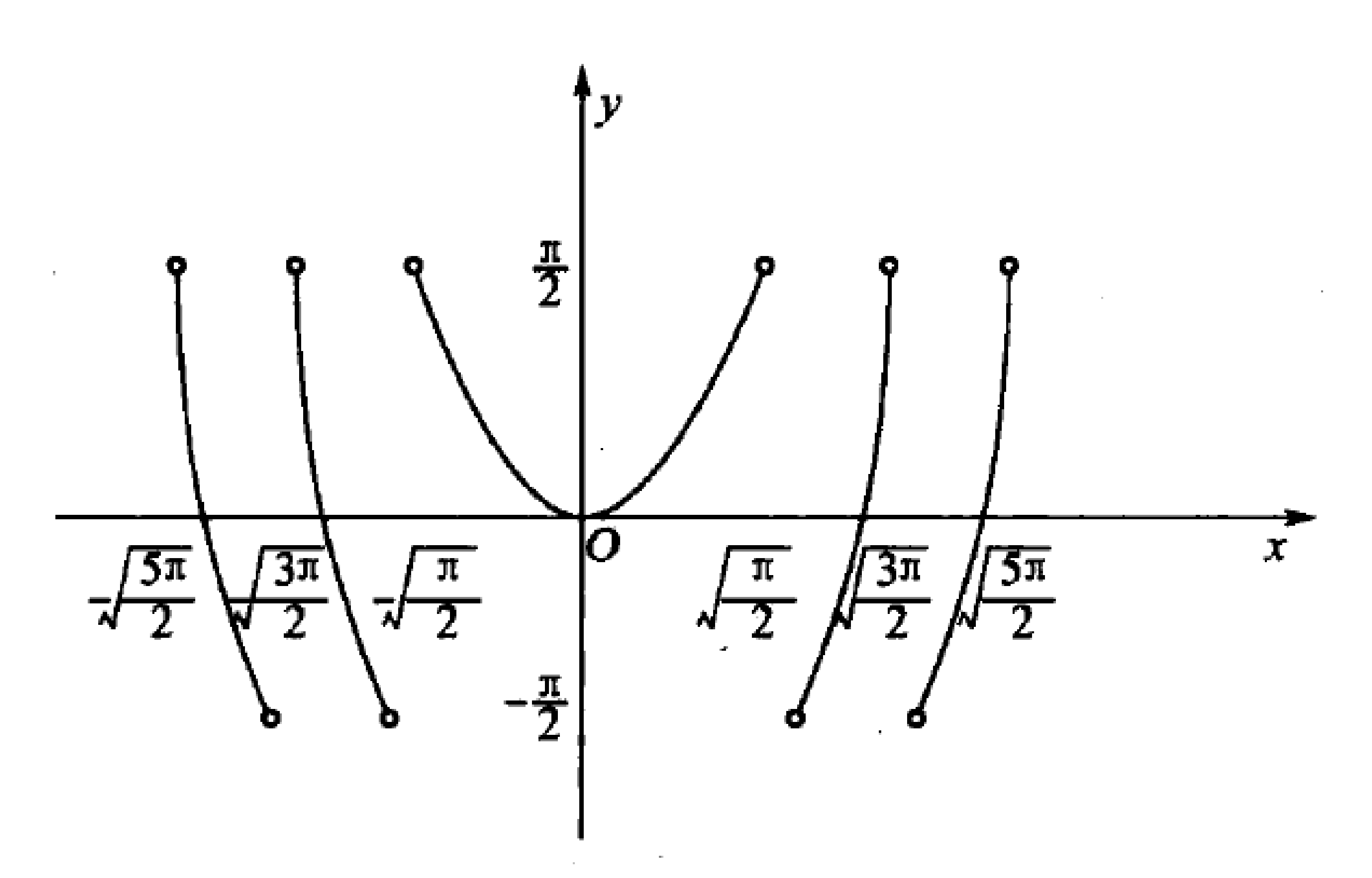
$$y = x^2,$$

当 $\frac{\pi}{2} < x^2 < \frac{3\pi}{2}$ 时，$y = x^2 - \pi$；

当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x^2 < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时，

$$y = x^2 - k\pi \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

如 329.2 题图 5(a) 所示.



329.2 题图 5(a)

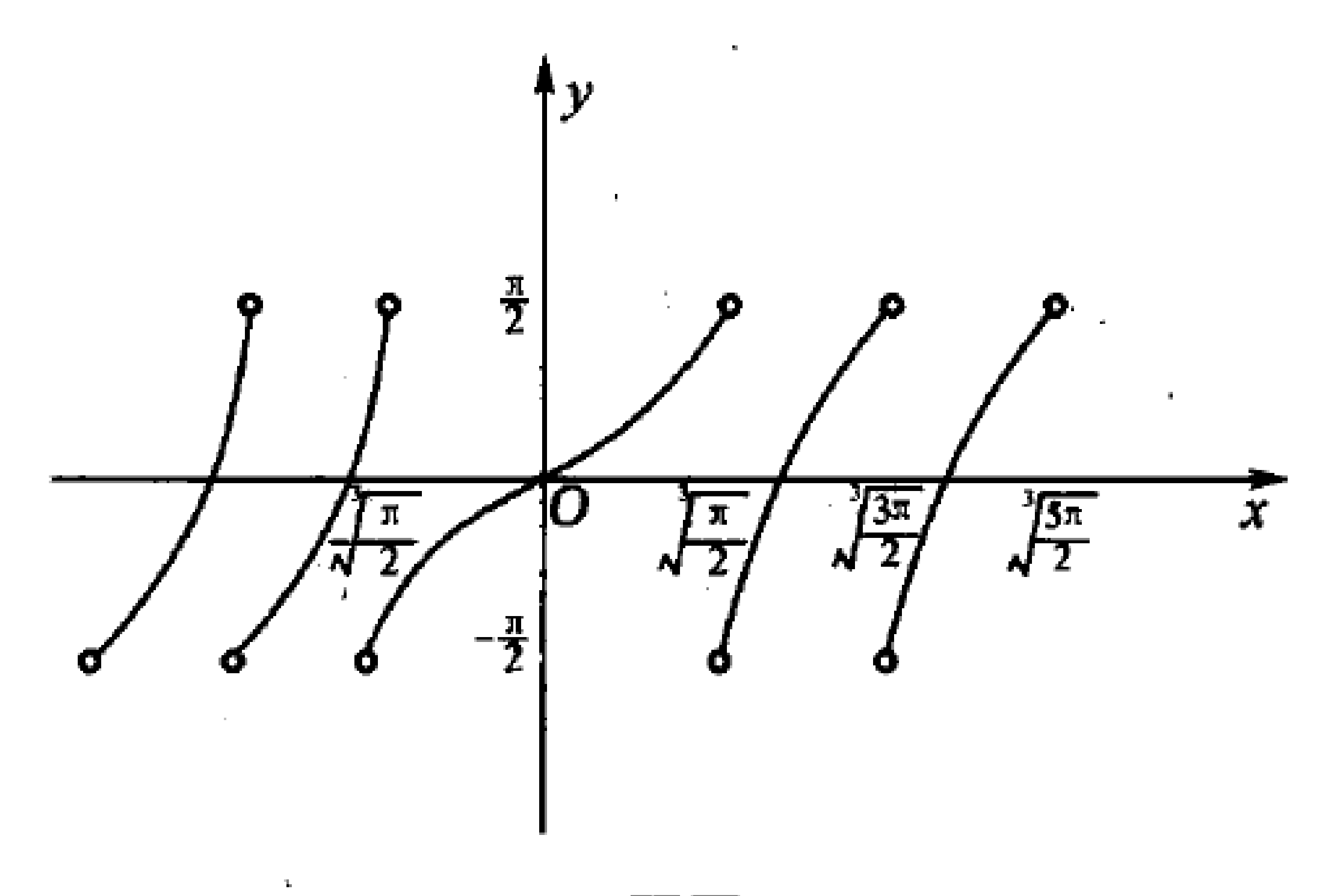
(b) 当 $-\frac{a}{2} < x^3 < \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x^3$;

当 $\frac{\pi}{2} < x^3 < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x^3 - \pi$.

一般地,当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时,

$$y = x - k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

如 329.2 题图 5(b) 所示.

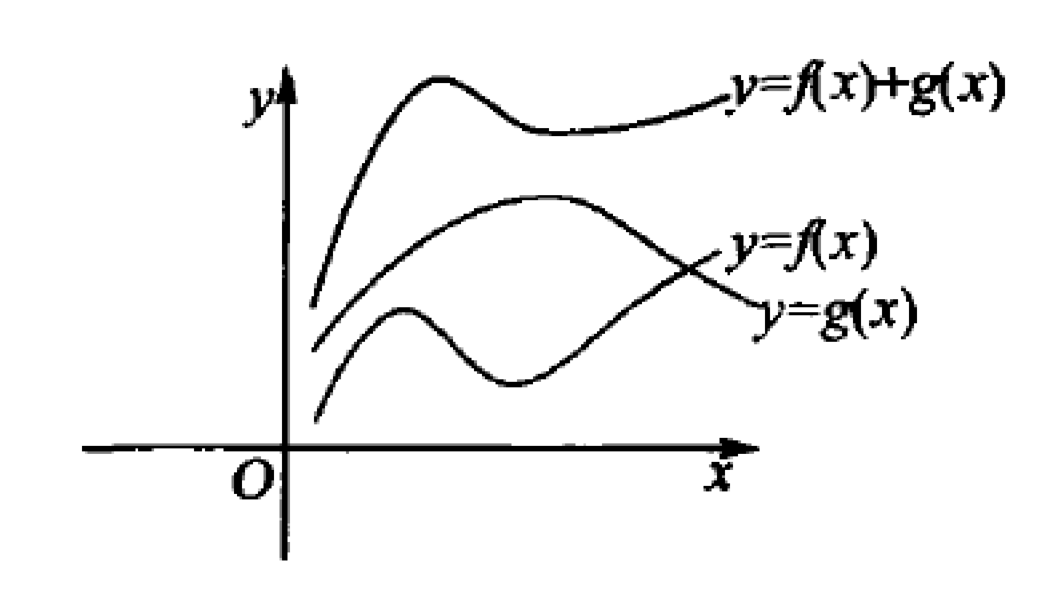


329.2 题图 5(b)

【330】 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形，作出以下函数的图形：

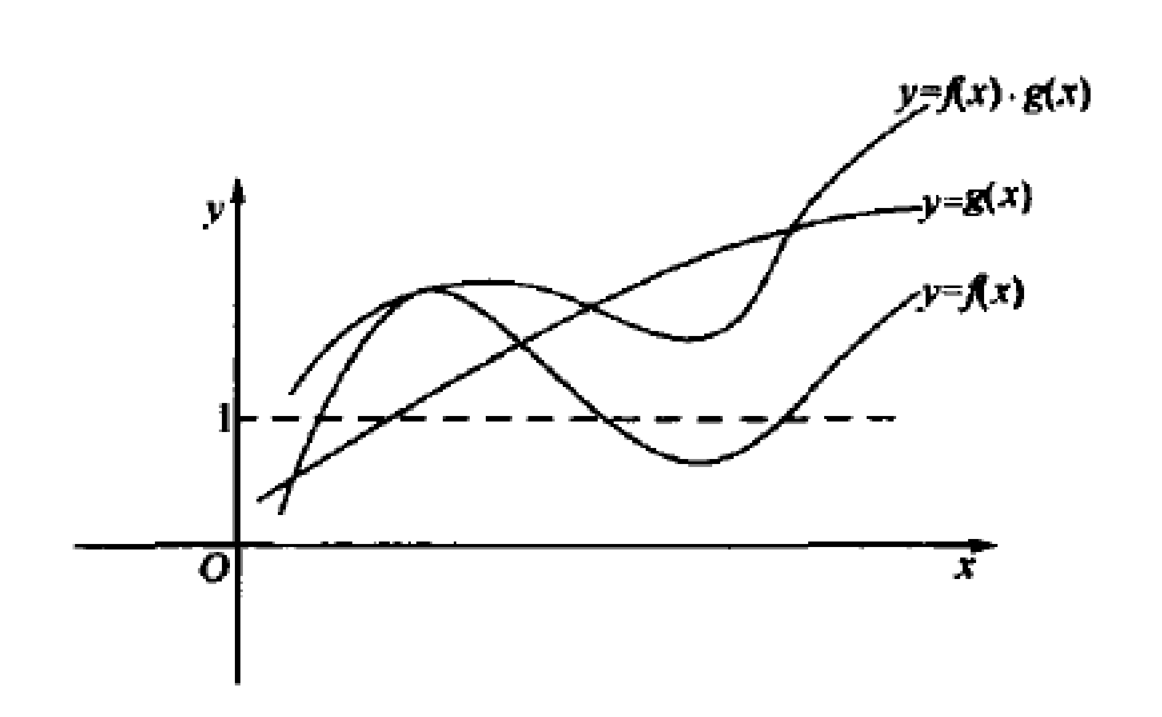
(1) $y = f(x) + g(x)$；(2) $y = f(x)g(x)$；(3) $y = f(g(x))$.

解 (1) 利用图形相加法即得如 330 题图 1 所示.



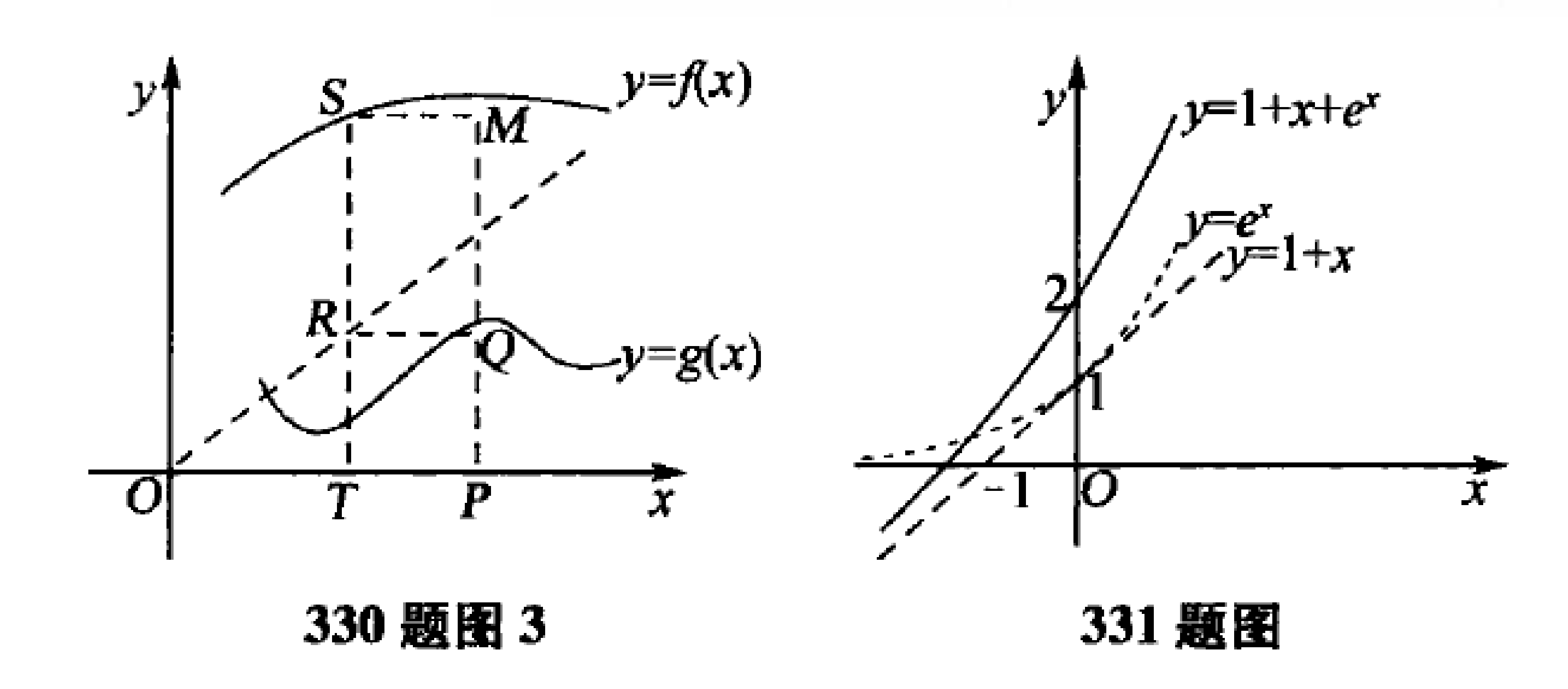
330 题图 1

(2) 利用图形相乘法即，如 330 题图 2 所示.



330 题图 2

(3) 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引垂直于 Ox 轴的直线. 它和 $y=g(x)$ 的图形相交于 Q 点(设定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). 则 $PQ=g(x)$，过 Q 点作平行于 Ox 轴的直线，它与 $y=x$ 交于 R 点，过 R 点作垂直于 Ox 轴的直线. 它与 Ox 轴及 $y=f(x)$ 的图形的交点分别为 T 与 S，则 $OT=TR=PQ=g(x)$，因而，$TS=f(g(x))$，最后，过 S 作垂直于直线 PQ 的直线，交 PQ 于 M 点. M 点即为函数 $y=f(g(x))$ 图形上的一点. 对 $g(x)$ 落在 $f(x)$ 的定义域内的每点，应用同样的方法，即得 $y=f(g(x))$ 的图形.



330 题图 3　　　331 题图

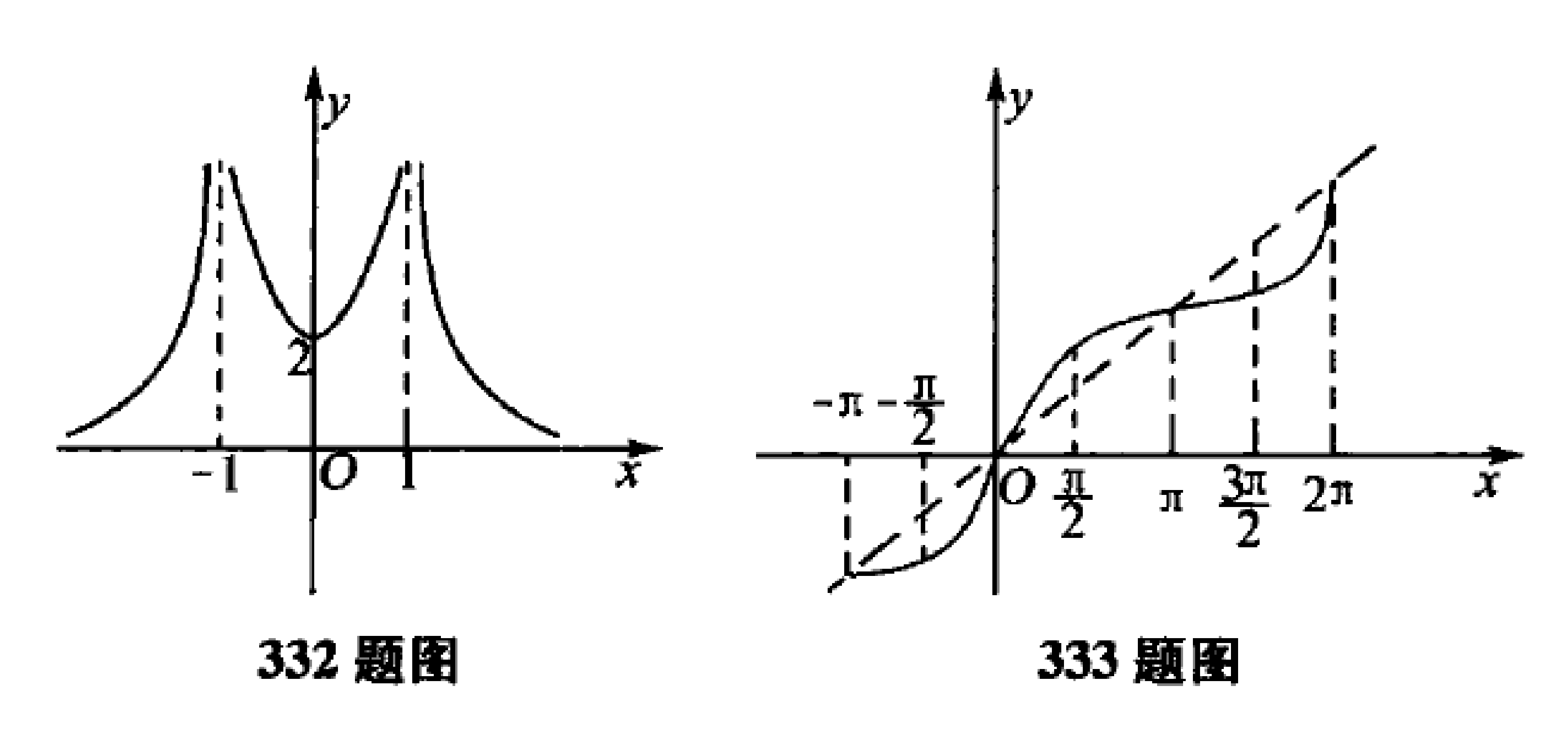
运用图形相加法，作出以下各函数的图形(331 ～ 339).

【331】 $y = 1 + x + e^x$.

解　如 331 题图所示.

【332】 $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

解　图形关于 Oy 轴对称，且以 $y = 0$，$x = -1$ 及 $x = 1$ 为渐近线，如 332 题图所示.



332 题图　　　333 题图

【333】 $y = x + \sin x$.

解　如 333 题图所示.

【334】 $y = x + \arctan x$.

解　如 334 题图所示.

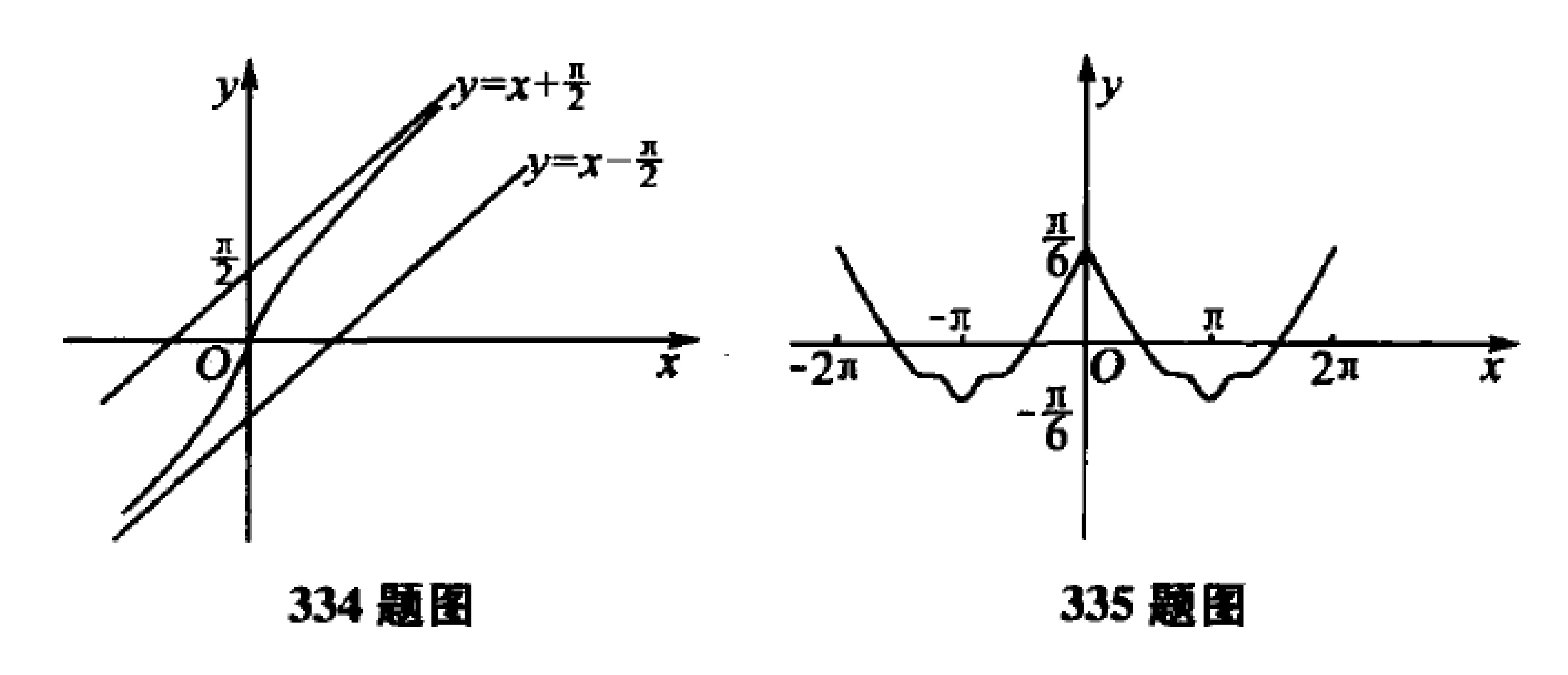
【335】 $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

解　图形关于 Oy 轴对称，又

$$\cos(2k\pi - x) + \frac{1}{2}\cos 2(2k\pi - x) + \frac{1}{3}\cos 3(2k\pi - x)$$

$$= \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x,$$

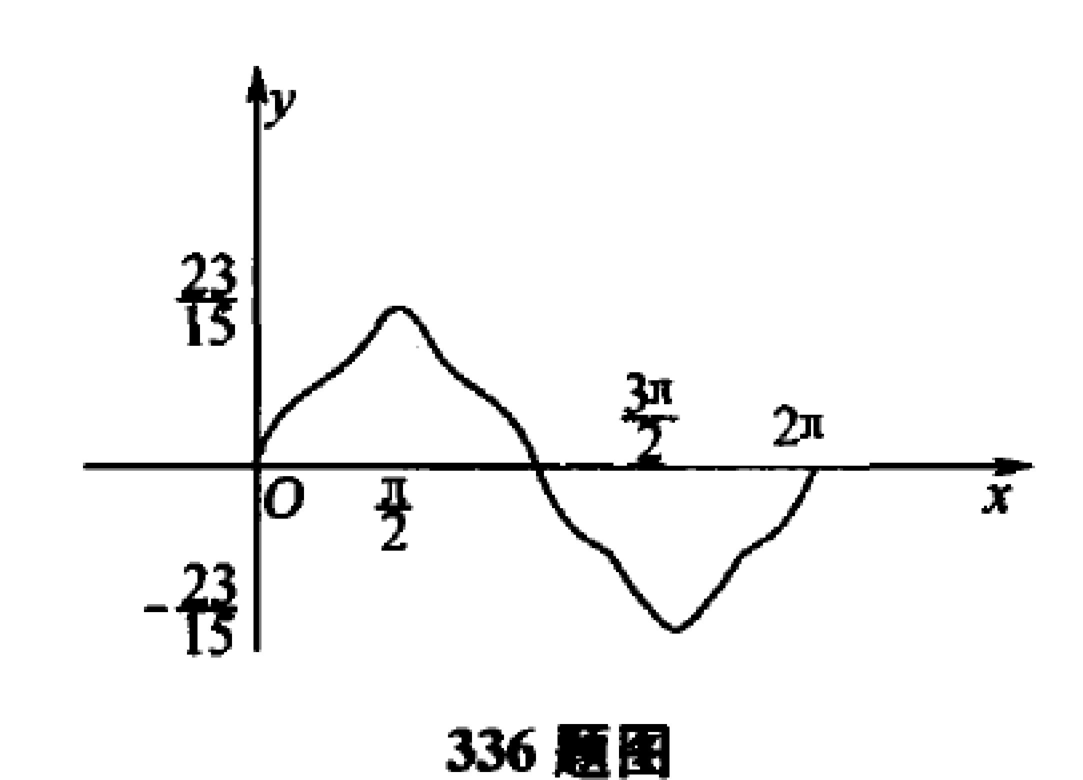
所以，图形关于直线 $x = k\pi$ 对称，函数是以 2π 为周期的函数，如 335 题图所示.



334 题图　　335 题图

【336】 $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x.$

解　图形关于原点对称，且 y 是以 2π 为周期的周期函数，并且 $f(x+\pi) = -f(x)$，如 336 题图所示.

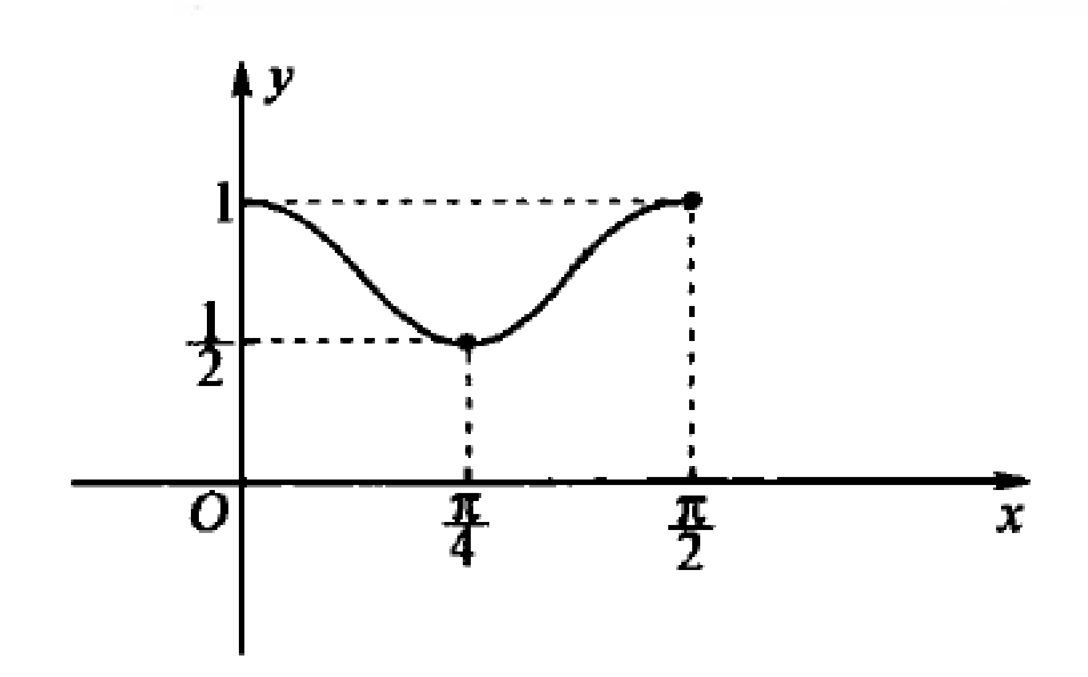


336 题图

【337】 $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解　$y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$

图形关于 Oy 轴对称，且函数以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期，在 $x = 0$ 及 $x = \frac{\pi}{2}$ 取极大值 1，在 $x = \frac{\pi}{4}$ 取极小值 $\frac{1}{2}$，如 337 题图.



337 题图

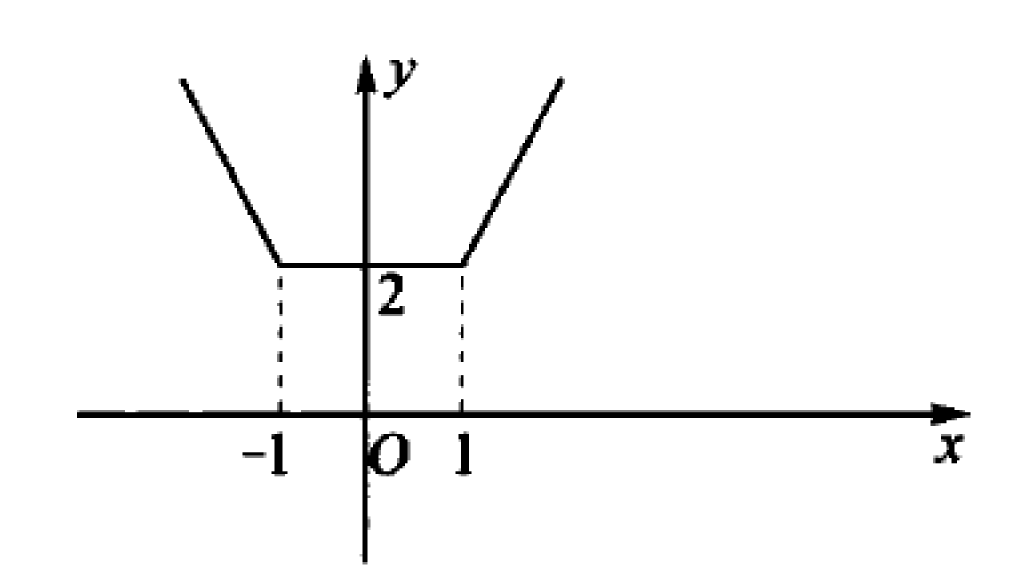
【338】 $y=|1-x|+|1+x|$.

解 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=2$

当 $x<-1$ 时，$y=-2x$；

当 $x>1$ 时，$y=2x$.

如 338 题图所示.



338 题图

【339】 $y=|1-x|-|1+x|$.

解 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=-2x$；

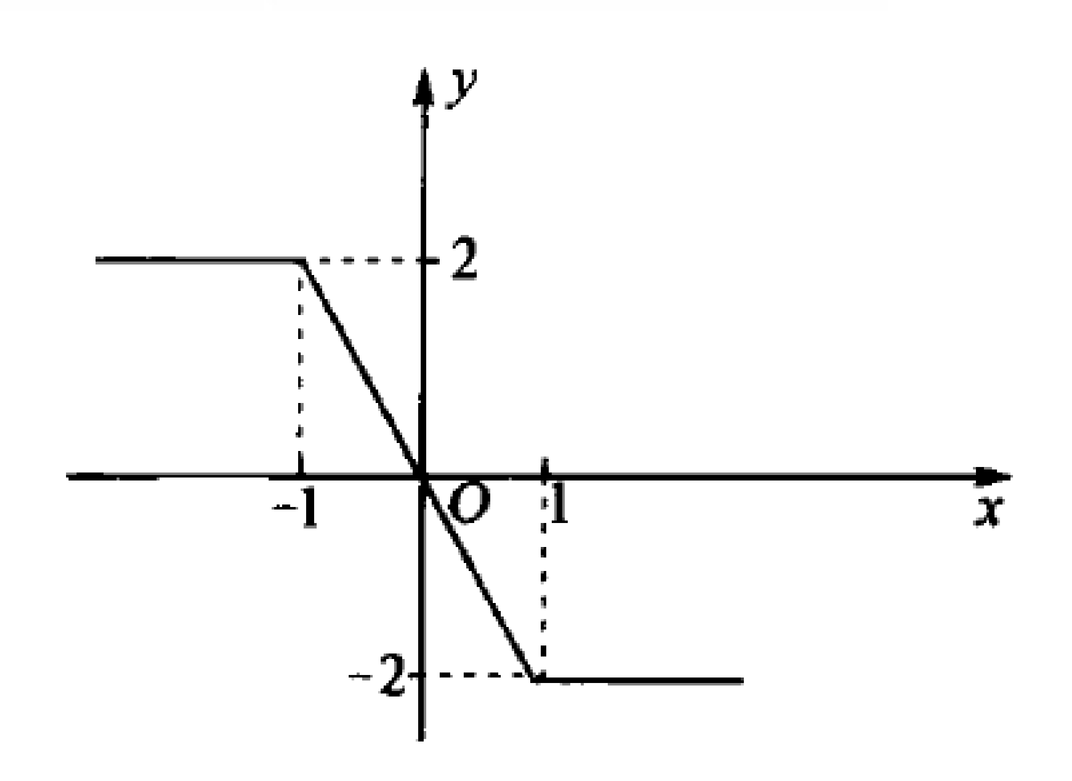
当 $x<-1$ 时，$y=2$；

当 $x>1$ 时，$y=-2$.

如 339 题图所示.

【340】 作出以下双曲线函数的图形：

(1) $y=\mathrm{ch}x$，其中 $\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$；



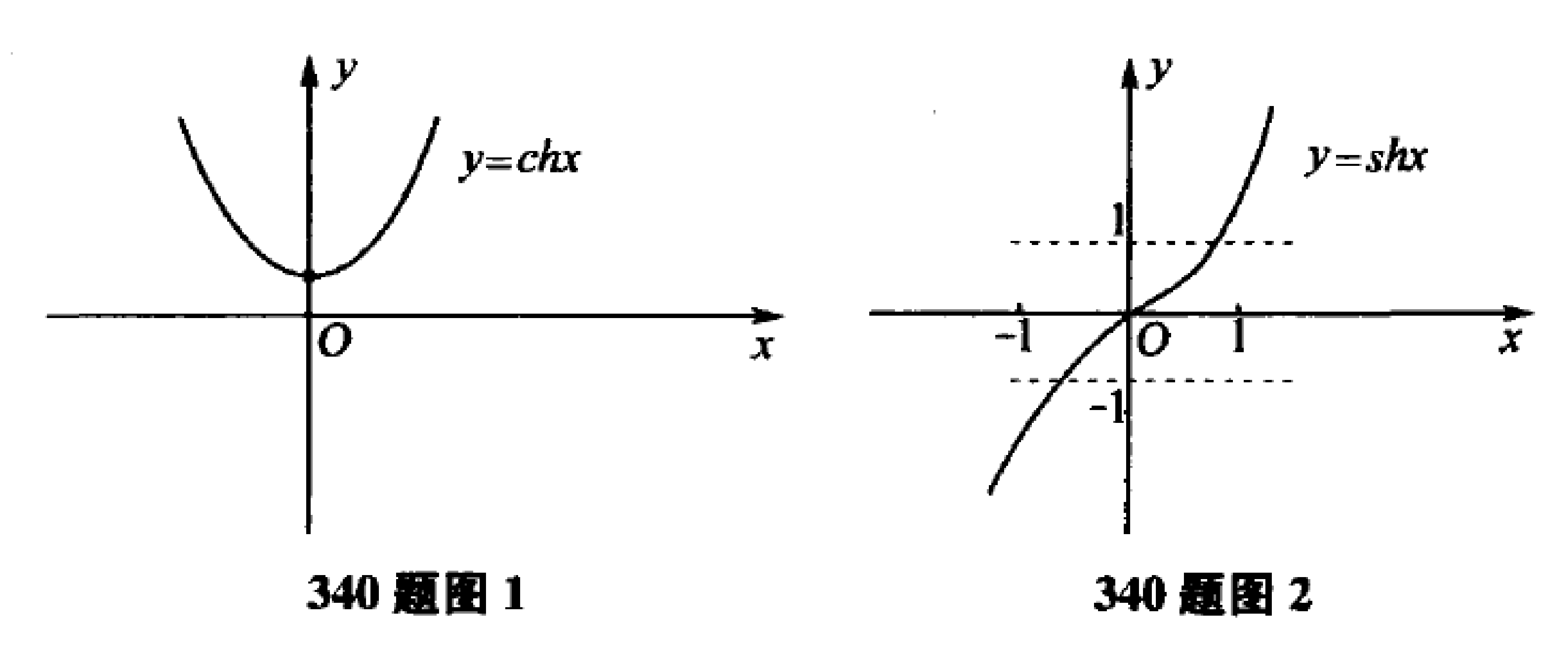
339 题图

(2) $y = \mathrm{sh}x$,其中 $\mathrm{sh}x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$;

(3) $y = \mathrm{th}x$,其中 $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

解 (1) 如 340 题图 1 所示.

(2) 如 340 题图 2 所示.



340 题图 1　　340 题图 2

(3) 如 340 题图 3 所示.

运用图形相乘法,作出以下函数的图形(341 ~ 348).

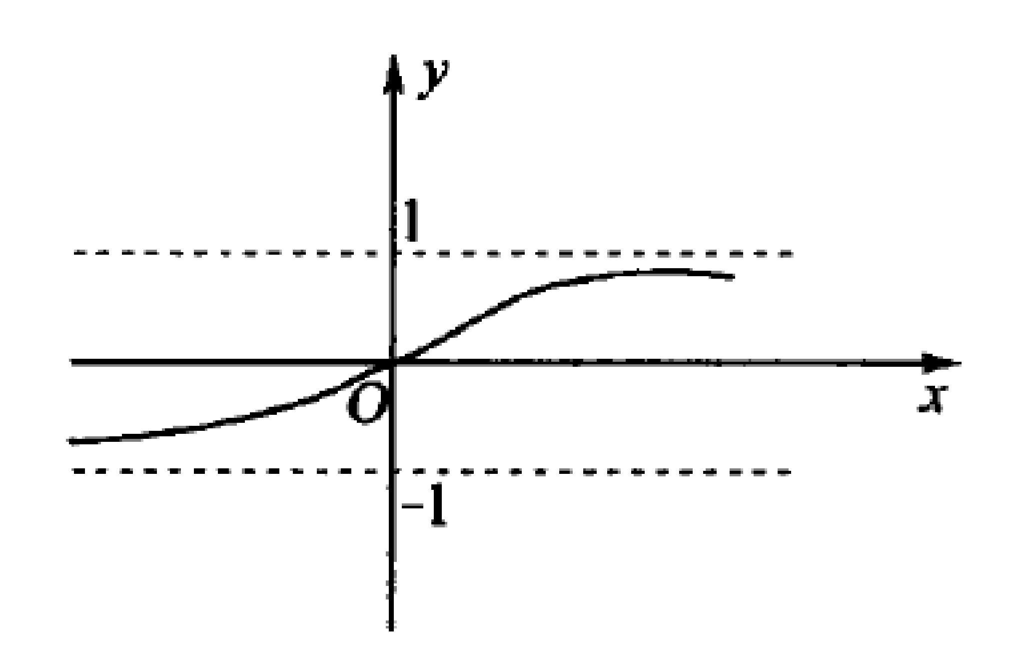
【341】 $y = x\sin x$.

解 图形关于 Oy 轴对称,且

$$|x\sin x| \leqslant |x|$$

即图形夹在两直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 之间.

当 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时,$y = 0$;

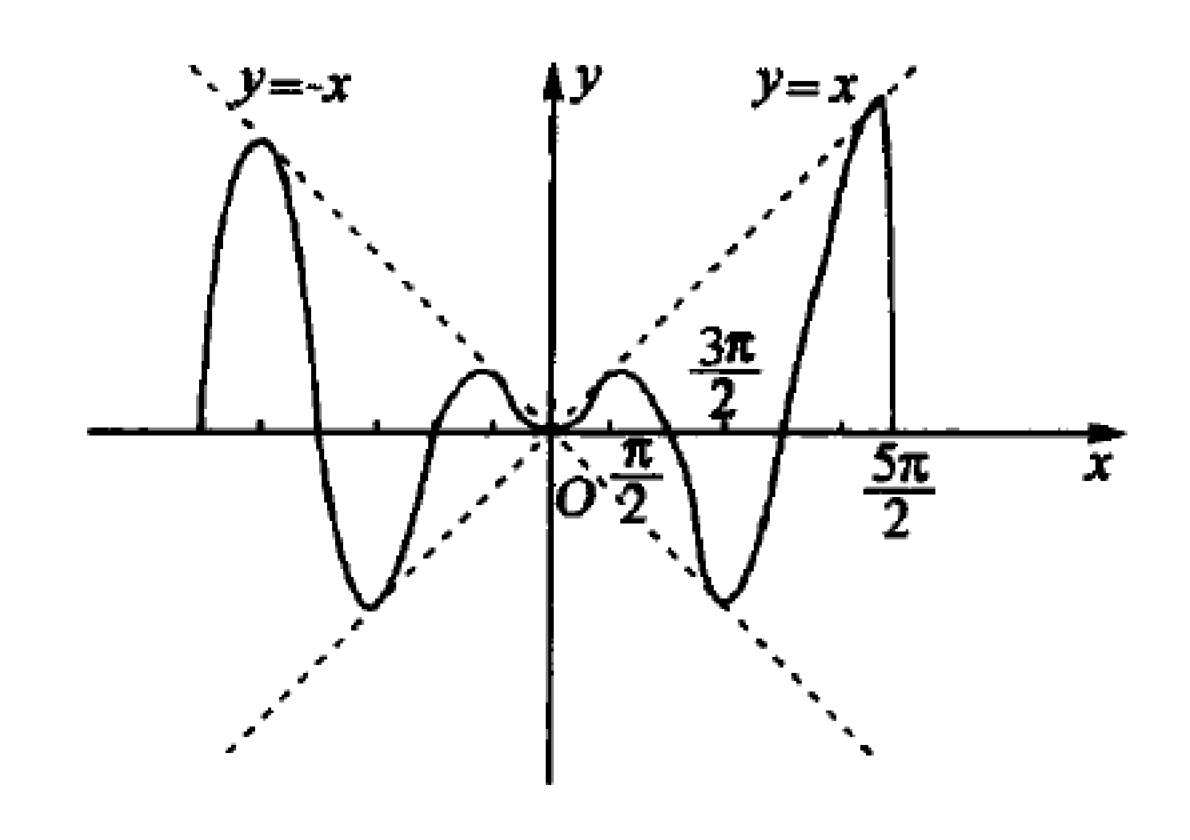


340 题图 3

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，$y = x$；

当 $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时，$y = -x$.

如 341 题图所示.



341 题图

【342】 $y = x\cos x$.

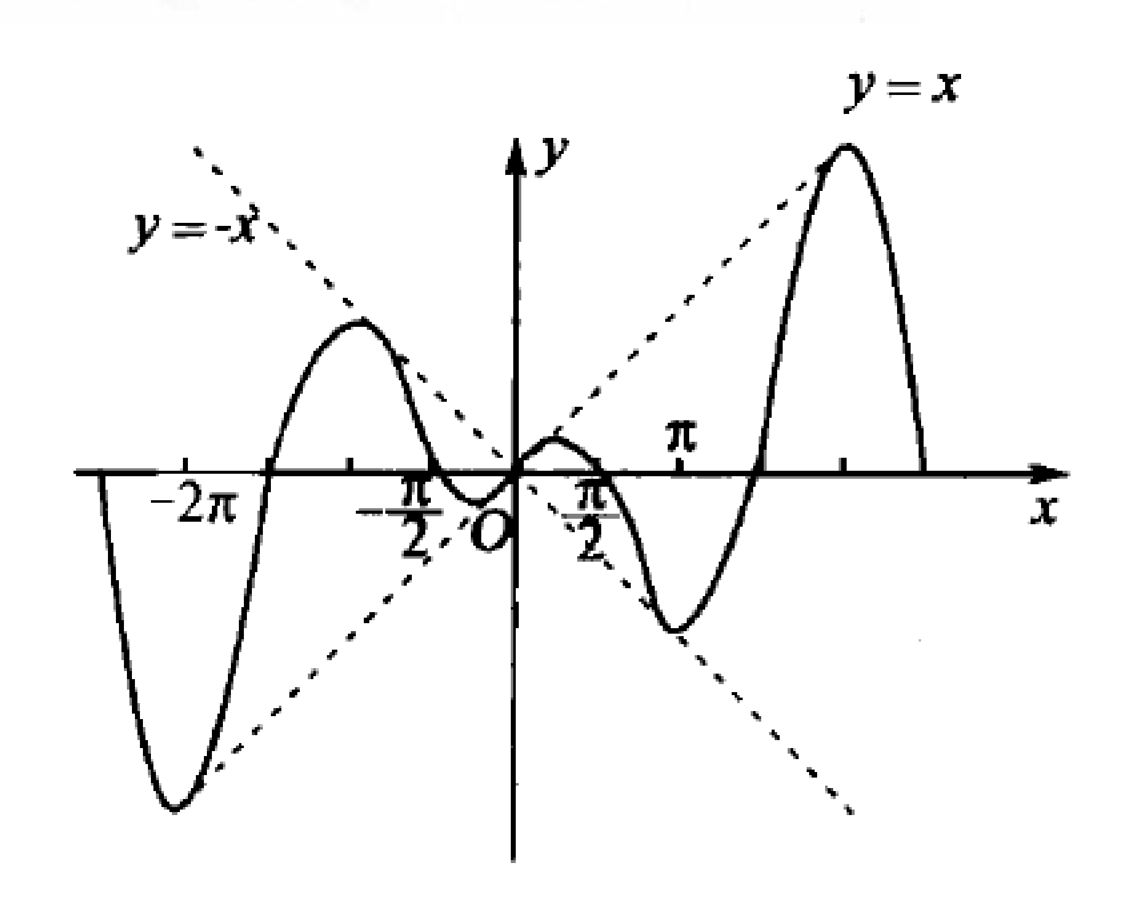
解 图形关于原点对称，且夹在直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 之间.

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$；

当 $x = 2k\pi$ 时，$y = x$；

当 $x = (2k+1)\pi$ 时，$y = -x$.

如 342 题图所示.



342 题图

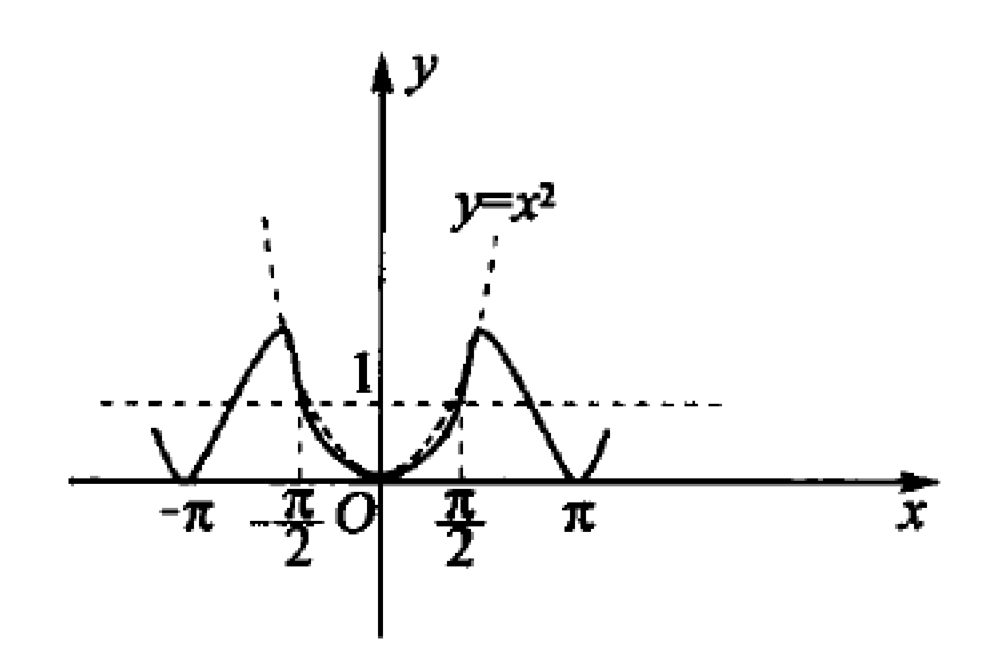
【343】 $y = x^2 \sin^2 x$.

解　图形关于 Oy 轴对称，且 $0 \leqslant y \leqslant x^2$

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$；

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，$y = x^2$.

如 343 题图所示.



343 题图

【344】 $y = \frac{\sin x}{1 + x^2}$.

解　图形关于原点对称，且

$$-\frac{1}{1+x^2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

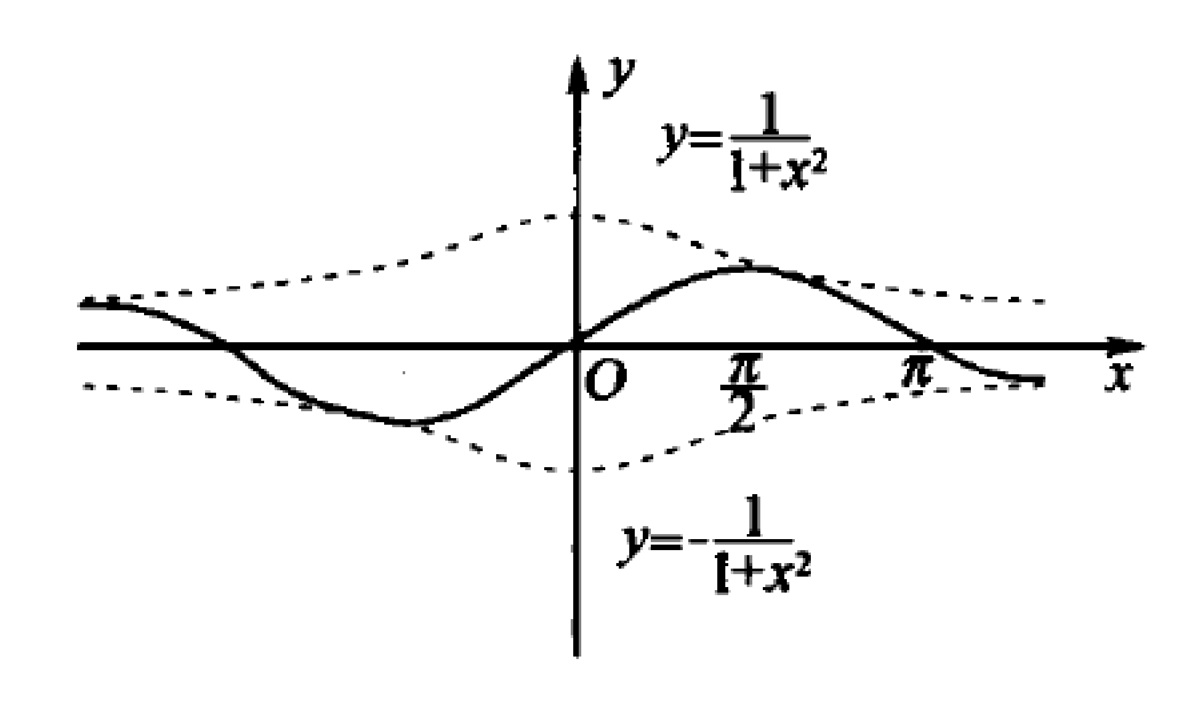
当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$；

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，$y = \frac{1}{1+x^2}$；

当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 时，$y=-\frac{1}{1+x^2}$；

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$.

如 344 题图所示.



344 题图

【345】 $y=e^{-x^2}\cos 2x$.

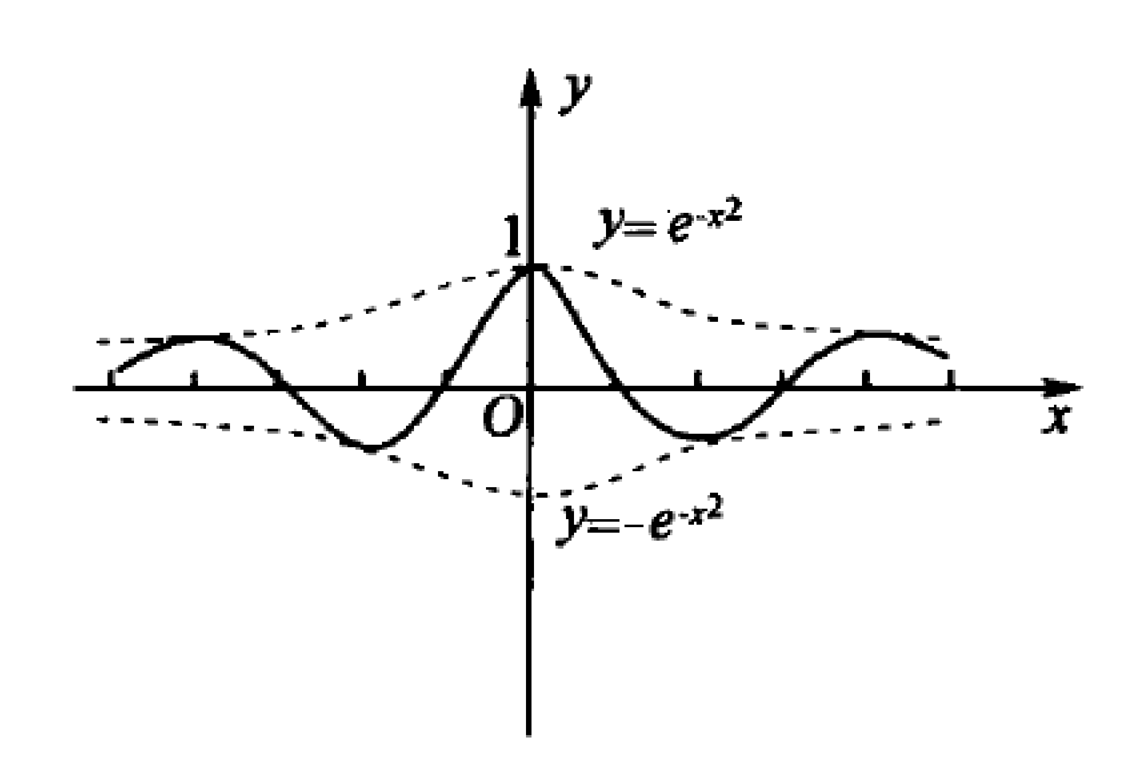
解　图形关 Oy 轴对称，且位于曲线 $y=e^{-x^2}$ 及 $y=-e^{-x^2}$ 之间.

当 $x=\frac{1}{2}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\cdots)$ 时，$y=0$；

当 $x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ 时，$y=-e^{-x^2}$；

当 $x=k\pi$ 时，$y=e^{-x^2}$.

如 345 题图所示.



345 题图

【346】 $y = x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

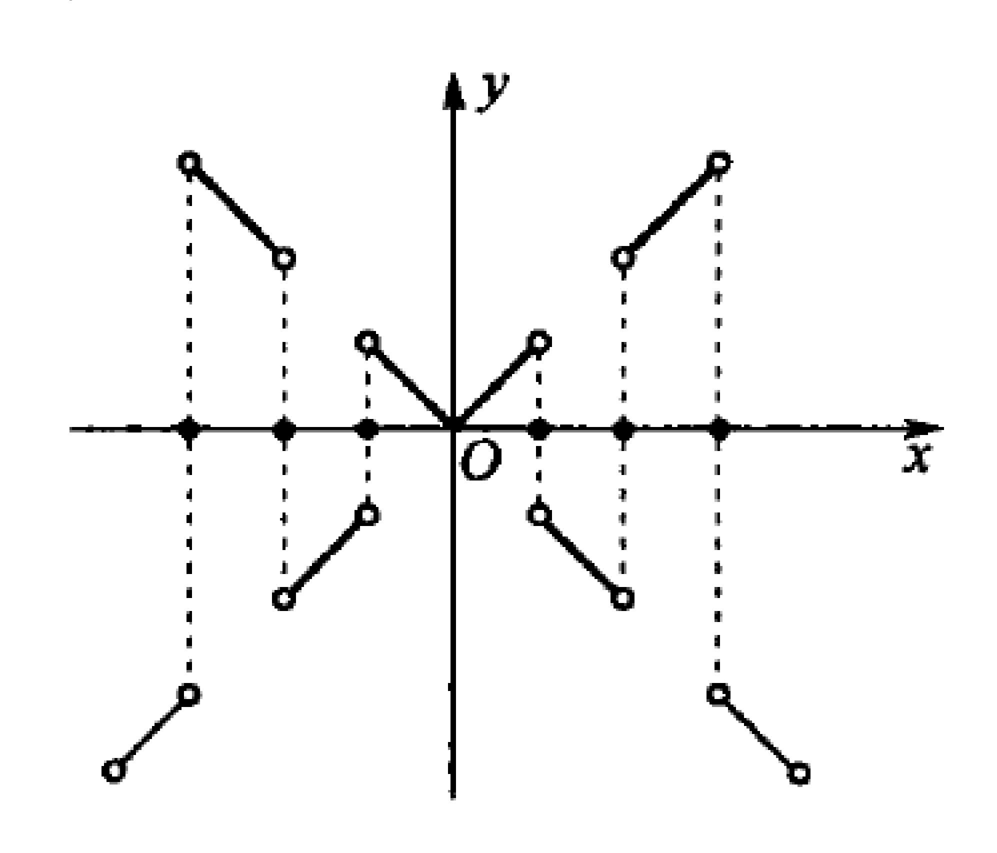
解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时，$y = 0$；

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时，$y = x$；

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时，$y = -x$.

如 346 题图所示.



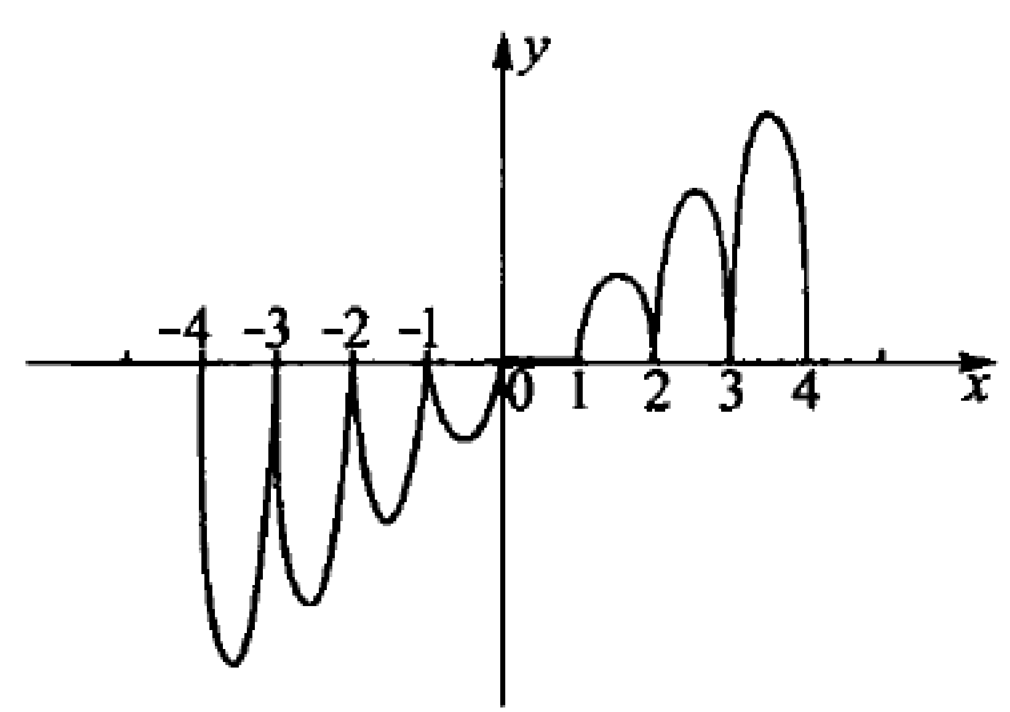
346 题图

【347】 $y = [x] \mid \sin \pi x \mid$.

解 当 $x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$

当 $k < x < k+1$ 时，$y = k \cdot \mid \sin \pi x \mid$.

如 347 题图所示.



347 题图

【348】 $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

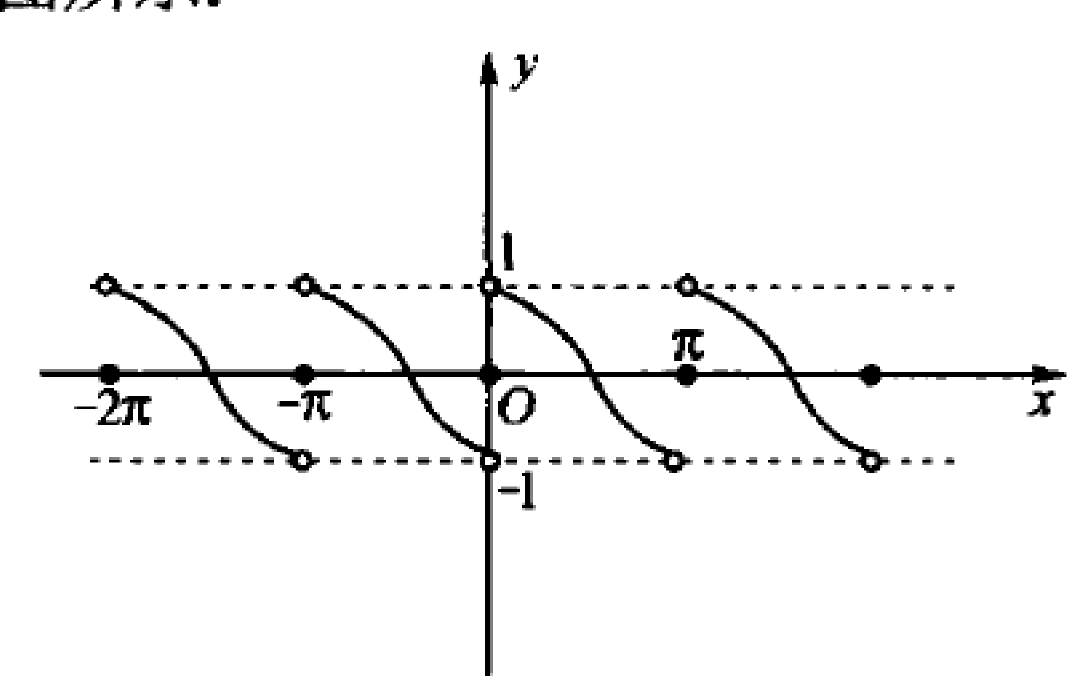
解 图形关于原点对称，函数是以 π 为周期的周期函数.

当 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$；

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时，$y = \cos x$；

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时，$y = -\cos x$.

如 348 题图所示.



348 题图

【349】 设

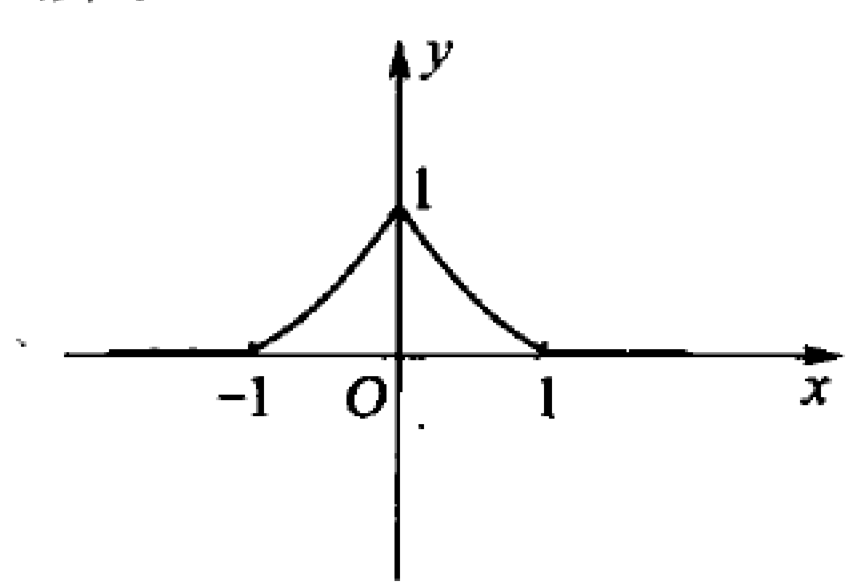
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & 若\ |x| \leqslant 1, \\ 0, & 若\ |x| > 1. \end{cases}$$

作出函数 $y = f(x)f(a-x)$，当：(1) $a = 0$；(2) $a = 1$；(3) $a = 2$ 时的图形.

解 (1) $y = f(x)f(-x)$

$$= \begin{cases} (1+x)^2, & -1 \leqslant x < 0, \\ (1-x)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

如 349 题图 1 所示.



349 题图 1

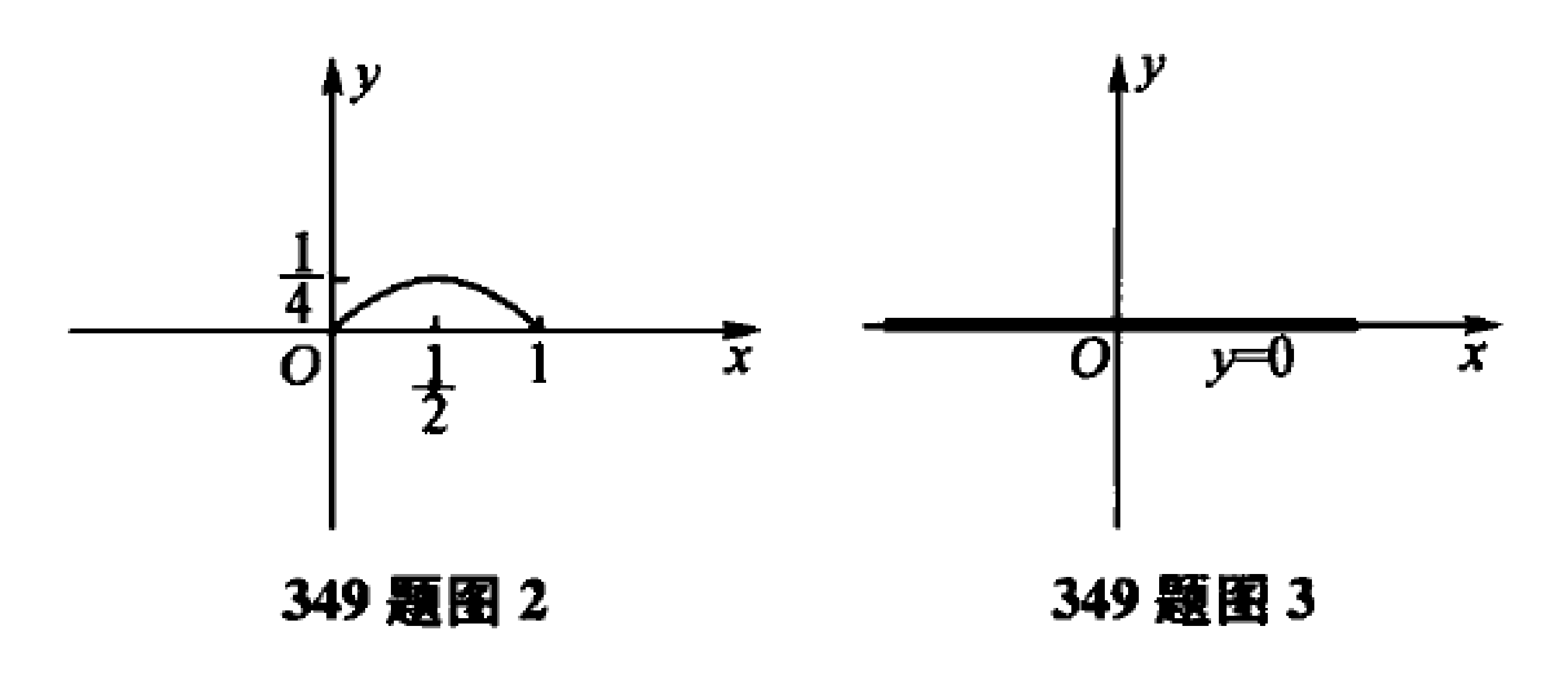
(2) $y = f(x)f(1-x)$

$$=\begin{cases}x-x^2, & 0<x<1,\\0, & \text{其它}.\end{cases}$$

如 349 题图 2 所示.

(3) $y=f(x)f(2-x)\equiv 0$

如 349 题图 3 所示.



349 题图 2　　　　349 题图 3

【350】 作出函数 $y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ 的图形.

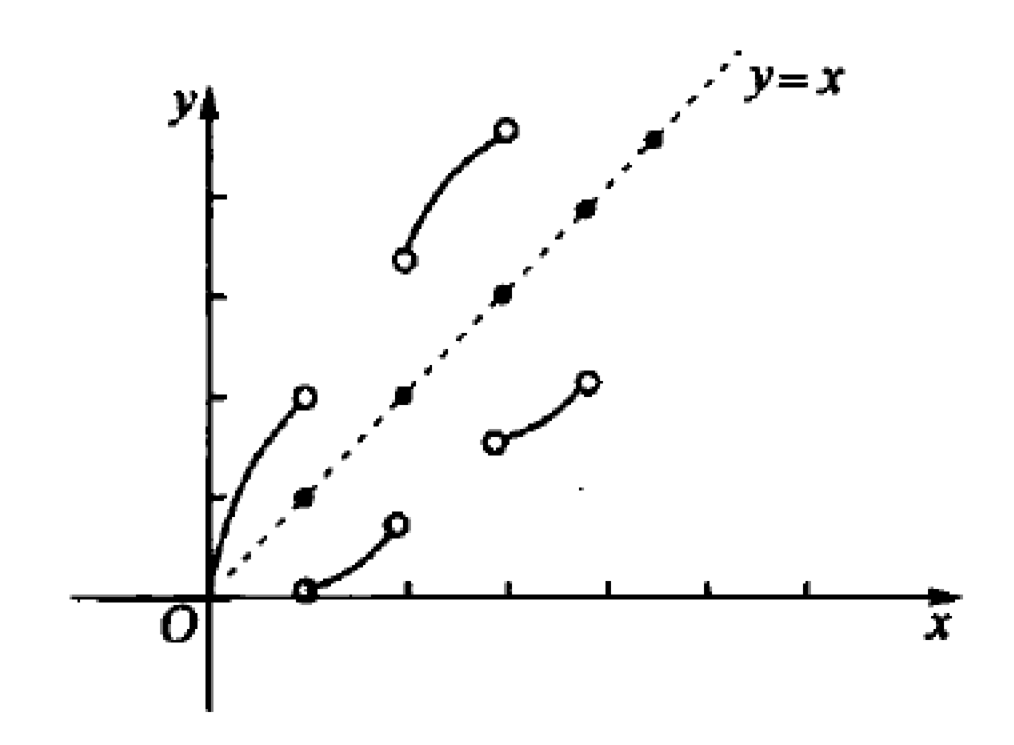
解 定义域为 $x\geqslant 0$.

当 $2k<x<2k+1$ 时, $y=x+\sqrt{x}$;

当 $2k+1<x<2k+2$ 时, $y=x-\sqrt{x}$;

当 $x=k$ 时, $y=x(k=0,1,2,\cdots)$.

如 350 题图所示.



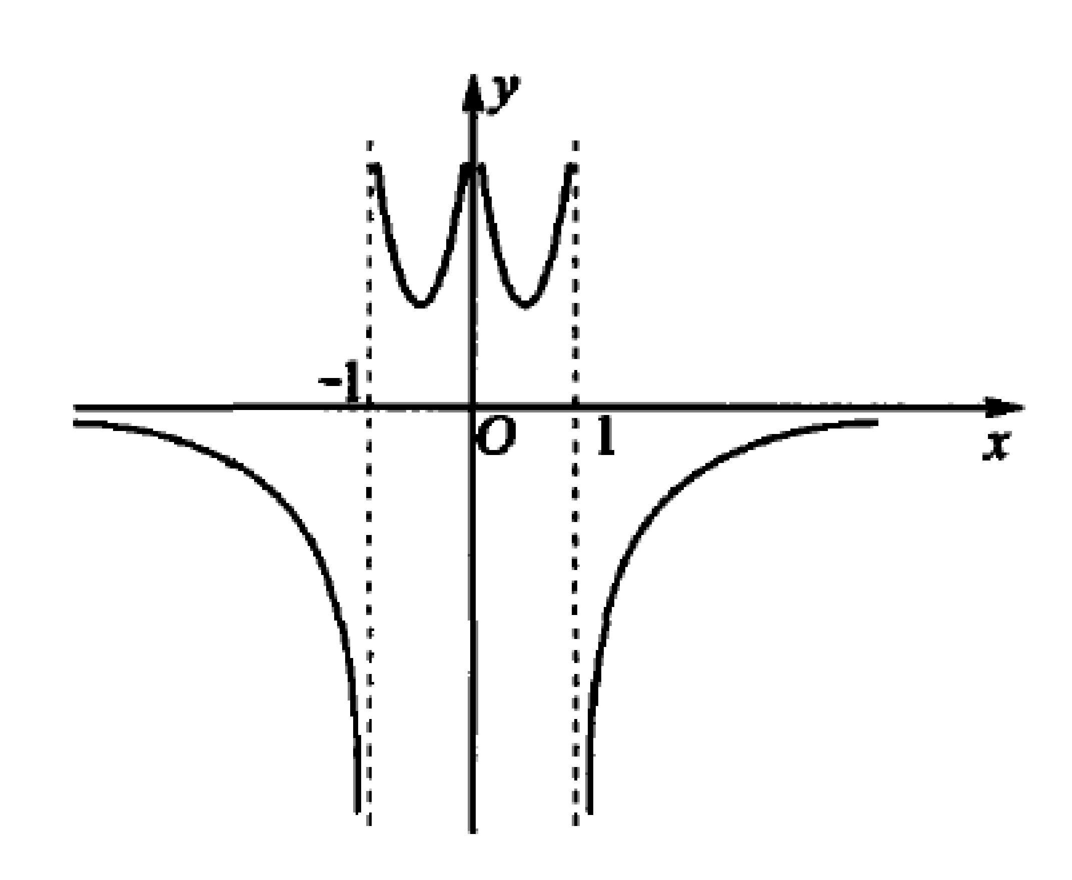
350 题图

作出函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的图形,设(351 ~ 355).

【351】 $f(x)=x^2(1-x^2)$.

解 $y=\dfrac{1}{x^2(1-x^2)}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}$.

利用图形相加法，将 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 及 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的图形相加即得. 如 351 题图所示.



351 题图

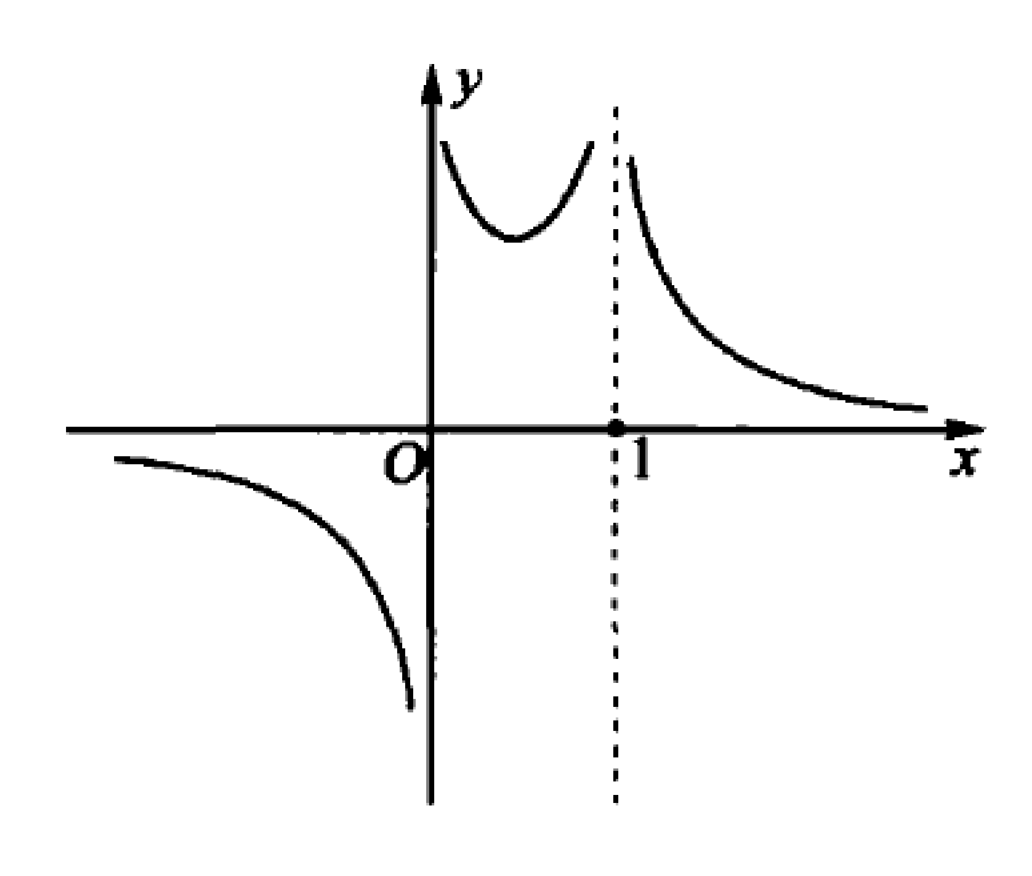
【352】 $f(x)=x(1-x)^2$.

解 $y=\dfrac{1}{x(1-x)^2}$;

定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

当 $x>0$ 时，$y>0$；当 $x<0$ 时，$y<0$.

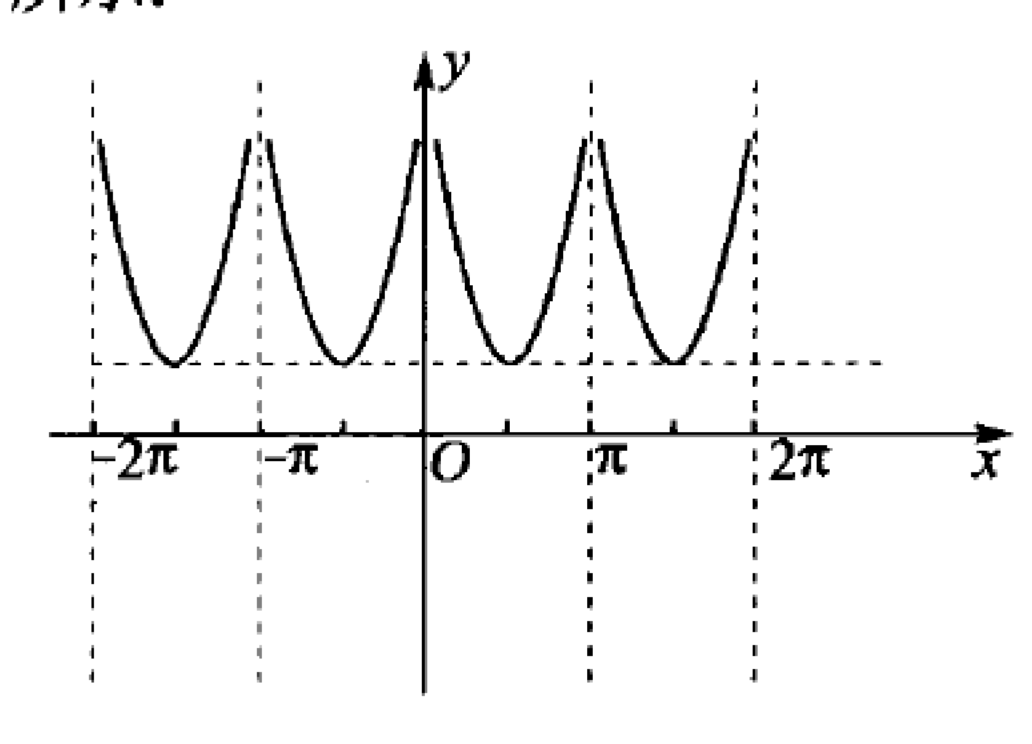
图形以 $x=0$，$x=1$ 及 $y=0$ 为渐近线. 如 352 题图所示.



352 题图

【353】 $f(x)=\sin^2 x$.

解 $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$是一周期为π的周期函数.图形关于Oy轴对称.如353题图所示.



353 题图

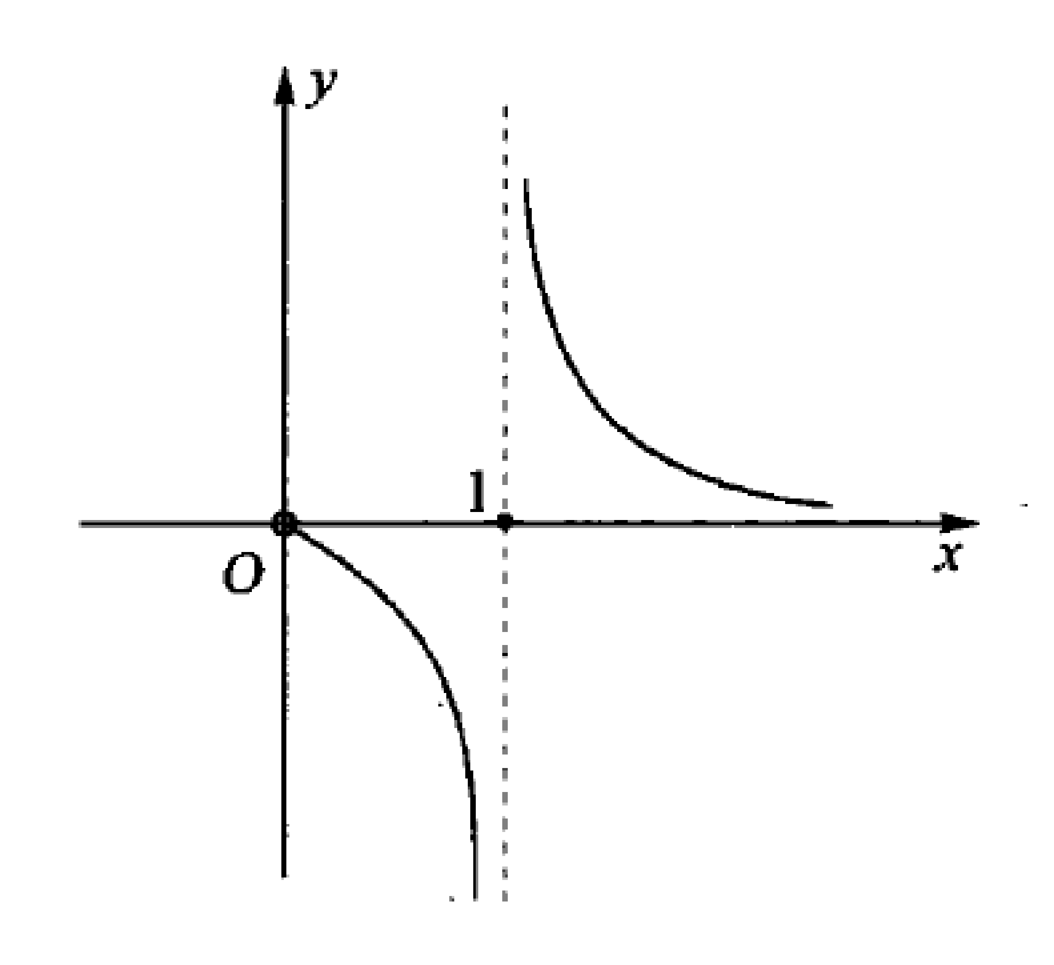
【354】 $f(x)=\ln x$.

解 $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

当$0<x<1$时,y由0单调下降到$-\infty$;

当$1<x<+\infty$时,y轴$+\infty$单调下降到0.

如354题图所示.



354 题图

【355】 $f(x)=e^x\sin x$.

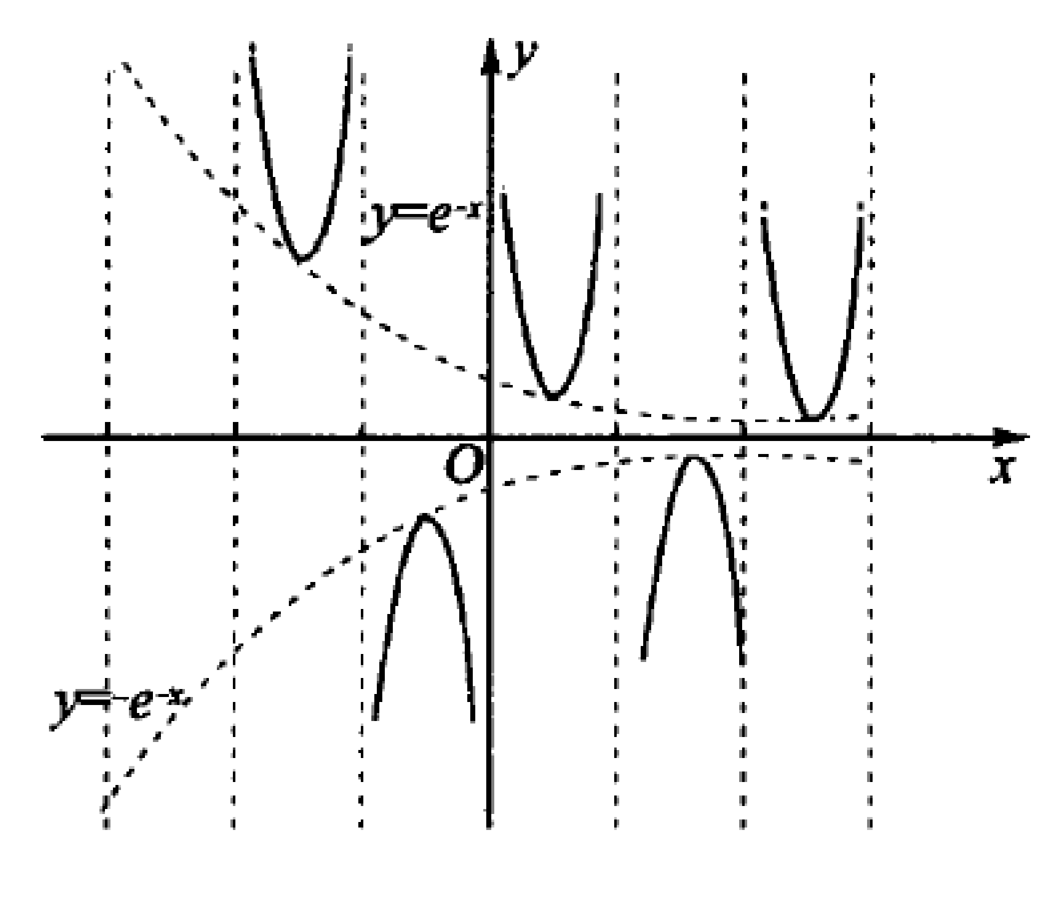
解 $y=e^{-x}\csc x$ $\quad |y|\geqslant e^{-x}$,

当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\mathrm{e}^{-x}$；

当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 时，$y=-\mathrm{e}^{-x}$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

利用图形的相乘法即得函数的图形. 如 355 题图所示.



355 题图

【356】 作出复合函数 $y=f(u)$ 的图形(其中 $u=2\sin x$). 设：

$$f(u)=\begin{cases}-1, & \text{当} -\infty<u<-1 \text{时},\\ u, & \text{当} -1\leqslant u\leqslant 1 \text{时},\\ 1, & \text{当} 1<u<+\infty \text{时}.\end{cases}$$

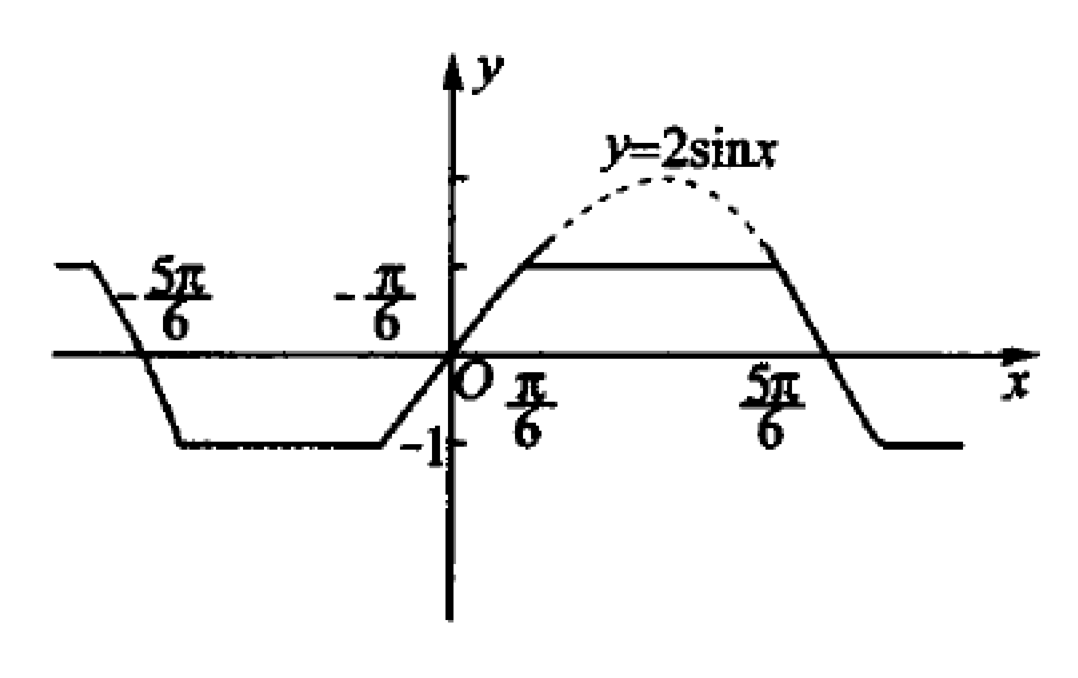
解 当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}$ 时，$y=2\sin x$；

当 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ 时，$y=1$；

当 $(2k-1)\pi+\frac{\pi}{6}<x<(2k-1)\pi+\frac{5\pi}{6}$ 时，$y=-1$

$(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$.

如 356 题图所示.



356 题图

【357】 设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$

及
$$\psi(x)=\begin{cases}x, & 若\ x<0,\\ x^2, & 若\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

绘制以下函数的图形：

(1) $y=\varphi[\varphi(x)]$； (2) $y=\varphi[\psi(x)]$；

(3) $y=\psi[\varphi(x)]$； (4) $y=\psi[\psi(x)]$.

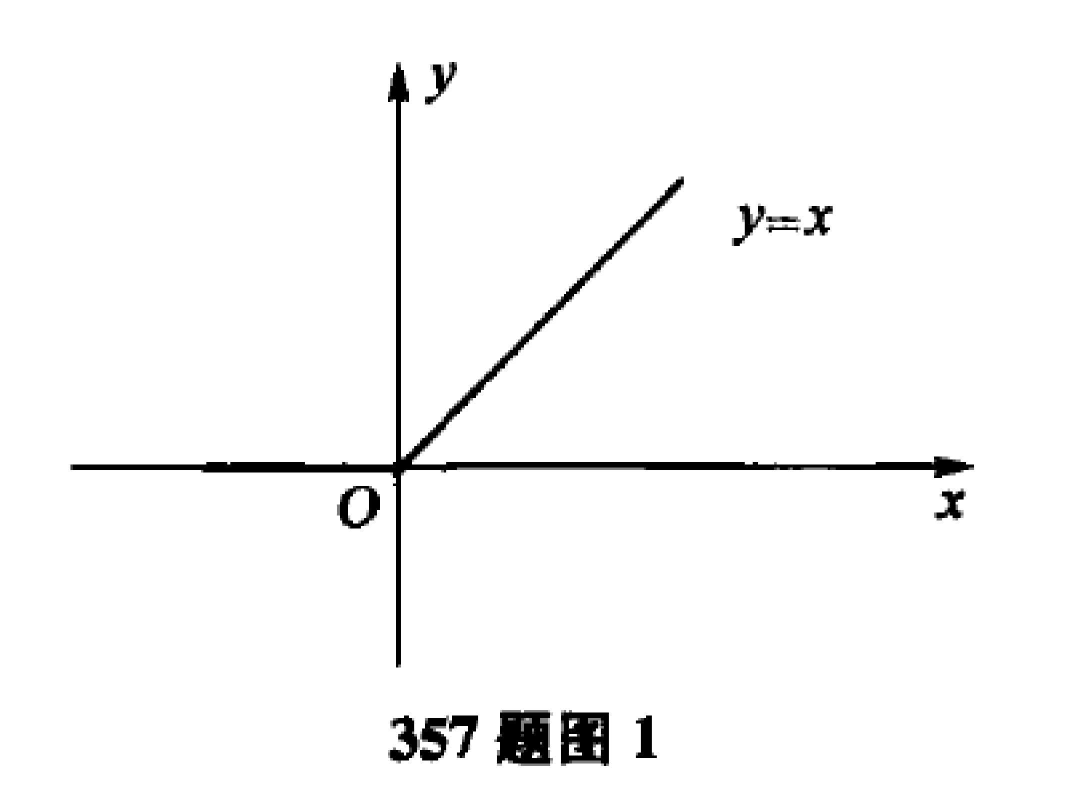
解 (1) $\varphi(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0\ 时,\\ 0, & 当\ x<0\ 时,\end{cases}$

所以 $\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$

如 357 题图 1 所示.

(2) $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

如 357 题图 2 所示.



357 题图 1

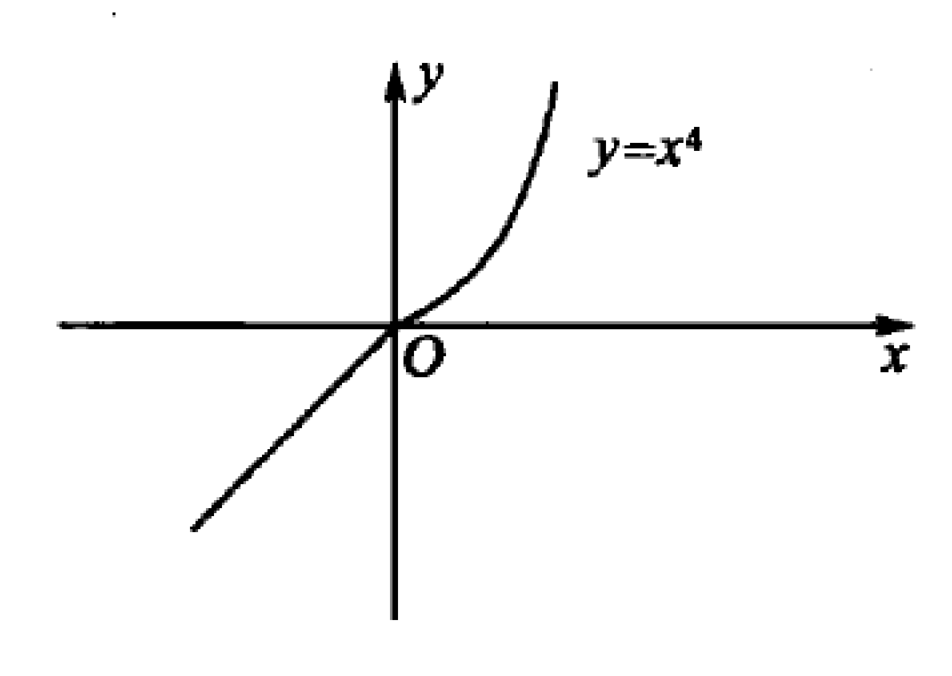
357 题图 2

(3) $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

图形与(2)的图形完全一样.

(4) $\psi[\psi(x)]=\begin{cases}x^4, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$

如 357 题图 3 所示.



357 题图 3

【358】 假设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 若\ |x|\leqslant 1;\\ 0, & 若\ |x|>1,\end{cases}$$

和
$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & 若\ |x|\leqslant 2;\\ 2, & 若\ |x|>2.\end{cases}$$

作出以下函数的图形:

(1) $y=\varphi[\varphi(x)]$;　　(2) $y=\varphi[\psi(x)]$;

(3) $y=\psi[\varphi(x)]$;　　(4) $y=\psi[\psi(x)]$.

解 (1) $\varphi[\varphi(x)]=1$.

如 358 题图 1 所示.

(2) $\varphi[\psi(-x)]=\varphi[\psi(x)]$,所以图形关于 oy 轴对称.

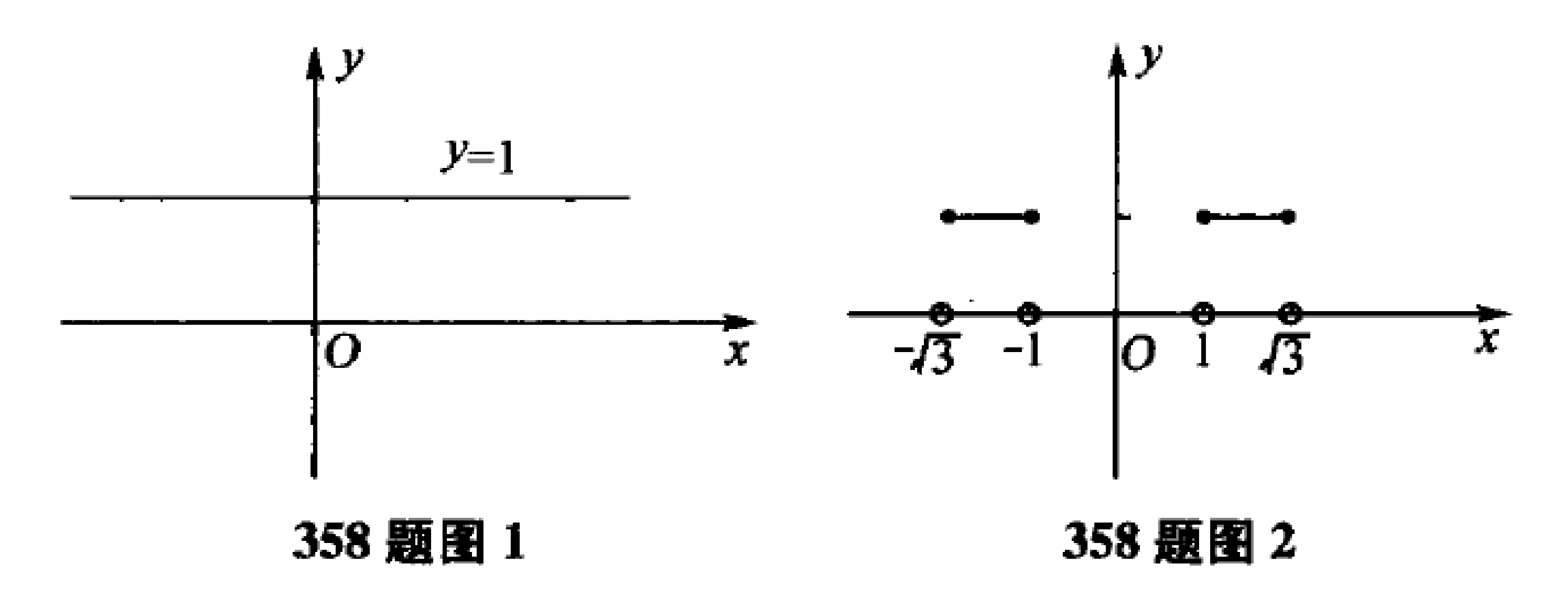
当 $x>2$ 时,$\psi(x)=2$,所以 $\varphi[\psi(x)]=0$

当 $0\leqslant x<1$ 时,$\psi(x)=2-x^2$,而 $1<2-x^2\leqslant 2$,所以 $\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时,$-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1$,所以 $\varphi[\psi(x)]=1$.

当 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 时,$-2\leqslant 2-x^2<-1$,所以 $\varphi[\psi(x)]=0$.

如 358 题图 2 所示.



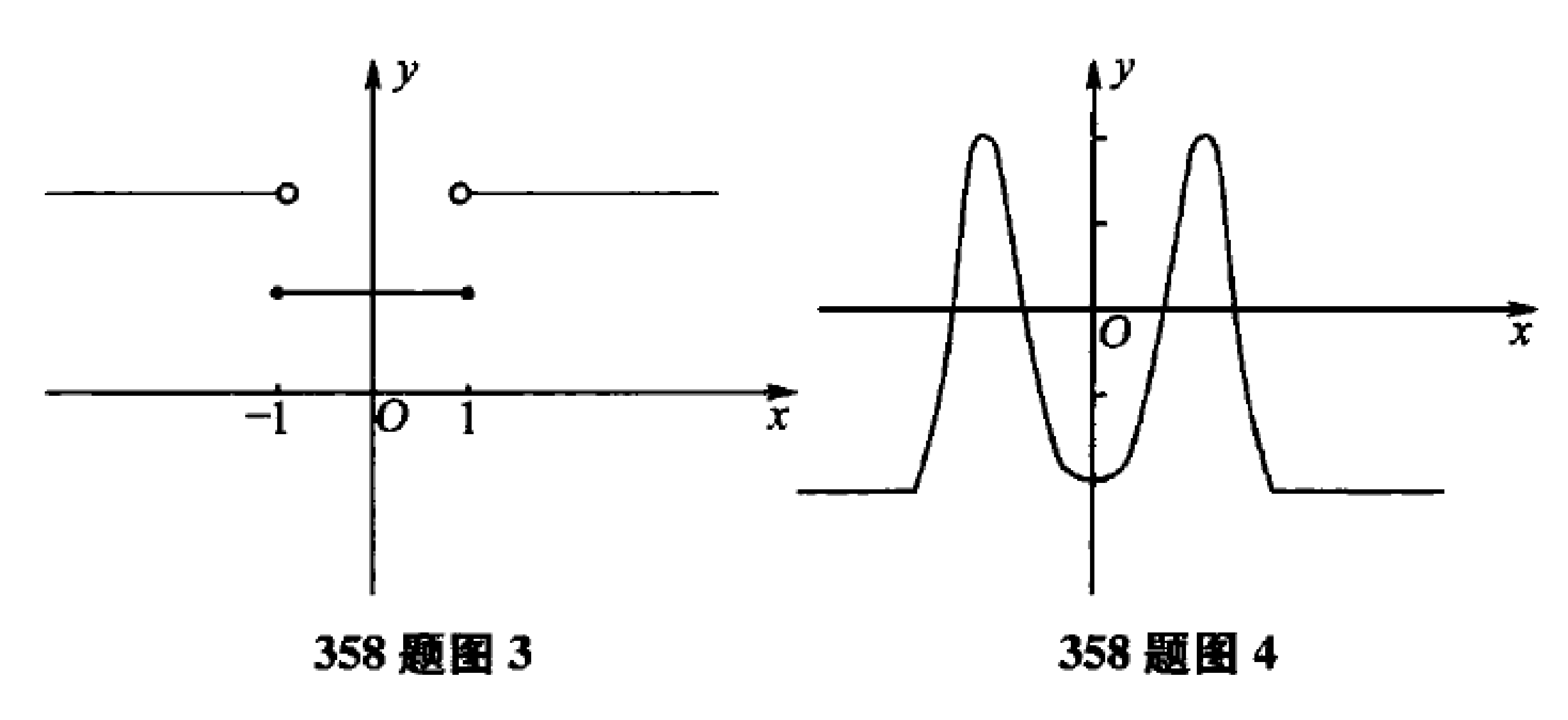
358 题图 1　　358 题图 2

(3) $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & 若\ |x|\leqslant 1,\\ 2, & 若\ |x|>1.\end{cases}$

如 358 题图 3 所示.

(4) $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & 若\ |x|\leqslant 2,\\ -2, & 若\ |x|>2.\end{cases}$

如 358 题图 4 所示.



358 题图 3　　358 题图 4

【359】　将定义于正数域 $x>0$ 内的函数 $f(x)$,拓展到负数域 $x<0$ 内,使所得的函数为(1) 偶函数;(2) 奇函数. 设

(1) $f(x)=1-x$;　　(2) $f(x)=2x-x^2$;

(3) $f(x)=\sqrt{x}$;　　(4) $f(x)=\sin x$;

(5) $f(x)=e^x$;　　(6) $f(x)=\ln x$.

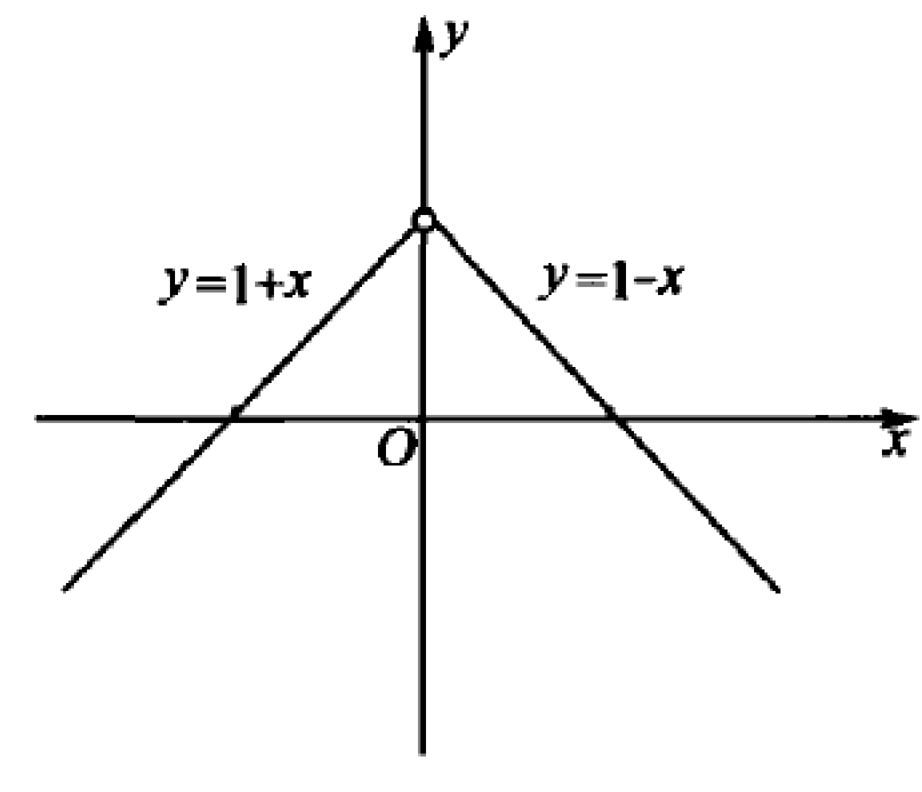
作出对应函数的图形.

解　(1) (a) 定义

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 若\ x>0,\\ 1+x, & 若\ x<0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 为偶函数.

如 359 题图 1(a) 所示.



359 题图 1(a)

359 题图 1(b)

(b) $f(x)=\begin{cases}1-x, & 若\ x>0,\\ -(1+x), & 若\ x<0.\end{cases}$

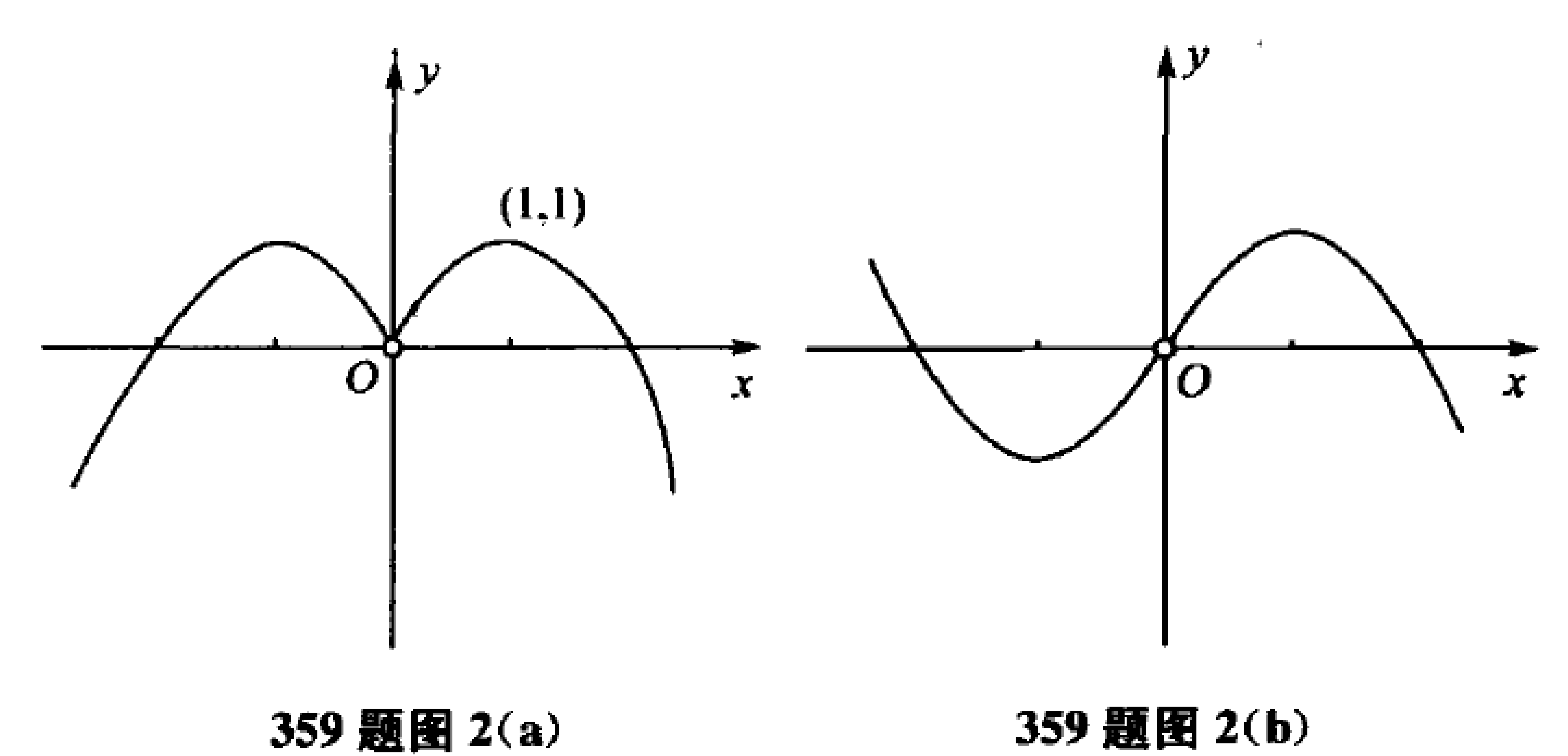
则 $f(x)$ 为奇函数.

如 359 题图 1(b) 所示.

(2) (a) 定义

$$f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & 若\ x>0,\\ -2x-x^2, & 若\ x<0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 为偶函数,如 359 题图 2(a) 所示.



359 题图 2(a)　　359 题图 2(b)

(b) 定义

$$f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & 若\ x>0,\\ 2x+x^2, & 若\ x<0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 为奇函数. 如 359 题图 2(b) 所示.

(3) (a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 若\ x>0,\\ \sqrt{-x}, & 若\ x<0.\end{cases}$

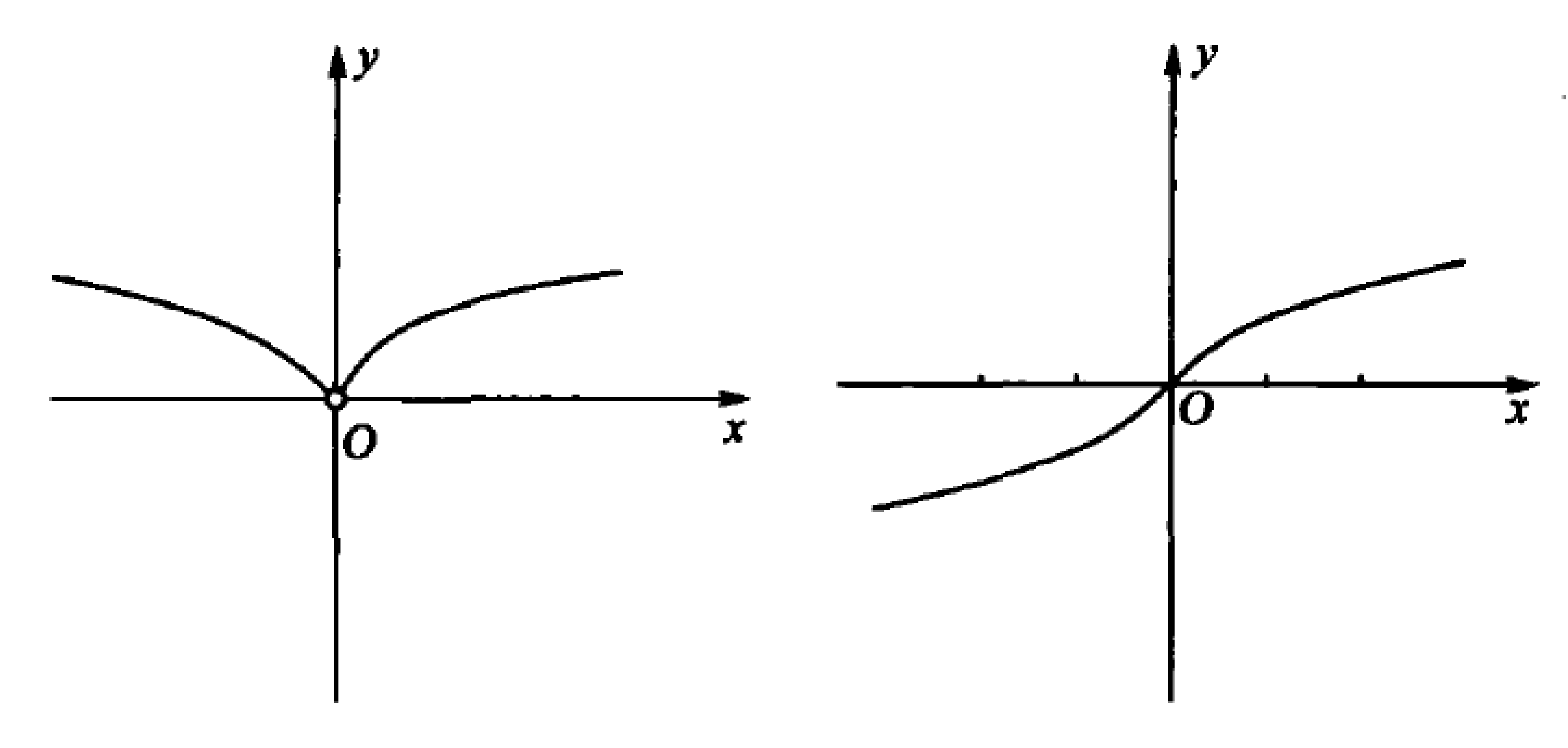
即 $$f(x)=\sqrt{|x|}.$$

则 $f(x)$ 为偶函数. 如 359 题图 3(a) 所示.

(b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 若\ x>0,\\ -\sqrt{-x}, & 若\ x<0.\end{cases}$

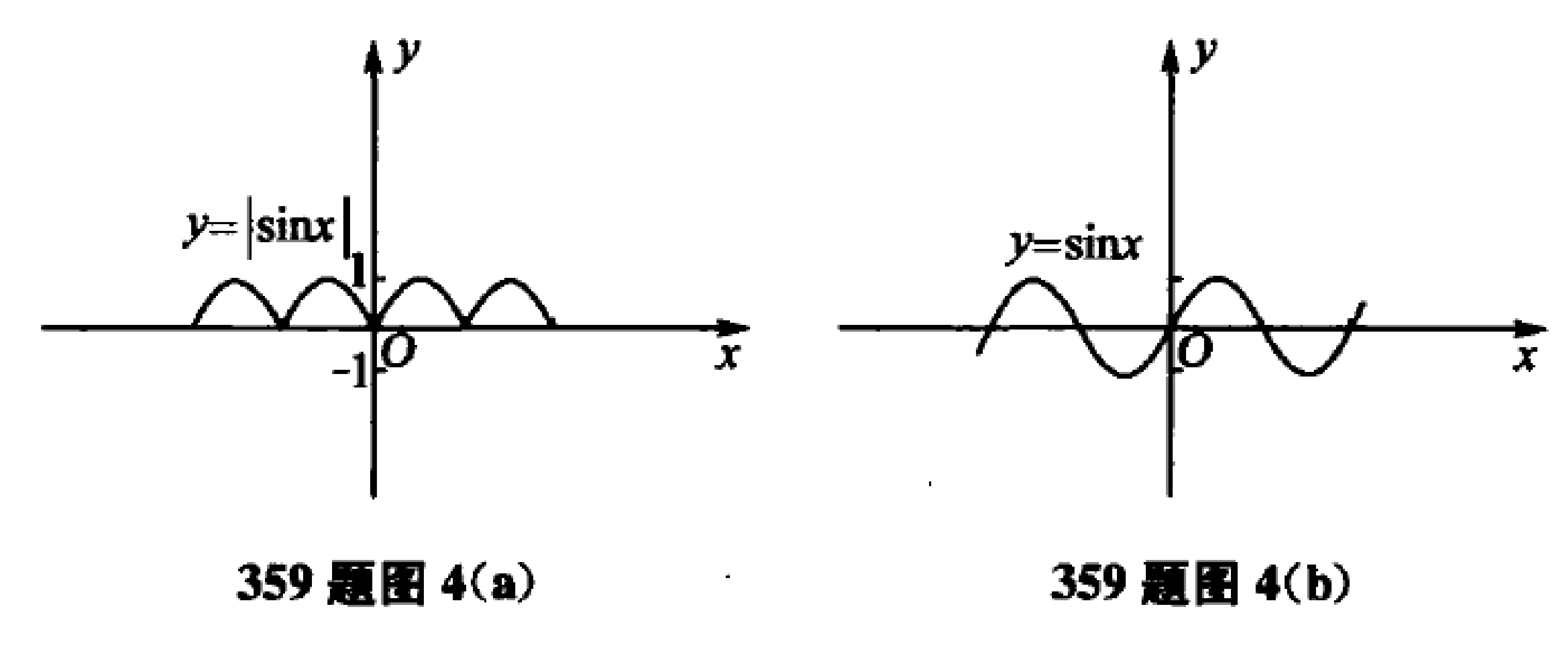
则 $f(x)$ 为奇函数.

如 359 题图 3(b) 所示.



359 题图 3(a)　　　　359 题图 3(b)

(4) (a) 定义 $f(x)=|\sin x|$, $f(x)$ 即为偶函数, 如 359 题图 4(a) 所示.



359 题图 4(a)　　　　359 题图 4(b)

(b) 定义 $f(x)=\sin x$，$f(x)$ 为奇函数，

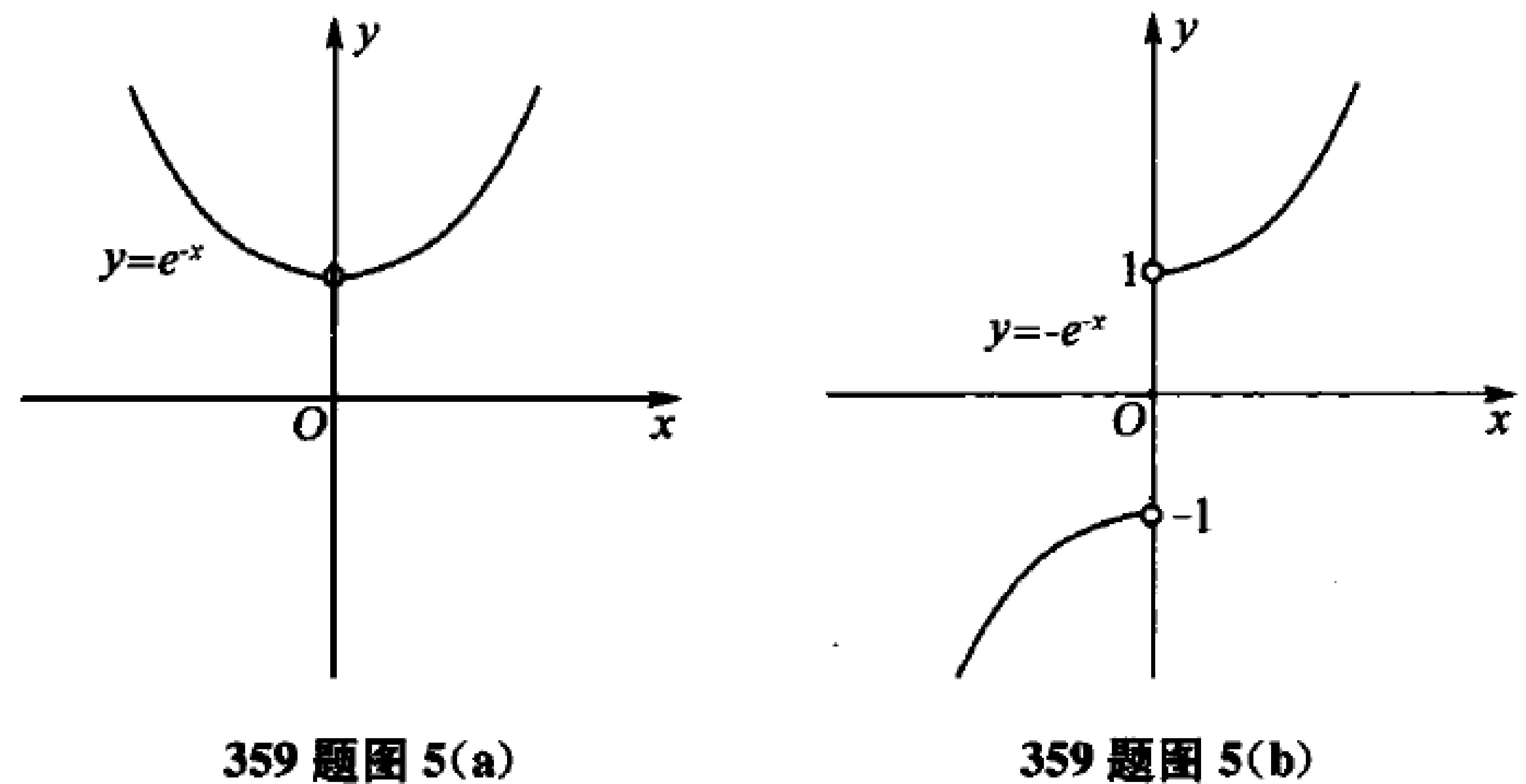
如 359 题图 4(b) 所示.

(5) (a) 定义 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & 若\ x>0, \\ e^{-x}, & 若\ x<0. \end{cases}$

则 $f(x)$ 为偶函数. 如 359 题图 5(a) 所示.

(b) 定义 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & 若\ x>0, \\ -e^{-x}, & 若\ x<0. \end{cases}$

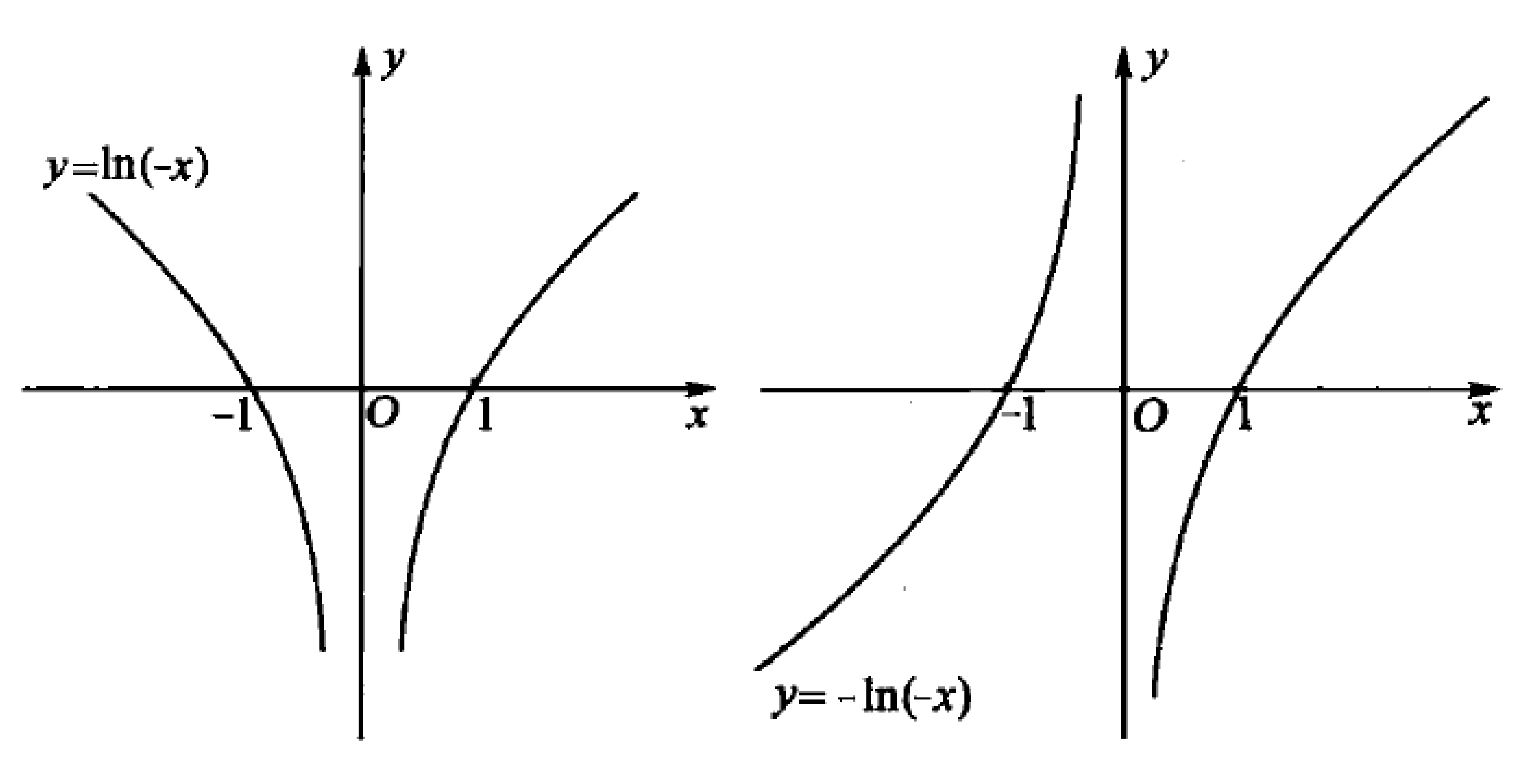
则 $f(x)$ 为奇函数. 如 359 题 5(b) 所示.



359 题图 5(a)　　359 题图 5(b)

(6) (a) 定义 $f(x)=\begin{cases} \ln x, & 若\ x>0, \\ \ln(-x), & 若\ x<0. \end{cases}$

则 $f(x)$ 为偶函数. 如 359 题图 6(a) 所示.



359 题图 6(a)　　359 题图 6(b)

(b) 定义 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 若\ x>0,\\ -\ln(-x), & 若\ x<0,\end{cases}$

则 $f(x)$ 为奇函数. 如 359 题图 6(b) 所示.

【360】 以下函数的图形关于何垂直轴对称：

(1) $y=ax^2+bx+c$； (2) $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$；

(3) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}\quad(0<a<b)$；

(4) $y=a+b\cos x$.

解 (1) $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$,

图形关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称.

(2) 令 $x'=x-\dfrac{1}{2}, y'=y$ 则函数变为

$$y'=\frac{1}{\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-x'\right)^2}.$$

由此可知图形在坐标系 $x'Oy'$ 中关于 Oy' 轴对称，即图形关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称.

或设

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2},$$

则 $\qquad f(1-x)=f(x)$,

所以图形关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称.

(3) 设 $g(x)=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$,

则 $\qquad g\left(2\times\dfrac{b-a}{2}-x\right)=g(x)$,

所以图形关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称.

(4) 图形关于直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 对称.

【361】 确定以下函数图形的对称中心：

(1) $y=ax+b$；　　(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$；

(3) $y=ax^3+bx^2+cx+d$；

(4) $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$；

(5) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

解 (1) 直线上的任一点(x_0,ax_0+b)均为对称中心.

(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}$,

对称中心为$\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.

(3) 设对称中心为(x_0,y_0)，则对任意x有y使得

$$y+y_0=a(x+x_0)^3+b(x+x_0)^2+c(x+x_0)+d,$$
$$-y+y_0=a(-x+x_0)^3+b(-x+x_0)^2+c(-x+x_0)+d.$$

由此可得

$$x_0=-\frac{b}{3a},y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d.$$

(4) 类似于(3)，可得对称中心为(2,0).

(5) 类似于(3)，可得对称中心为(2,1).

【362】 作出以下周期函数的图形：

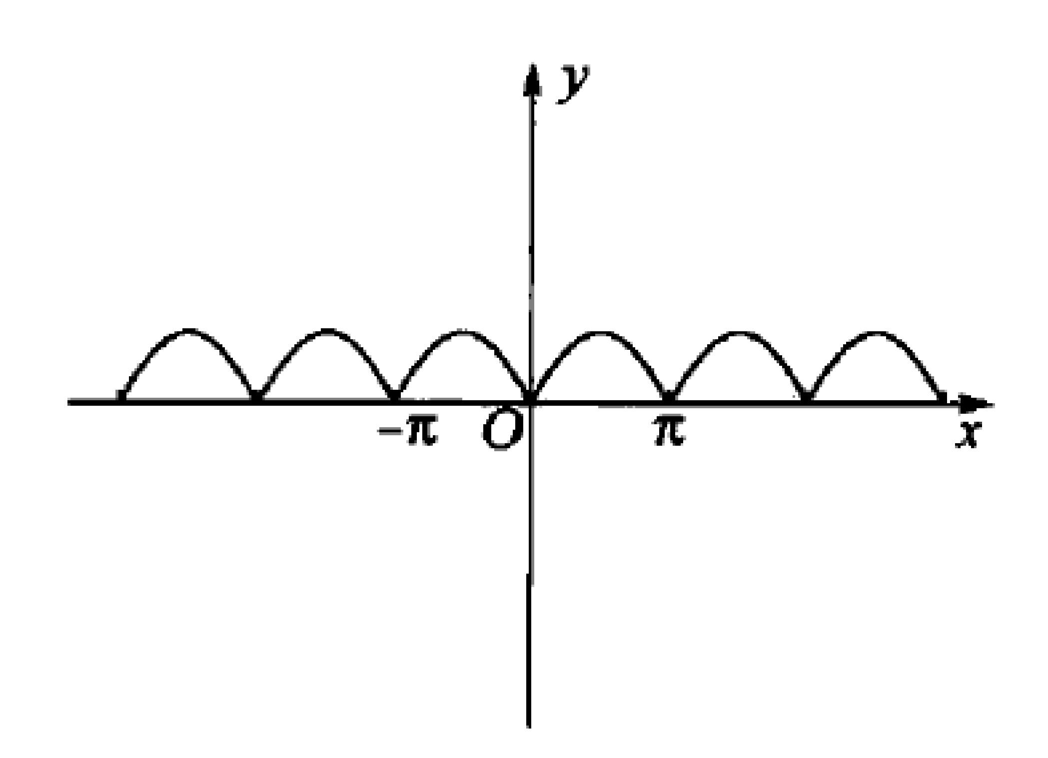
(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=\operatorname{sgn}\cos x$；

(3) $y=f(x)$，其中$f(x)=A\dfrac{x}{l}\left(2-\dfrac{x}{l}\right)$，假设$0\leqslant x\leqslant 2l$和$f(x+2l)\equiv f(x)$.

(4) $y=[x]-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$；

(5) $y=(x)$. 其中：(x)是从数x到与其最近的整数间的距离.

解 (1) 如 362 题图 1 所示.



362 题图 1

(2) 当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$y=0$;

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$y=1$;

当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 时,$y=-1$.

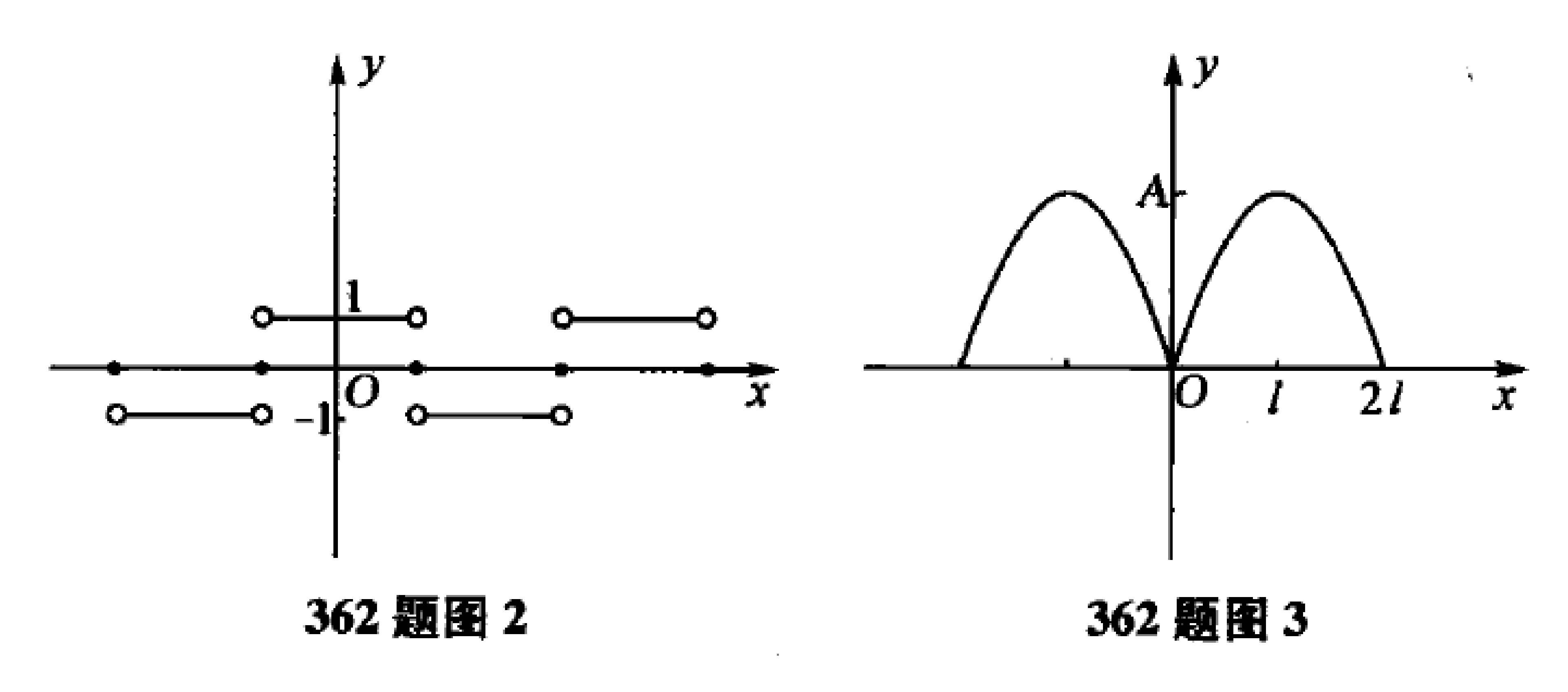
如 362 题图 2 所示.

(3) 由定义知

$$f(x+2kl)=f(x) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

即 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数. 而在 $[0,2l]$ 内,图形为一抛物线,顶点为 (l,A).

如 362 题图 3 所示.



362 题图 2　　　362 题图 3

(4) 当 $2k\leqslant x<2k+1$ 时,

$$y = 0 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

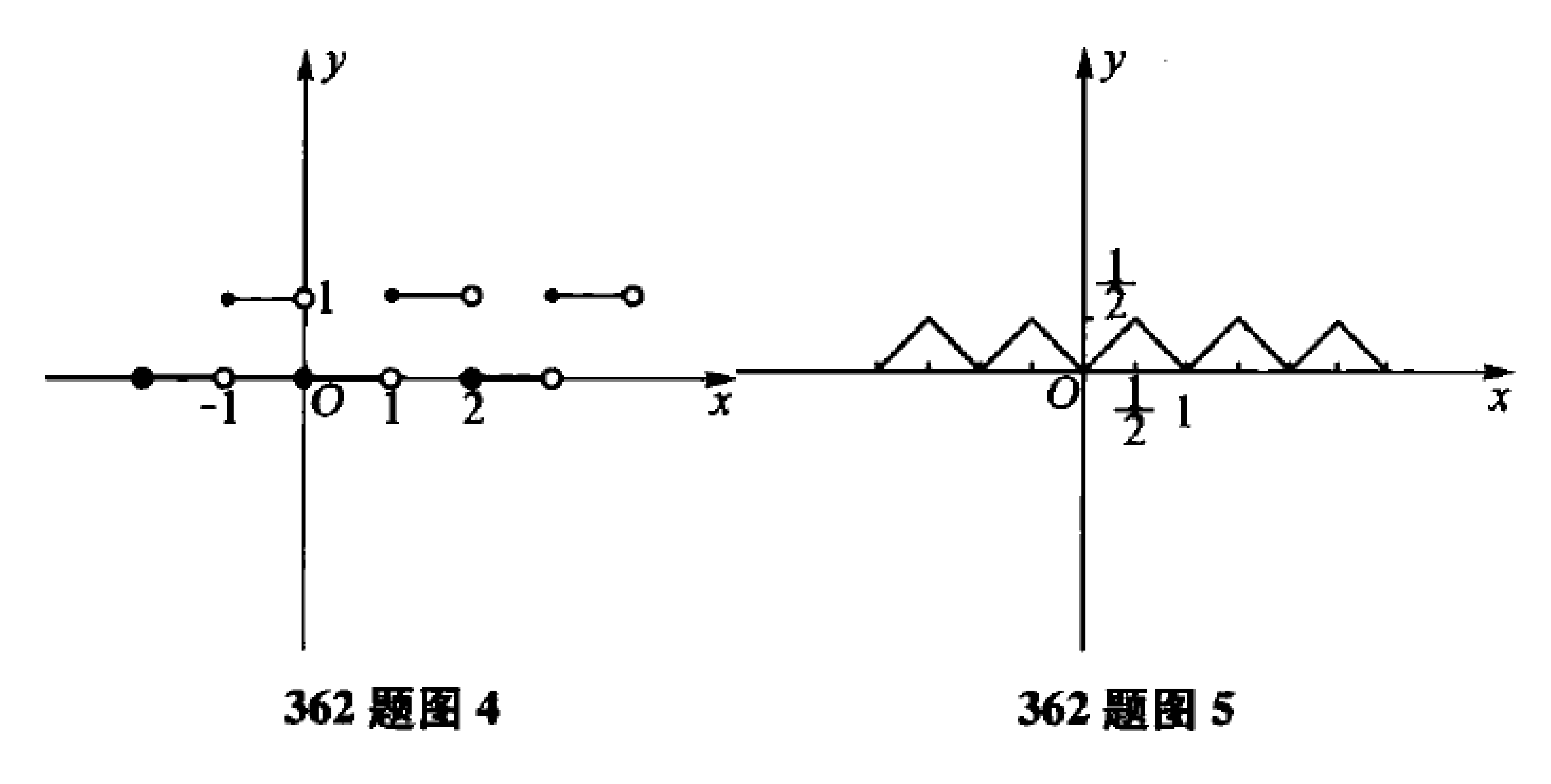
当 $2k+1 \leqslant x < 2k+2$ 时，$y = 1$.

如 362 题图 4 所示.

(5) 函数是以 1 为周期的周期函数. 而在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上有

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

如 362 题图 5 所示.



362 题图 4　　362 题图 5

【363】 证明：如果函数

$$y = f(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

的图形对称于两个垂直轴 $x = a$ 及 $x = b(b > a)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证　因为 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 及 $x = b$ 对称，所以对任何 x 均有

$$f(a+x) = f(a-x), \qquad ①$$

及

$$f(b+x) = f(b-x). \qquad ②$$

在 ① 式中令 $a + x = t$，再以 x 代替得

$$f(x) = f(2a - x).$$

同理　$f(x) = f(2b - x)$，

因此　$f(x) = f(2a - x) = f(2b - (2a - x))$

$$= f(2(b-a)+x).$$

由 x 的任意性知 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 证毕.

【364】 证明:如果函数

$$y = f(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形对称于两个点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)(b > a)$,则函数 $f(x)$ 是线性函数和周期函数的和,特别是若 $y_0 = y_1$,则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 根据假设,对任意 x 有

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \qquad ①$$

$$f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x).$$

令 $a + x = t$,代入 ① 有

$$f(t) = 2y_0 - f(2a-t),$$

所以 $f(x) = 2y_0 - f(2a-x)$,

同理 $f(x) = 2y_1 - f(2b-x)$,

因此

$$f(x) = 2y_0 - f(2a-x) = 2(y_0 - y_1) + f(2(b-a)+x).$$

令 $\varphi(x) = \dfrac{y_0 - y_1}{b-a}x + f(x)$.

则 $\varphi(x+2(b-a)) = \varphi(x)$,

即 $\varphi(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 且

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{y_1 - y_0}{b-a}x.$$

特别当 $y_1 = y_0$ 时,$f(x) = \varphi(x)$.

【365】 证明:如果函数

$$y = f(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形对称于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b(b \neq a)$,则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 由假设对任意的 x,我们有

$$f(x)=2y_0-f(2a-x),$$
$$f(x)=f(2b-x),$$

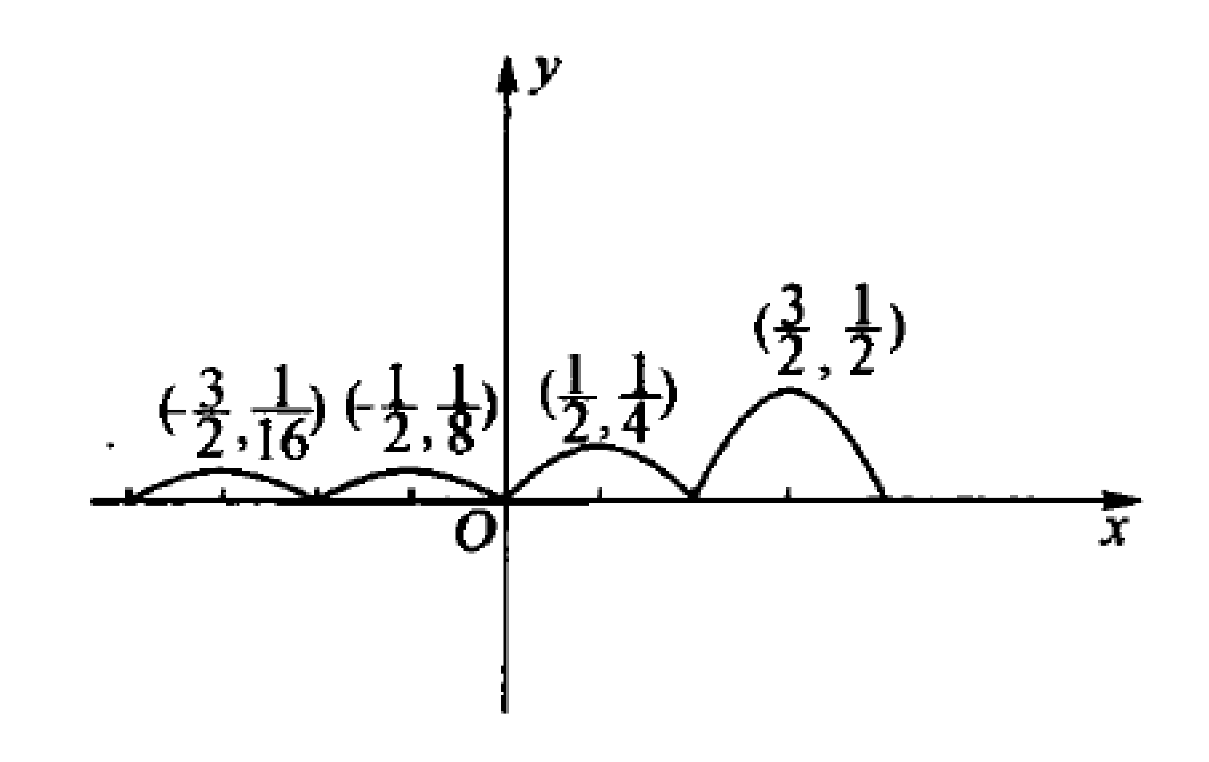
因此
$$\begin{aligned}f(x)&=2y_0-f(2a-x)\\&=2y_0-f(2b-(2a-x))\\&=2y_0-f(2(b-a)+x)\\&=2y_0-\{2y_0-f[2a-(2(b-a)+x)]\}\\&=f(4a-2b-x)\\&=f(2b-(4a-2b-x))\\&=f(4(b-a)+x).\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

【366】 设 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x)$. 作出函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，图形为一抛物线，顶点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$；当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，只要将纵坐标放大 2 倍，依此类推.

如 366 题图所示.



366 题图

【367】 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，且当 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 时，$f(x)=0$，作出函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形.

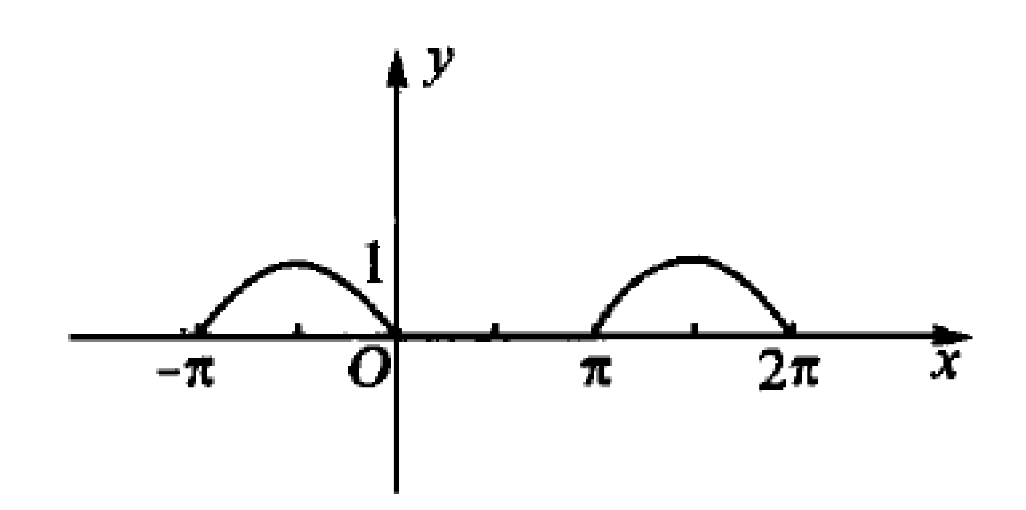
解 由题设知

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)\\&=f(x)+\sin x+\sin(x+\pi)=f(x),\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是 2π 为周期的周期函数，且当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$f(x) = 0$；当 $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时，令 $x = x_1 + \pi$. 则 $0 < x_1 \leqslant \pi$，且

$$f(x) = f(x_1 + \pi) = f(x_1) + \sin x_1 = \sin x_1.$$

如 367 题图所示.



367 题图

【368】 若

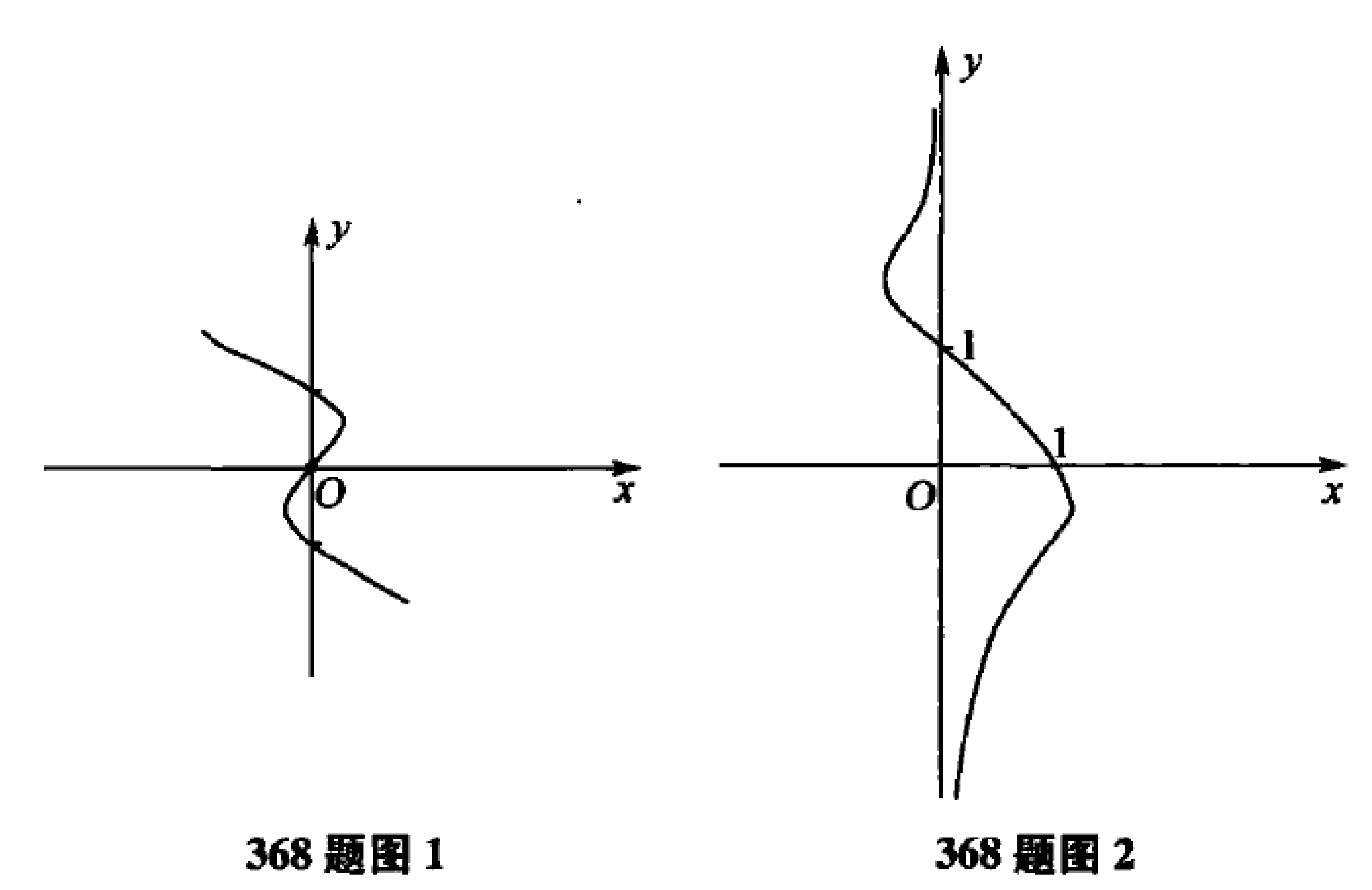
(1) $x = y - y^3$；　　(2) $x = \dfrac{1-y}{1+y^2}$；

(3) $x = y - \ln y$；　　(4) $x^2 = \sin y$.

作函数 $y = y(x)$ 的图形.

解 (1) 如 368 题图 1 所示.

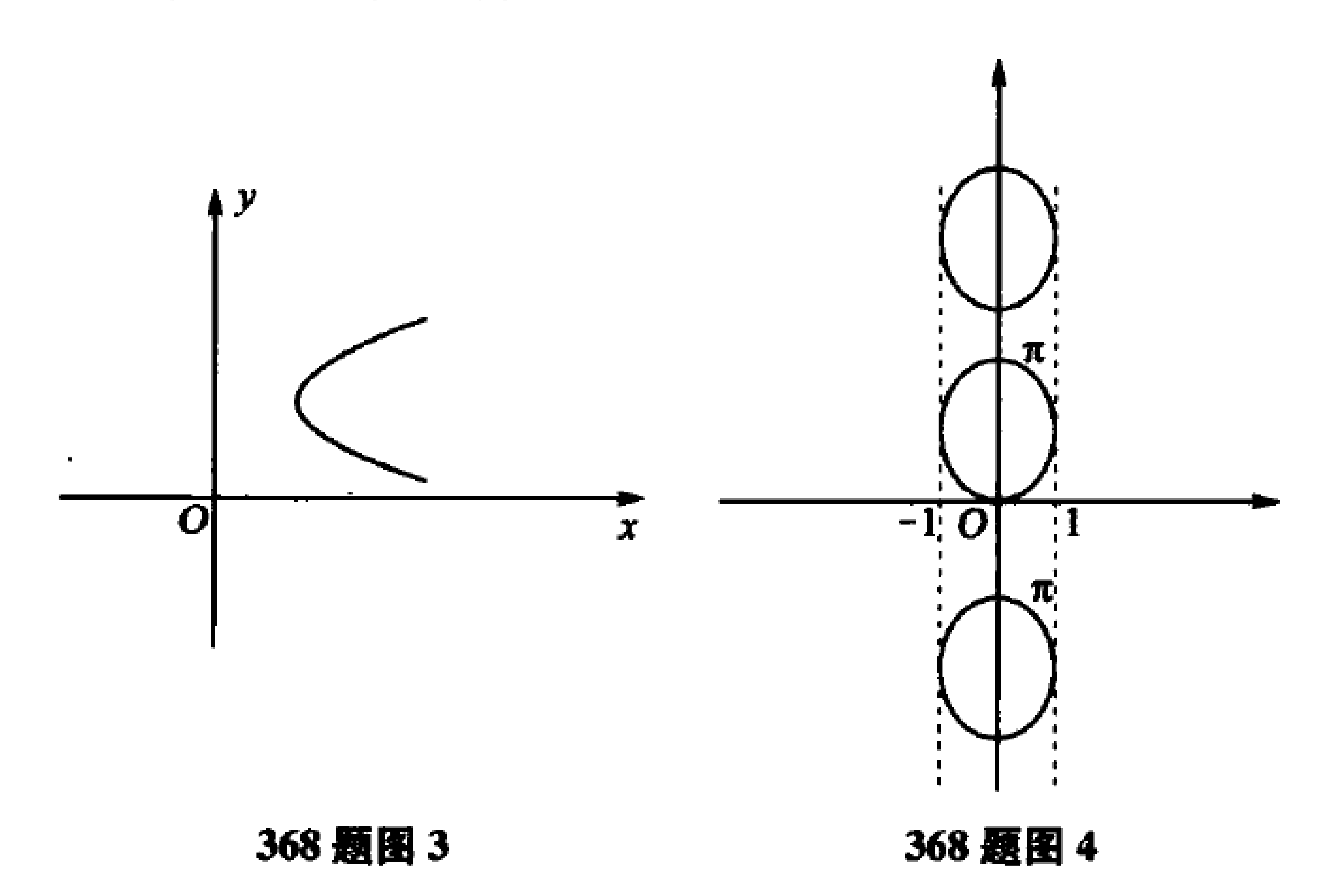
(2) 如 368 题图 2 所示.



368 题图 1　　368 题图 2

(3) 如 368 题图 3 所示.

(4) 如 368 题图 4 所示.



368 题图 3　　　　368 题图 4

【369】 若

(1) $x = 1 - t, y = 1 - t^2$;

(2) $x = t + \frac{1}{t}, y = t + \frac{1}{t^2}$;

(3) $x = 10\cos t, y = \sin t$　　(椭圆);

(4) $x = \mathrm{ch}t, y = \mathrm{sh}t$　　(双曲线);

(5) $x = 5\cos^2 t, y = 3\sin^2 t$;

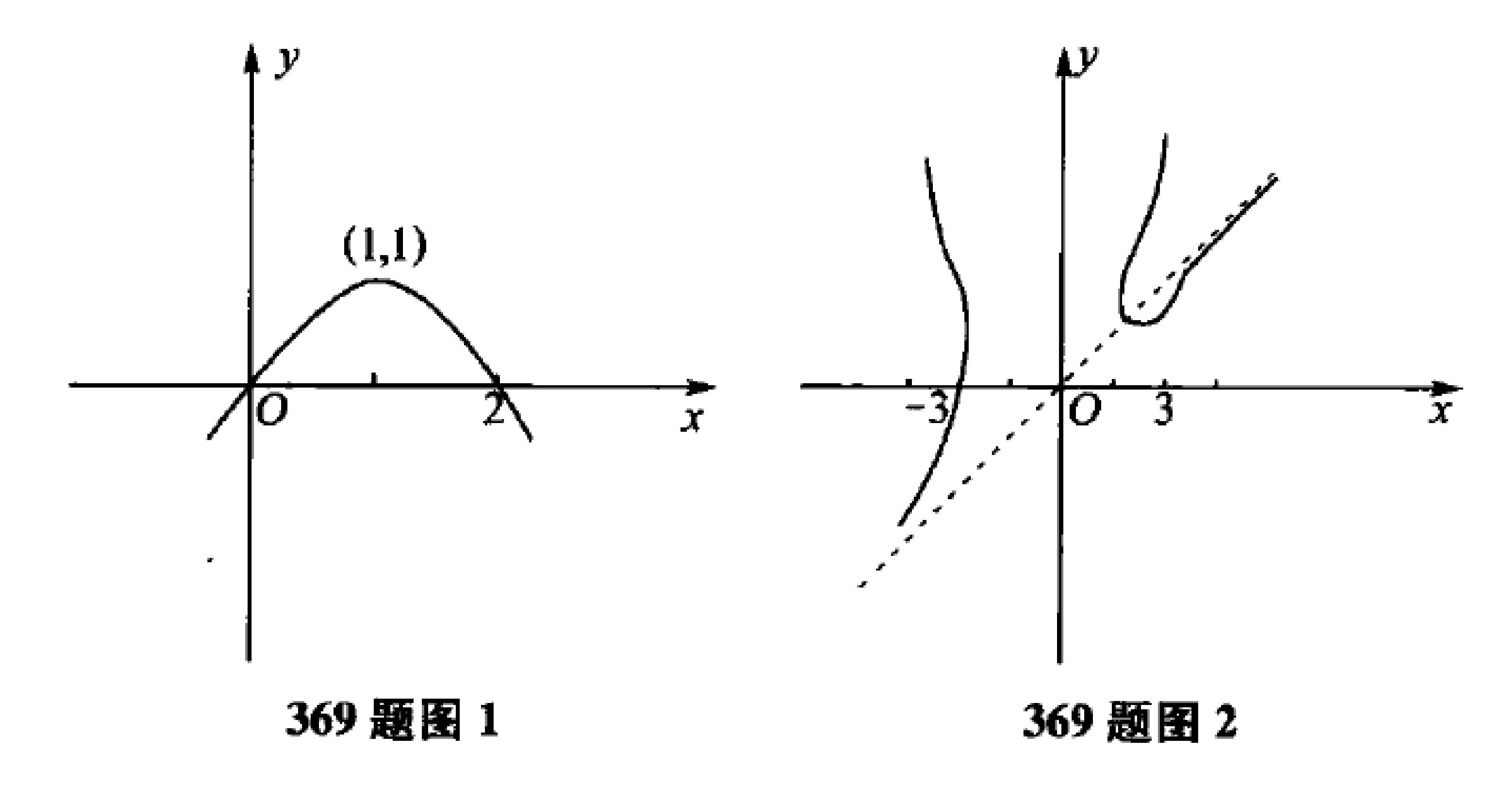
(6) $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$　　(摆线);

(7) $x = \sqrt[t+1]{t}, y = \sqrt[t]{t+1}$　　$(t > 0)$.

作出以上用参数表示的各函数的图形.

解　(1) $y - 1 = -(x-1)^2$. 如 369 题图 1 所示.

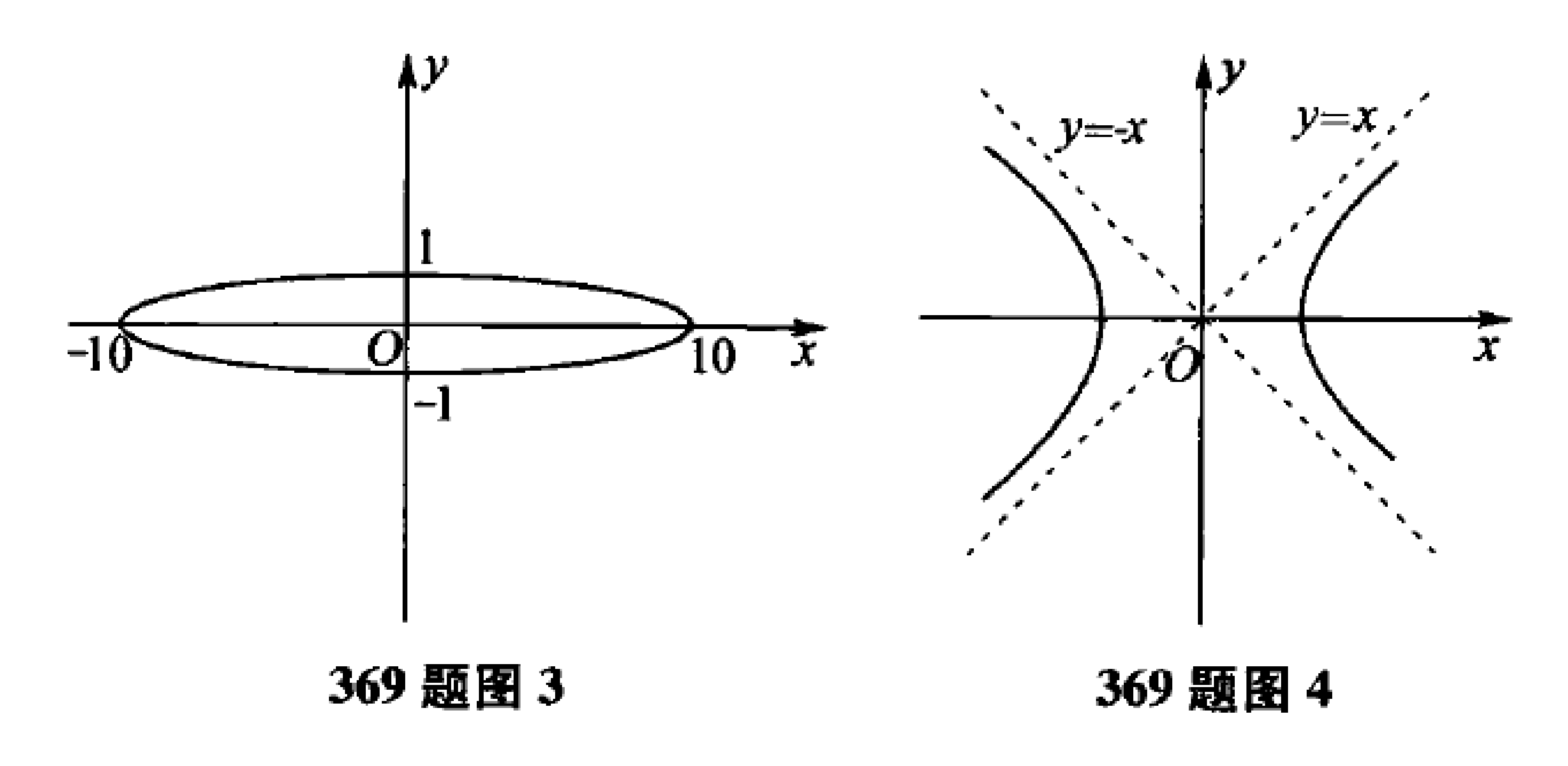
(2) 如 369 题图 2 所示.



369 题图 1　　369 题图 2

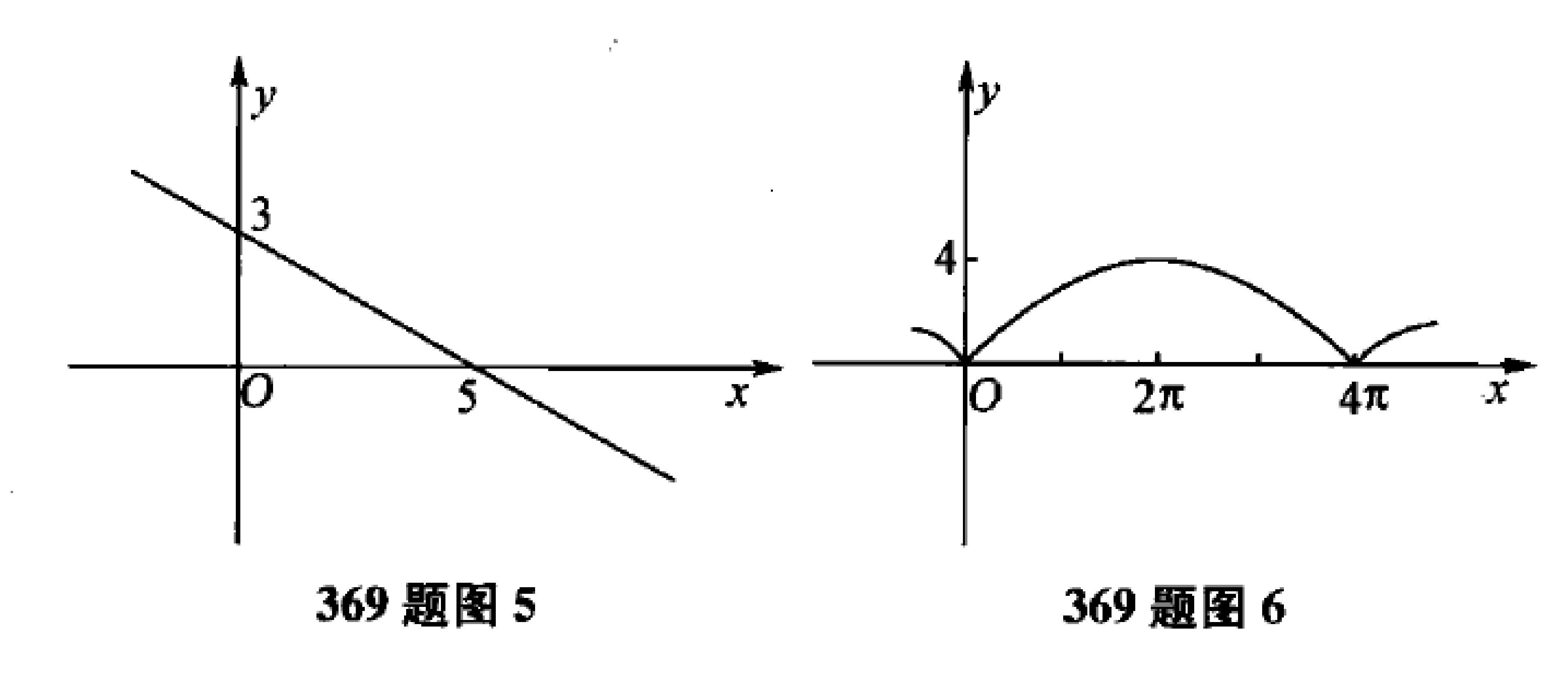
(3) $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$. 如 369 题图 3 所示.

(4) $x^2-y^2=1$. 如 369 题图 4 所示.



369 题图 3　　369 题图 4

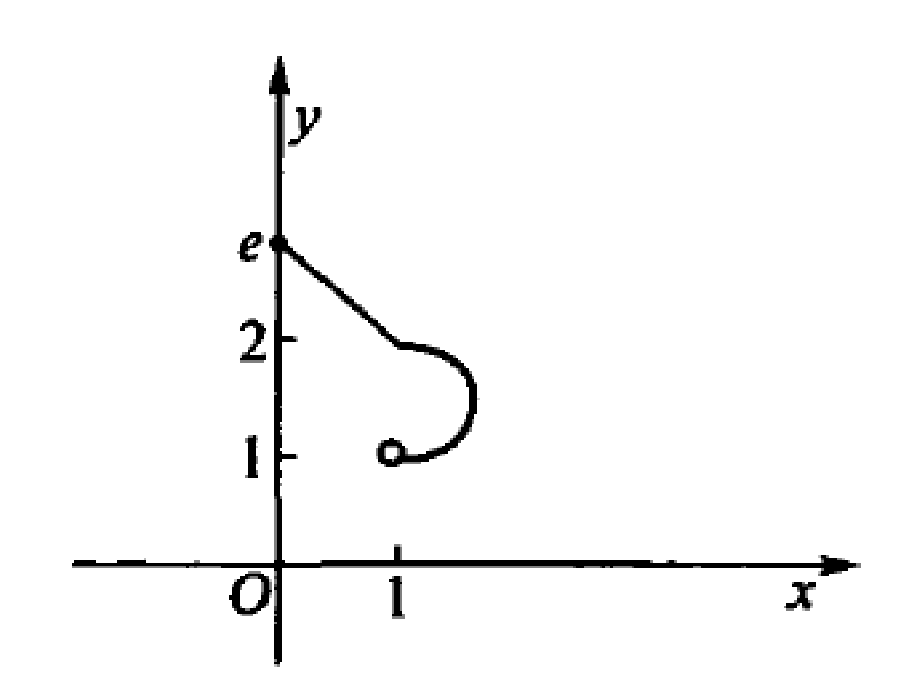
(5) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$. 如 369 题图 5 所示.



369 题图 5　　369 题图 6

(6) 如 369 题图 6 所示.

(7) 如 369 题图 7 所示.



369 题图 7

【370】 作出以下隐函数的图形.

(1) $x^2-xy+y^2=1$　　(椭圆);

(2) $x^3+y^3-3xy=0$　　(笛卡尔叶形线);

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$　　(抛物线);

(4) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$　　(内摆线);

(5) $\sin x=\sin y$;

(6) $\cos(\pi x^2)=\cos(\pi y)$;

(7) $x^y=y^x$　　$(x>0,y>0)$;

(8) $x-|x|=y-|y|$.

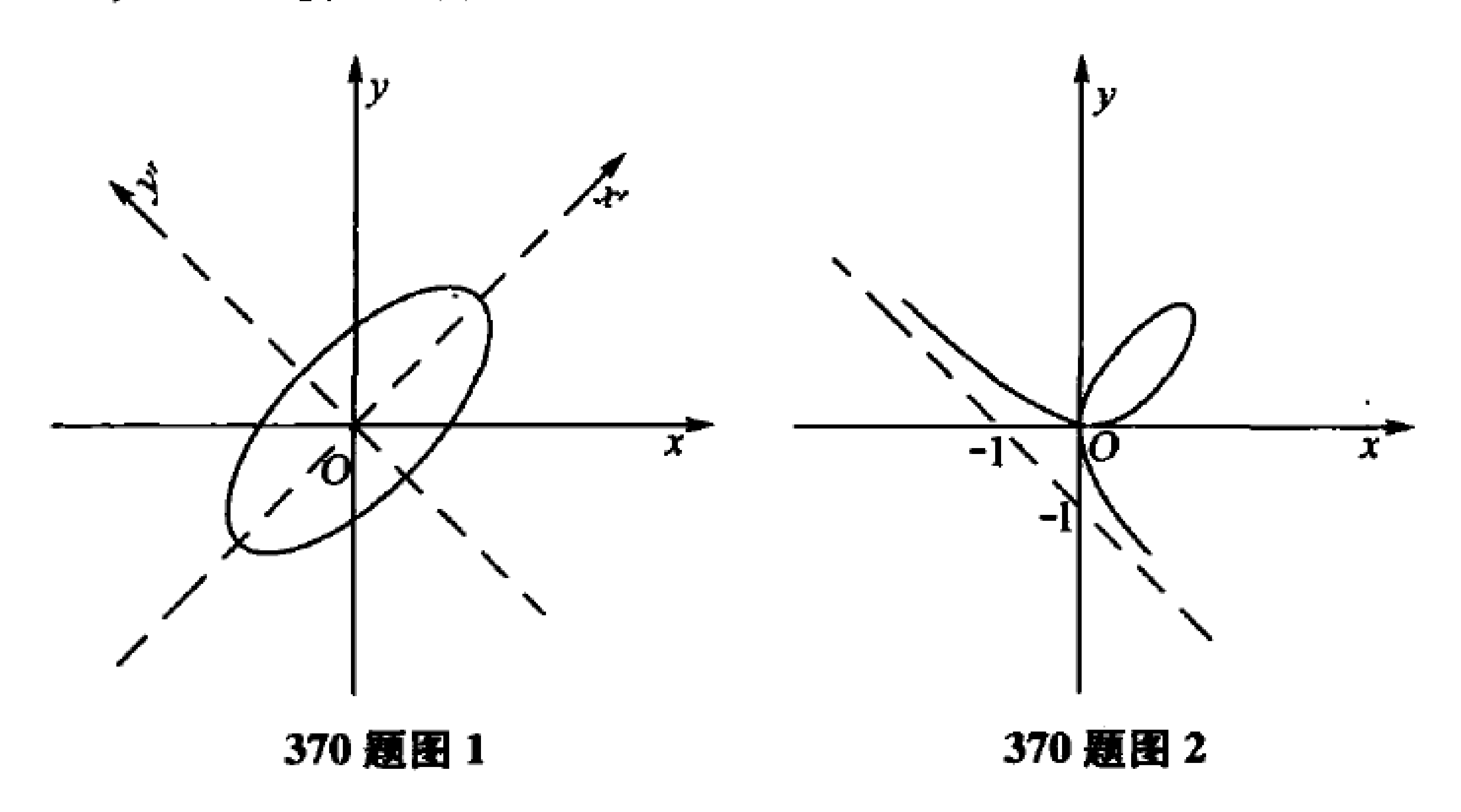
解　(1) 将坐标按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$,得新的坐标系 $Ox'y'$,
旋转公式为 $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}},y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$.
代入原方程得$\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{\frac{2}{3}}=1$.

如 370 题图 1 所示

(2) 作坐标变换 $x=x'-y',y=x'+y'$,
则原方程变为 $y'^2=\dfrac{3x'^2-2x'^3}{6x'+3}$,

即 $x' = -\dfrac{1}{2}$ 为图形的渐近线，所以渐近线为 $x+y+1=0$.

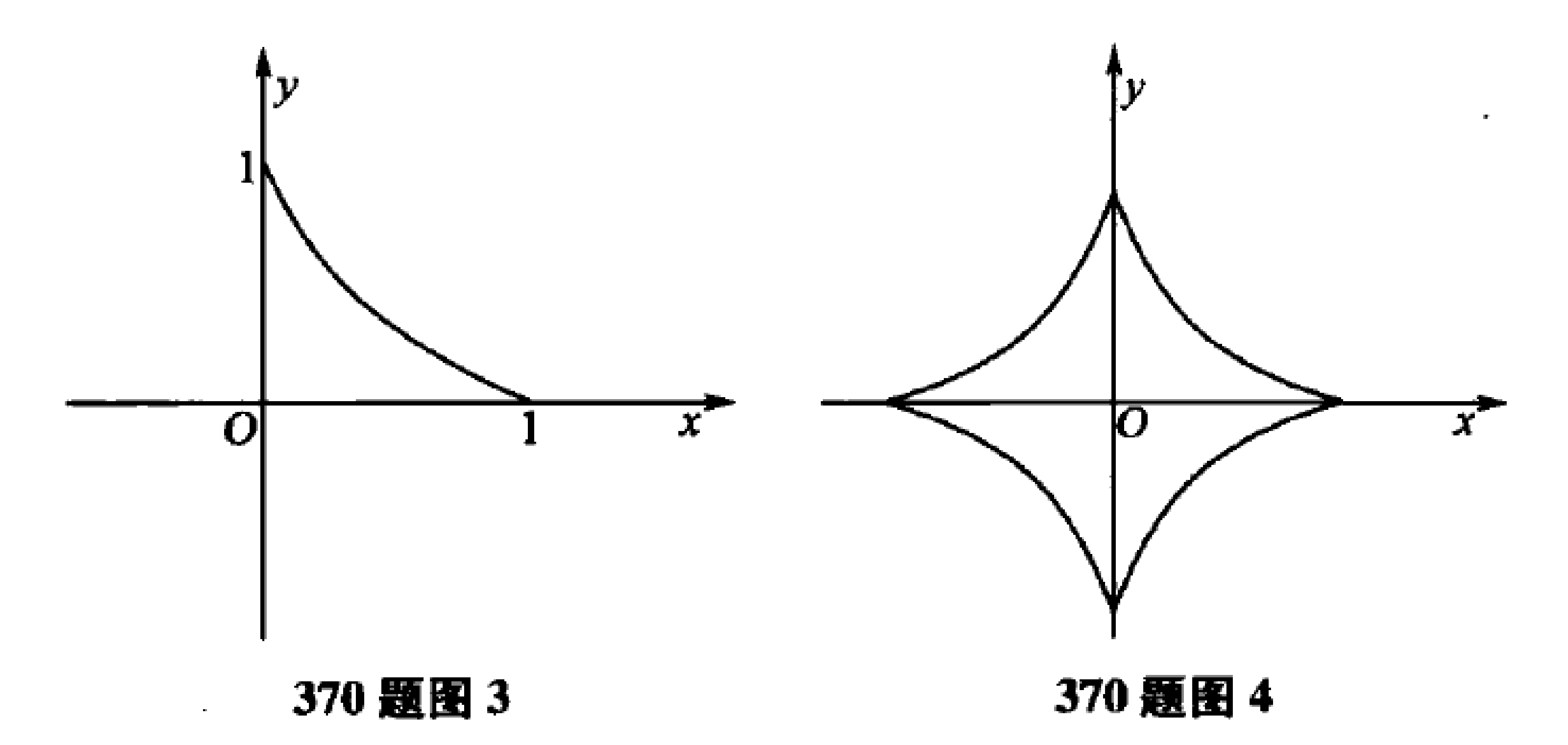
如 370 题图 2 所示.



370 题图 1　　370 题图 2

(3) 如 370 题图 3 所示.

(4) 如 370 题图 4 所示.



370 题图 3　　370 题图 4

(5) $y = x + 2k\pi$

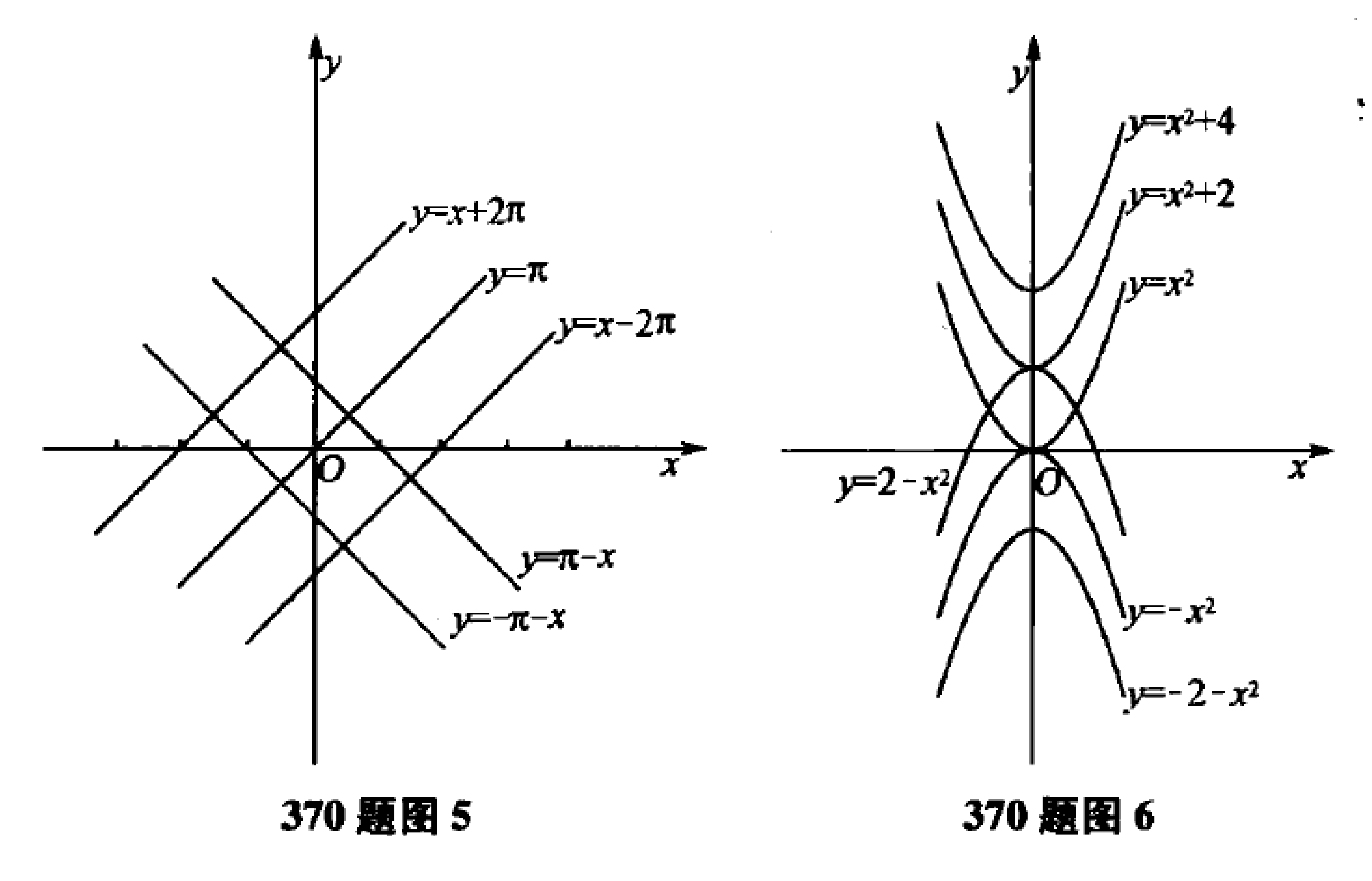
或 $\qquad y = (2k+1)\pi - x \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

如 370 题图 5 所示.

(6) $y = x^2 + 2k$

或 $\qquad y = 2k - x^2 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

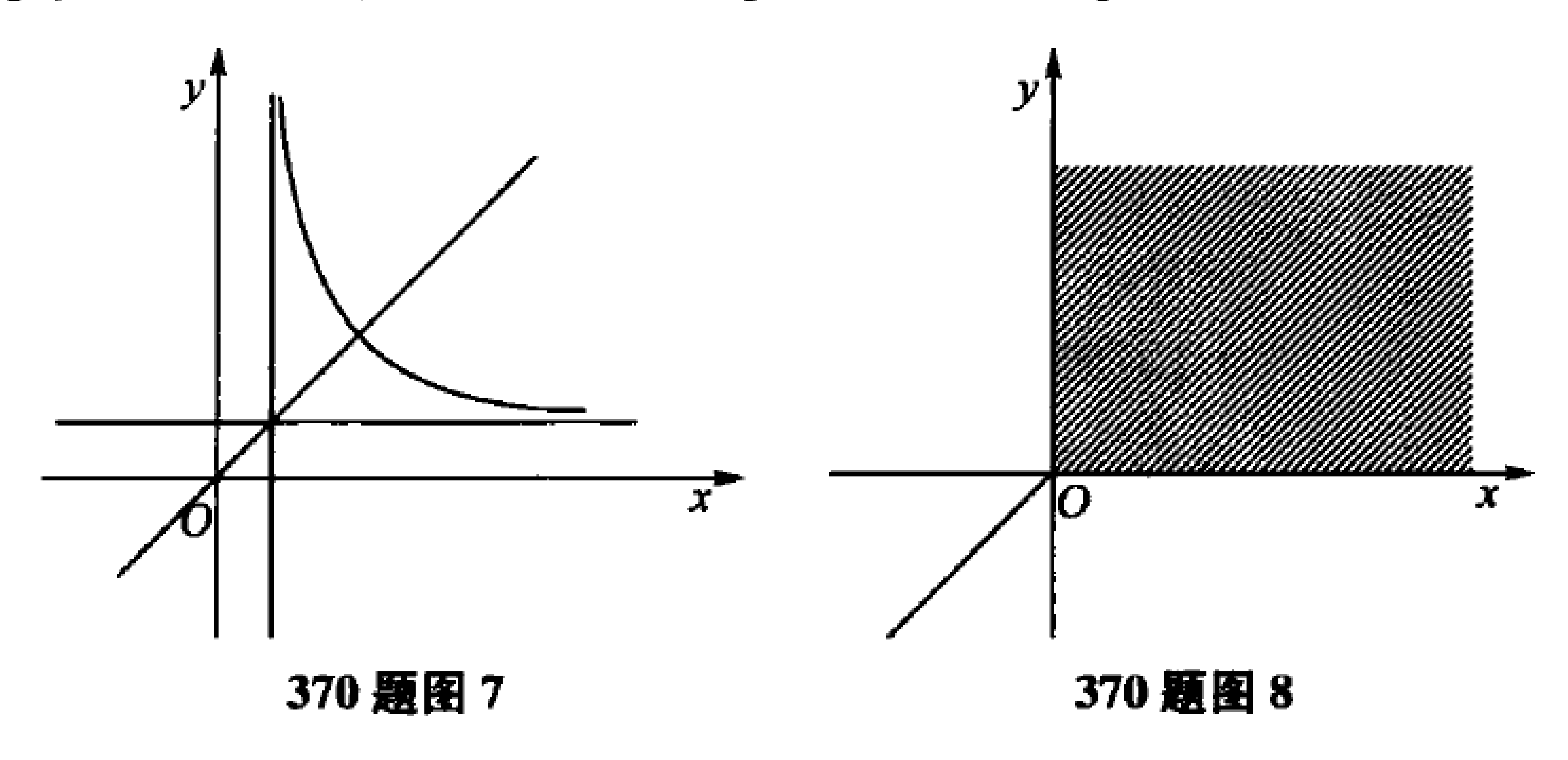
如 370 题图 6.



370 题图 5　　370 题图 6

(7) 如 370 题 7 所示(参阅 1544 题).

(8) 如 370 题图 8 所示，图形包括第一象限(含边界)：$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$ 及位于第三象限的射线 $y = x(x < 0, y < 0)$.



370 题图 7　　370 题图 8

【370.1】　作出以下隐函数的图形.

(1) $\min\{x, y\} = 1$；

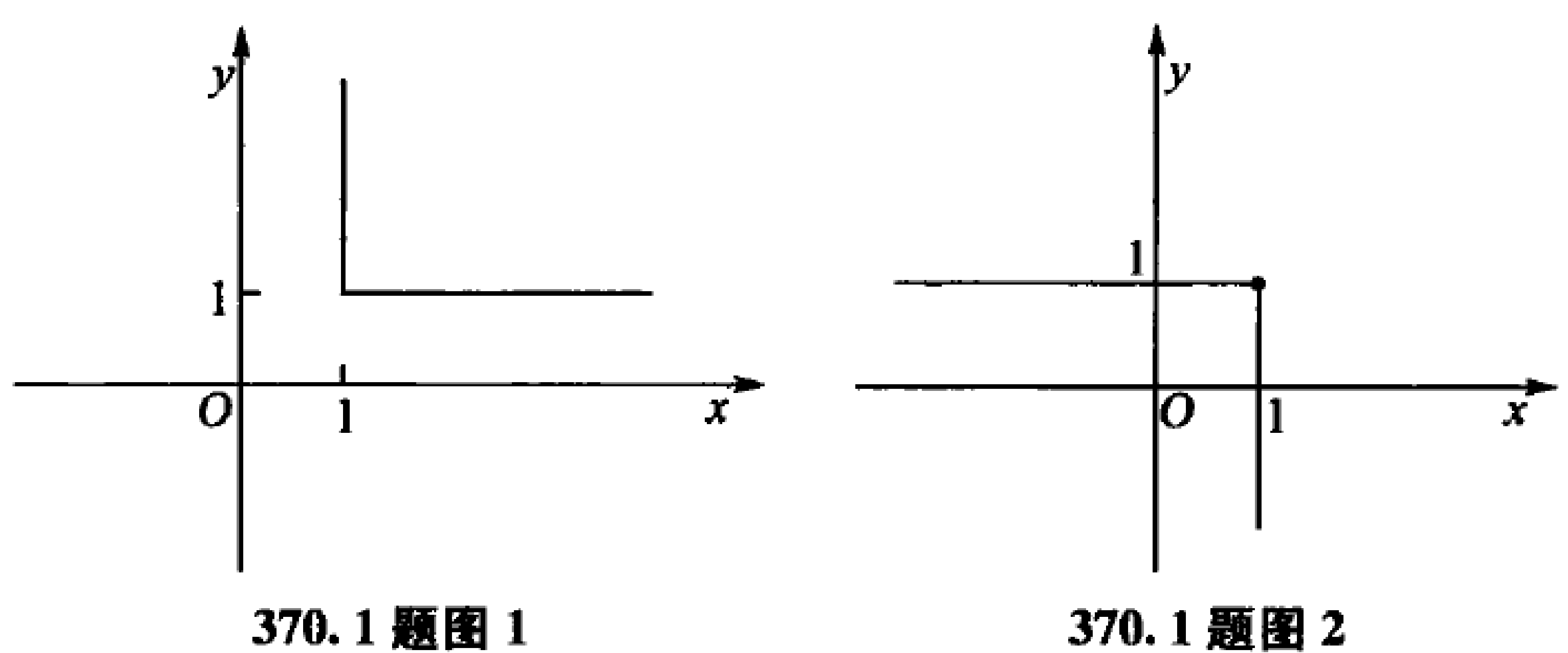
(2) $\max\{x, y\} = 1$；

(3) $\max(|x|, |y|) = 1$；

(4) $\min\{x^2, y\} = 1$.

解　(1) 如 370.1 题图 1 所示，图形包含两条射线 $y = 1, x \geqslant 1$ 及 $x = 1, y \geqslant 1$.

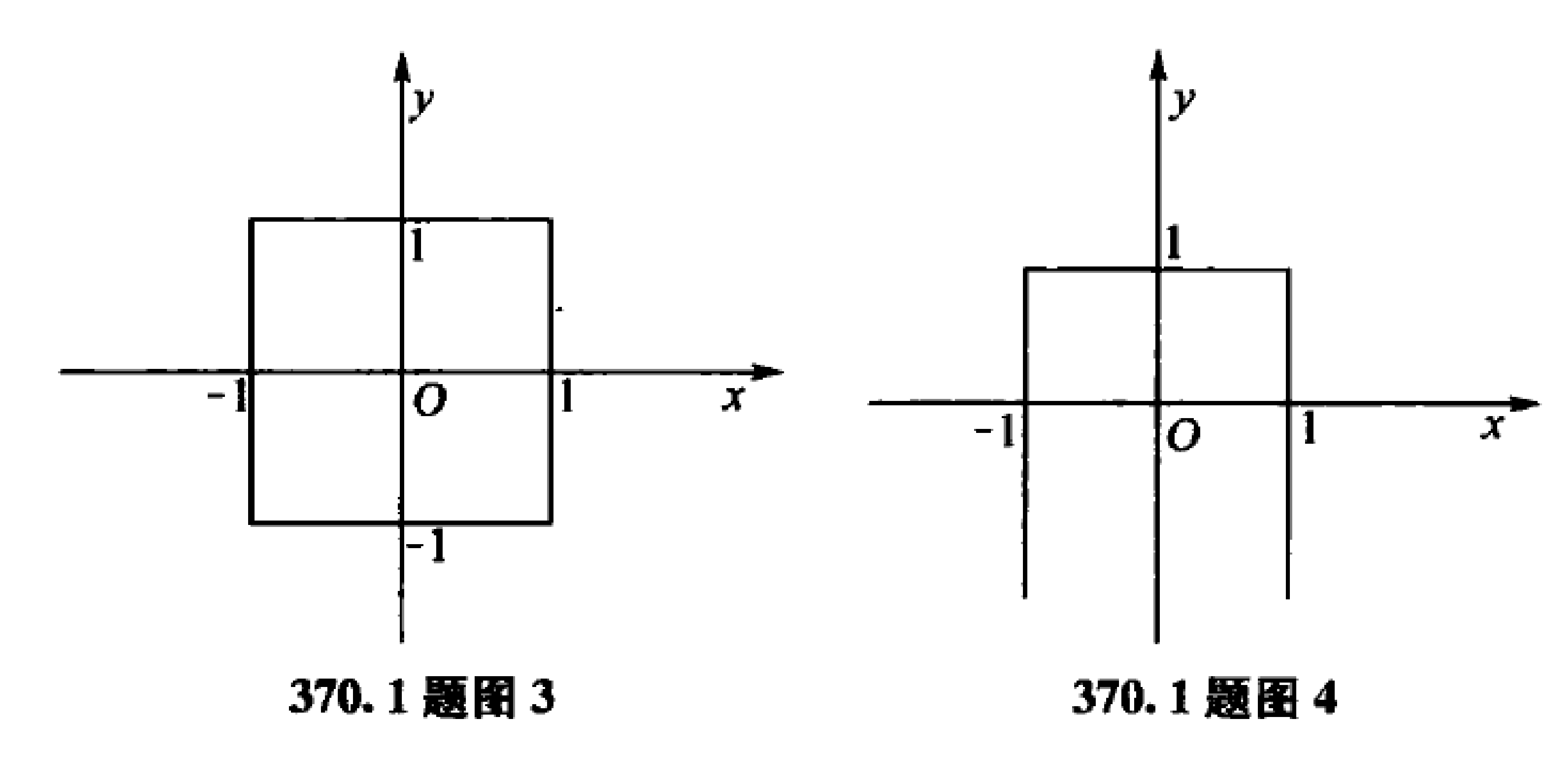
(2) 如 370.1 题图 2 所示.



370.1 题图 1　　370.1 题图 2

(3) 如 370.1 题图 3 所示.

(4) 如 370.1 题图 4 所示.



370.1 题图 3　　370.1 题图 4

【371】 在极坐标(r,φ)系中作出函数 $r=r(\varphi)$ 的图形. 若:

(1) $r=\varphi$　(阿基米德螺线);

(2) $r=\dfrac{\pi}{\varphi}$　(双曲螺线);

(3) $r=\dfrac{\varphi}{\varphi+1}$　$(0\leqslant\varphi<+\infty)$;

(4) $r=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$　(对数螺线);

(5) $r=2(1+\cos\varphi)$　(心脏形线);

(6) $r=10\sin3\varphi$　(三瓣玫瑰线);

(7) $r^2=36\cos2\varphi$　(伯努利双纽线);

(8) $\varphi=\dfrac{r}{r-1}$　$(r>1)$;

(9) $\varphi = 2\pi\sin r$.

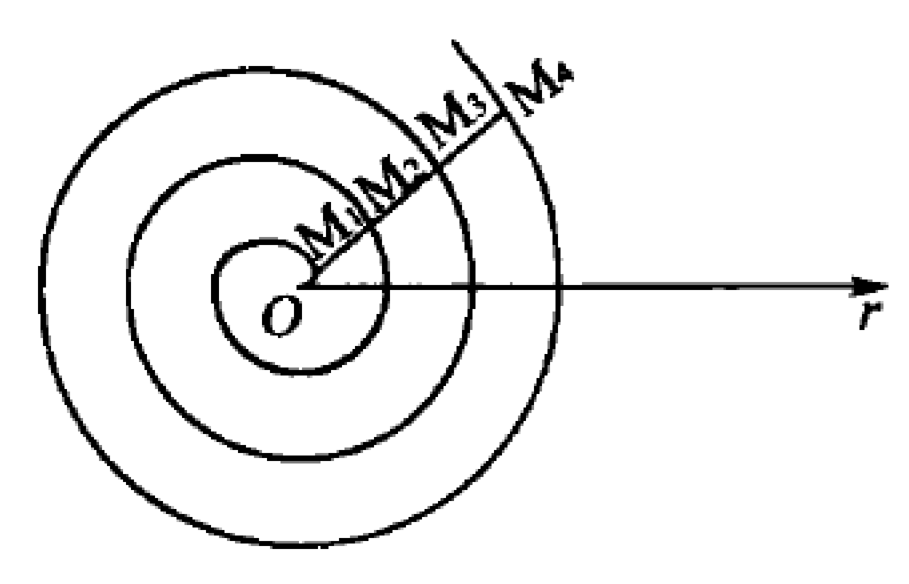
解 (1) 如 371 题图 1 所示.

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = \cdots = 2\pi$$

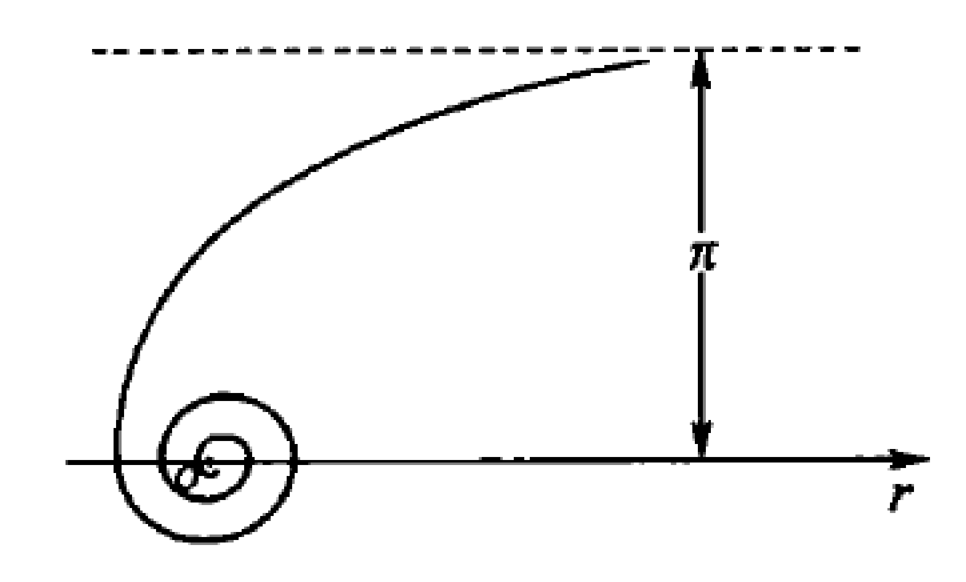
(2) 如 371 题图 2 所示.

(3) 如 371 题图 3 所示.

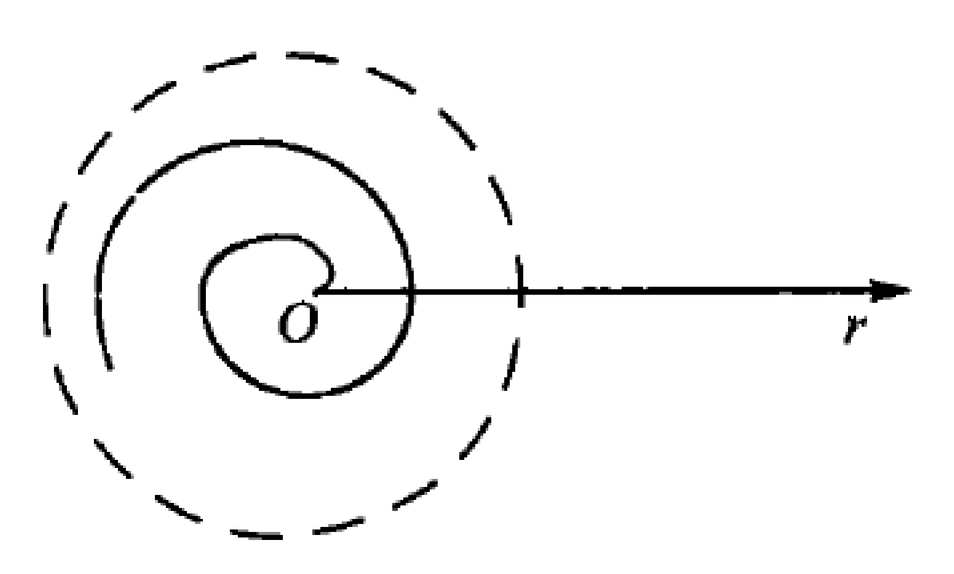
(4) 如 371 题图 4 所示.



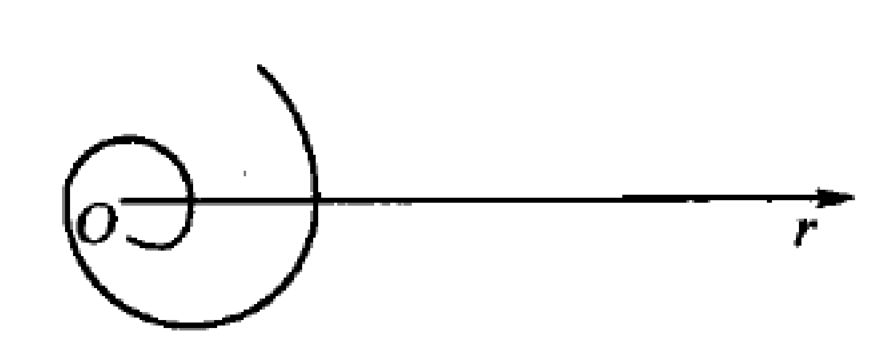
371 题图 1



371 题图 2



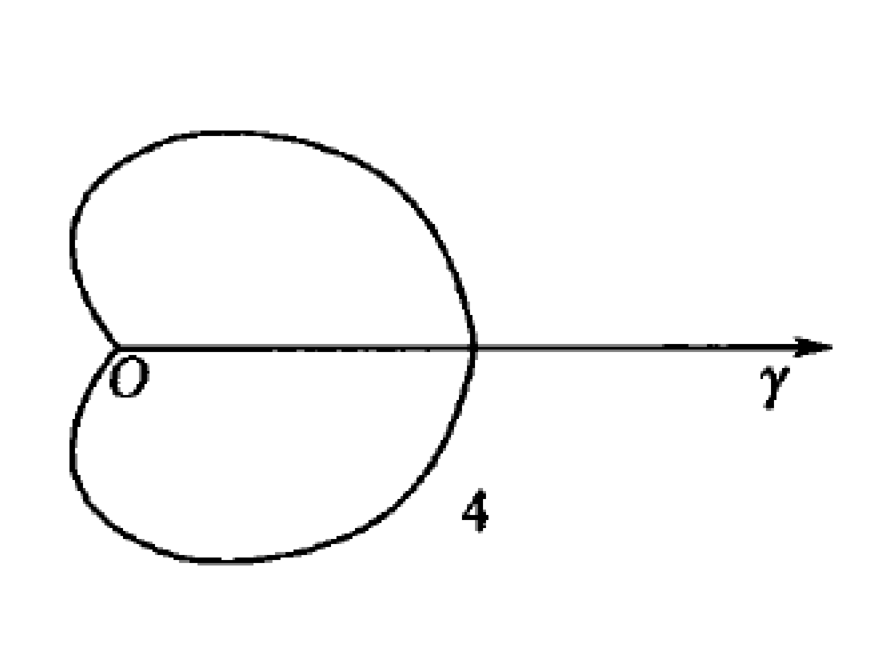
371 题图 3



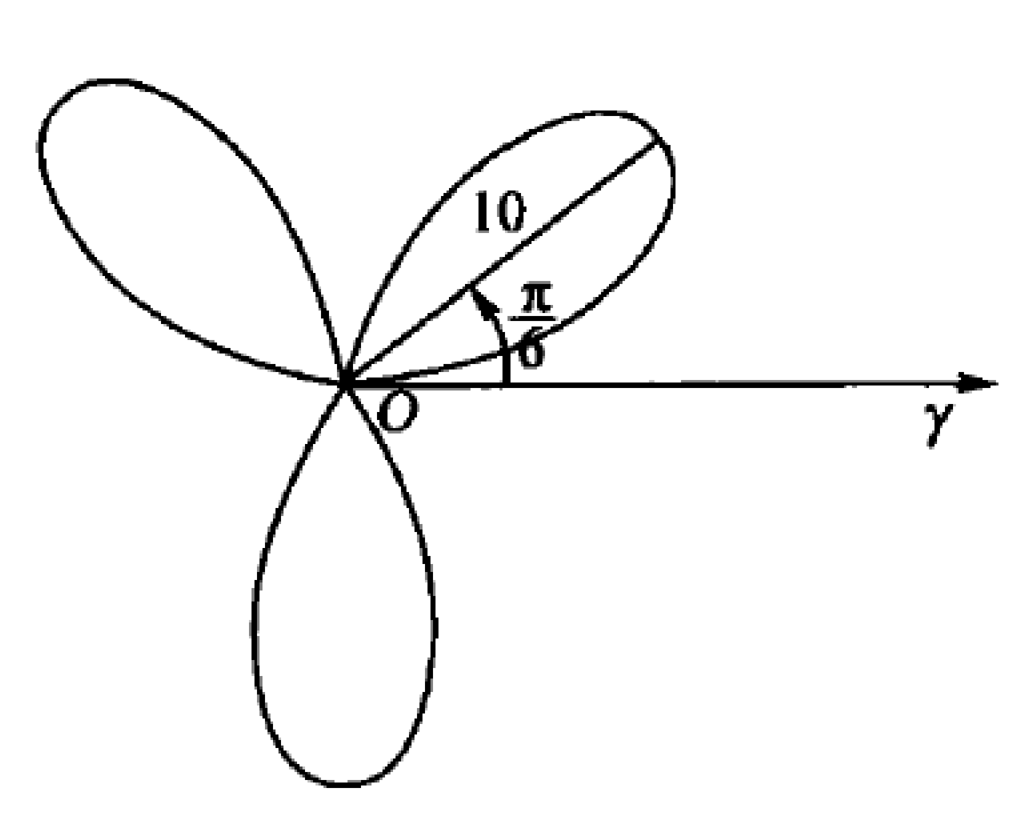
371 题图 4

(5) 如 371 题图 5 所示.

(6) 如 371 题图 6 所示.

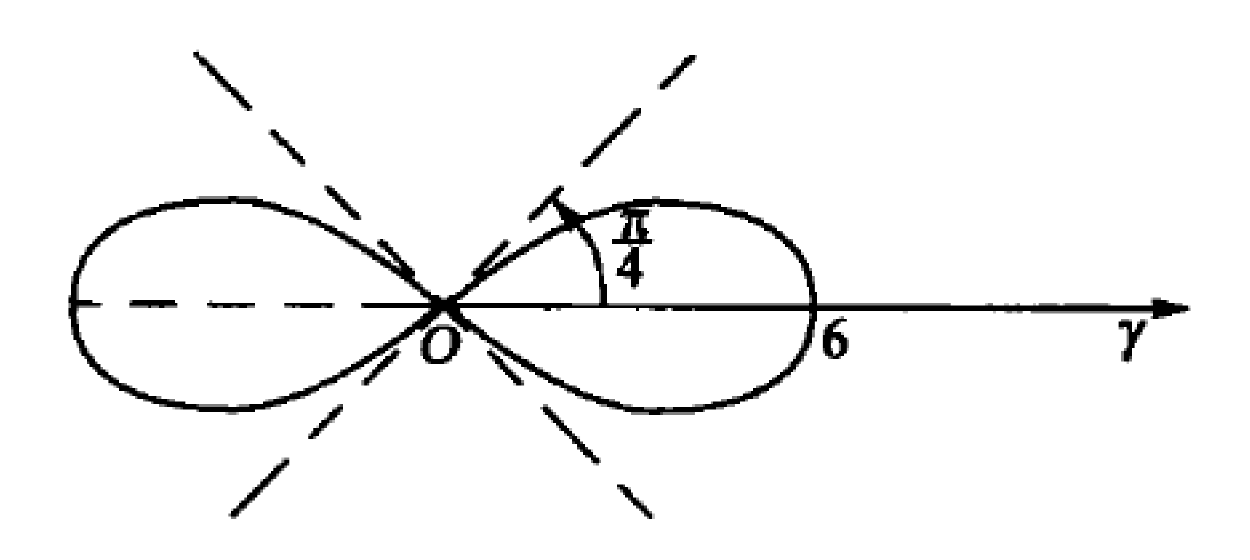


371 题图 5



371 题图 6

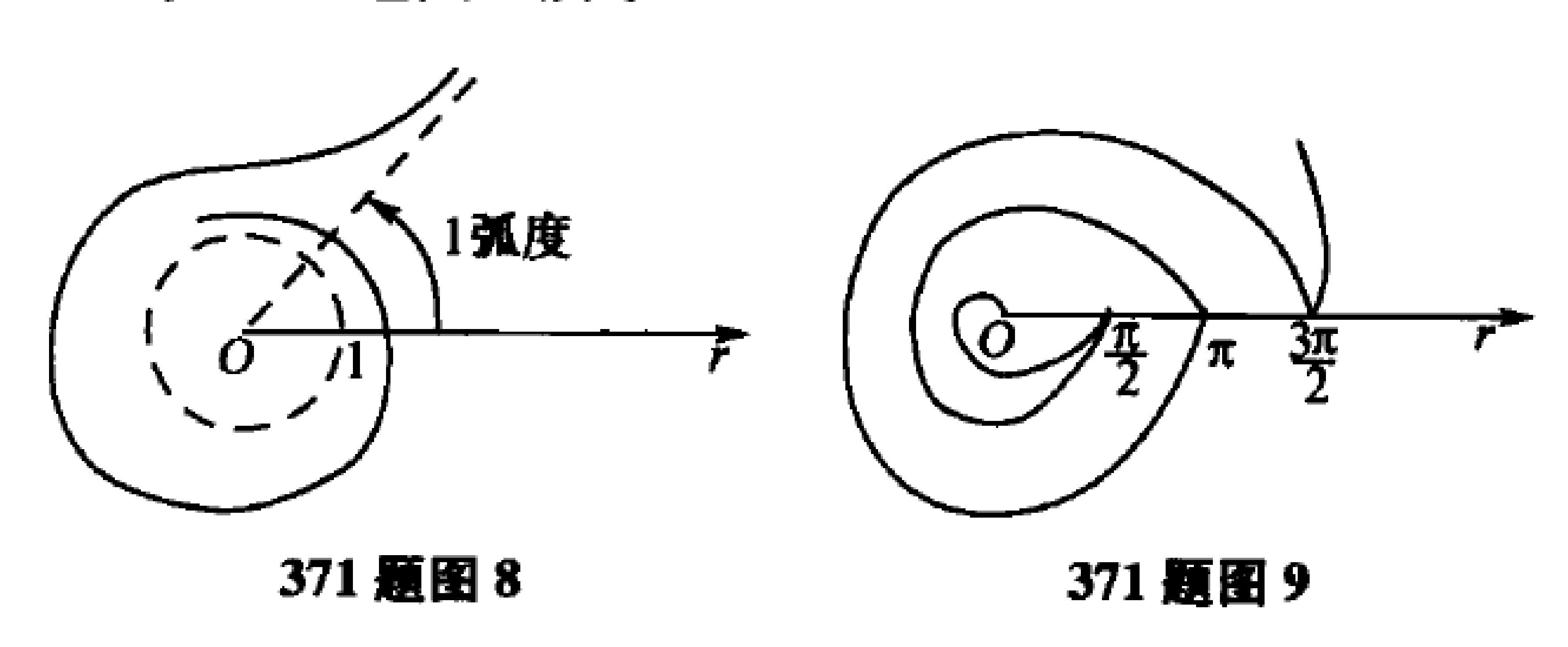
(7) 如 371 题图 7 所示.



371 题图 7

(8) 如 371 题图 8 所示.

(9) 如 371 题图 9 所示.



371 题图 8　　　　371 题图 9

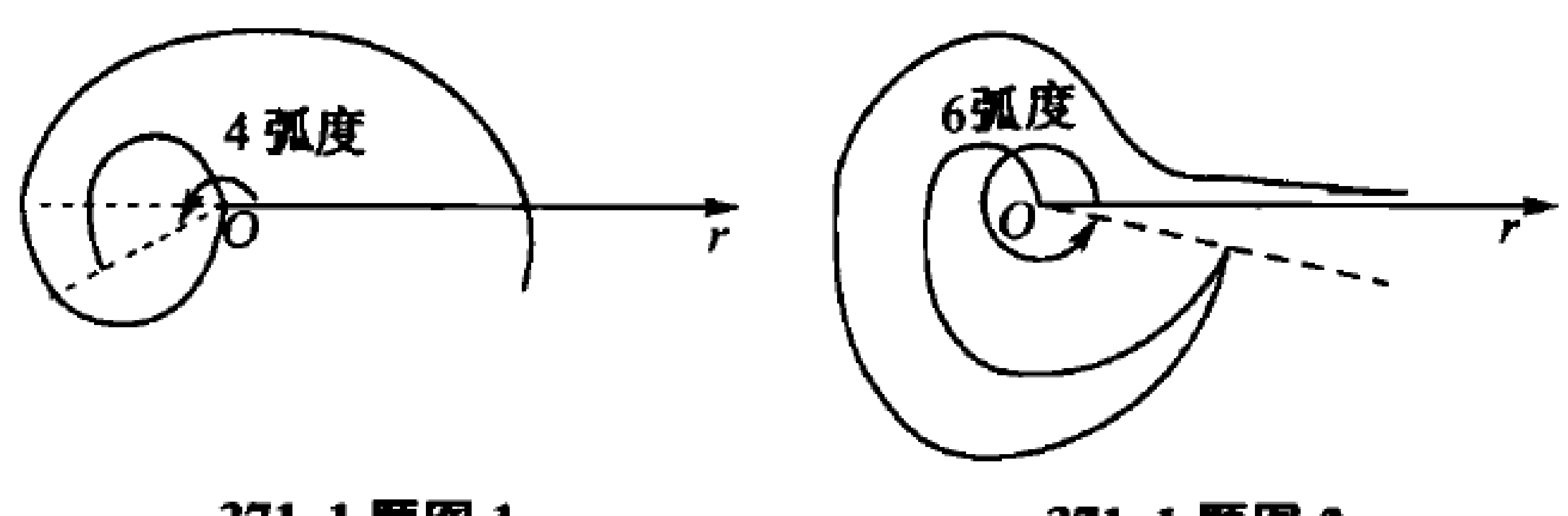
【371.1】 在极坐标系(r,ρ)中作出下列函数的图形：

(1) $\varphi = 4r - r^2$；　　(2) $\varphi = \dfrac{12r}{1+r^2}$；

(3) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

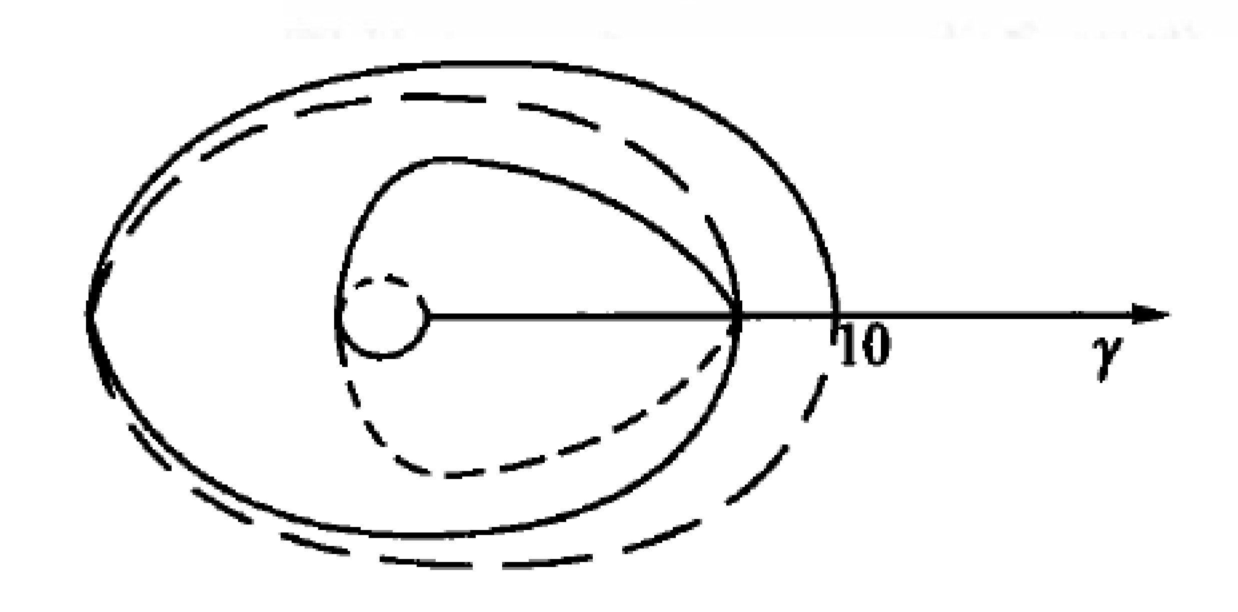
解 (1) $(r-2)^2 = 4-\varphi$，如 371.1 题图所示.

(2) 如 371.1 题图 2 所示.



371.1 题图 1　　　　371.1 题图 2

(3) 如 371.1 题图 3 所示.



371.1 题图 3

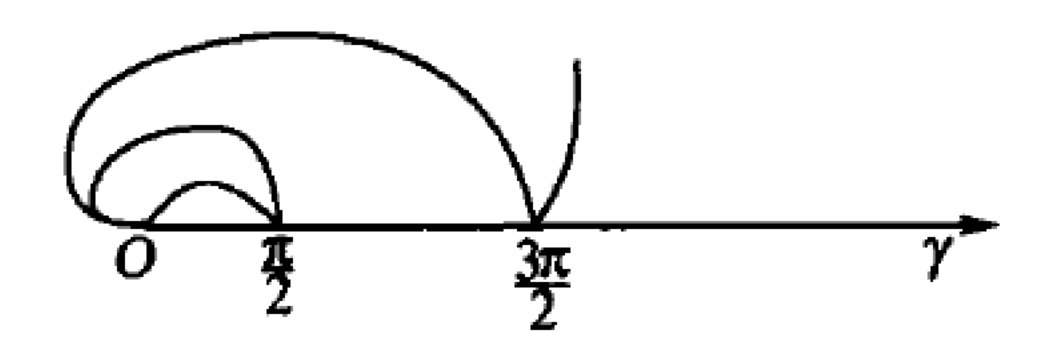
【371.2】 在极坐标系(r,ρ)中作出参数给定的函数的图形($t\geqslant 0$ 参数)

(1) $\begin{cases}\varphi = t\cos^2 t,\\ r = t\sin^2 t,\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\varphi = 1-2^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2},\\ r = 1-2^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2}.\end{cases}$

解　(1) 当 $t = k\pi$ 时，$r = 0, \varphi = k\pi$；

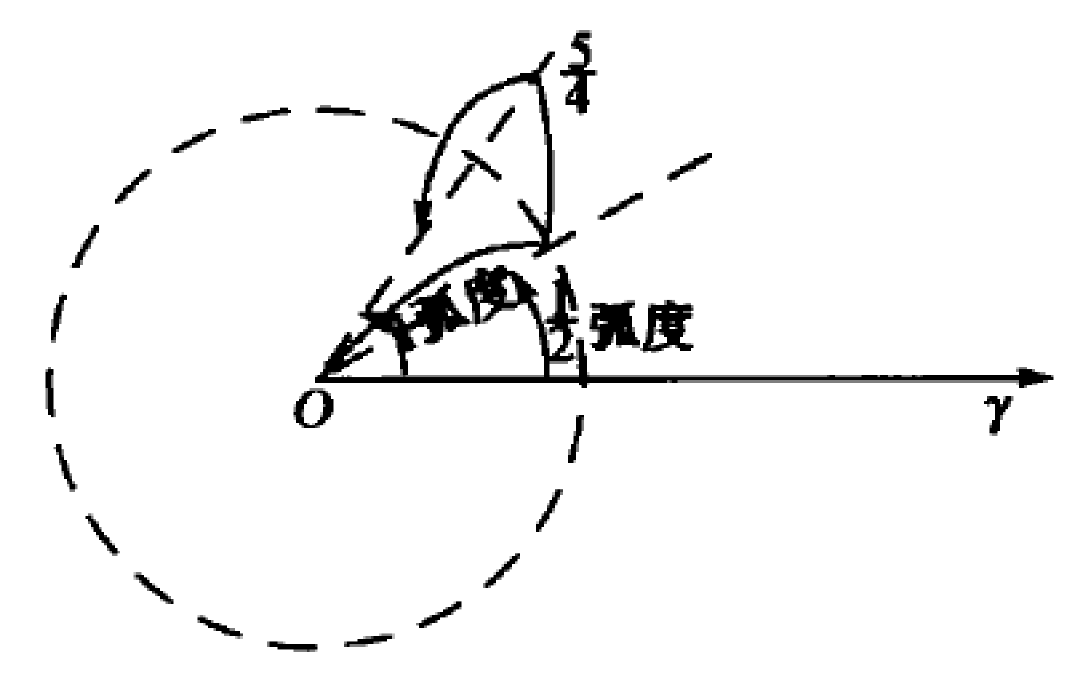
当 $t = k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$r = k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，　$\varphi = 0(k = 0,1,2,\cdots)$.

如 371.2 题图 1 所示.



371.2 题图 1

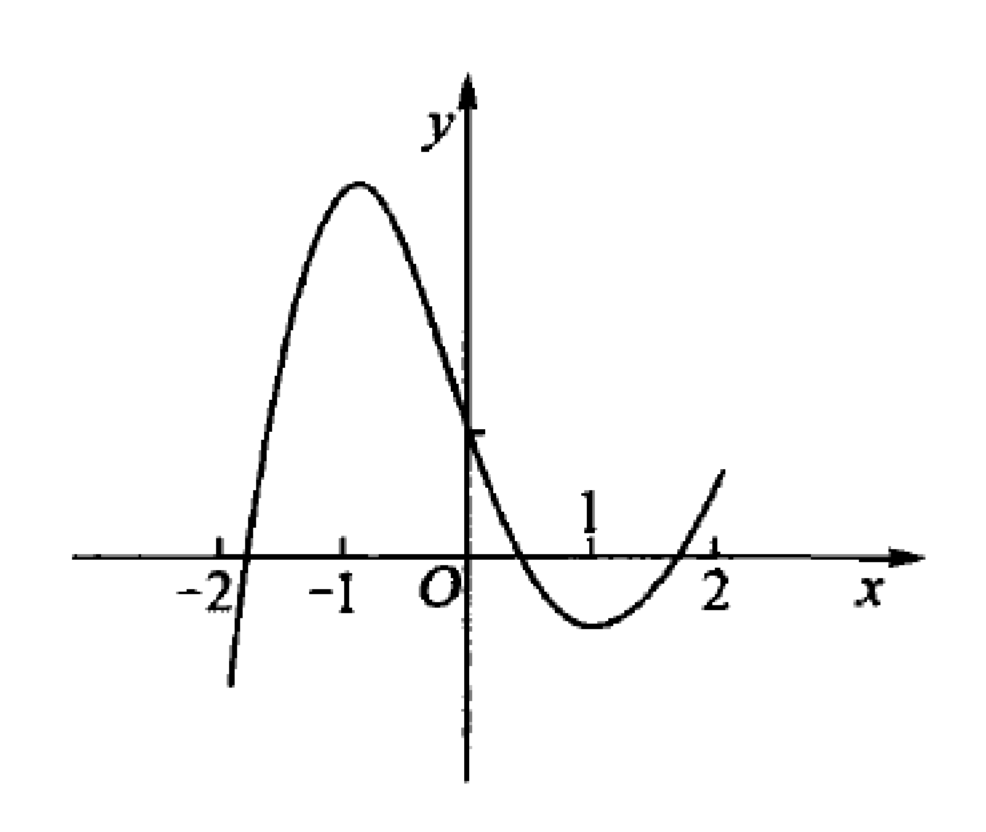
(2) 如 371.2 题图 2 所示.



371.2 题图 2

【372】 作出函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图形,以求方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 的近似解.

解 如 372 题图所示.



372 题图

因 $\qquad y\,|_{x=0} = 1 > 0, y\,|_{x=0.4} = -0.136,$

所以在 0 与 0.4 之间有一实根,约为 0.35,同法同求其它二近似根为 1.53 及 -1.88.

用图解法解以下方程式(373 ~ 378).

【373】 $x^3 - 4x - 1 = 0.$

解 作函数 $y = x^3$ 及 $y = 4x + 1$ 的图,它们交点的横坐标即为方程的根,如 373 题图所示. 在图示根 x_0 的附近研究

$$f(x) = x^3 - 4x + 1.$$

若对适当小的正数 δ,有

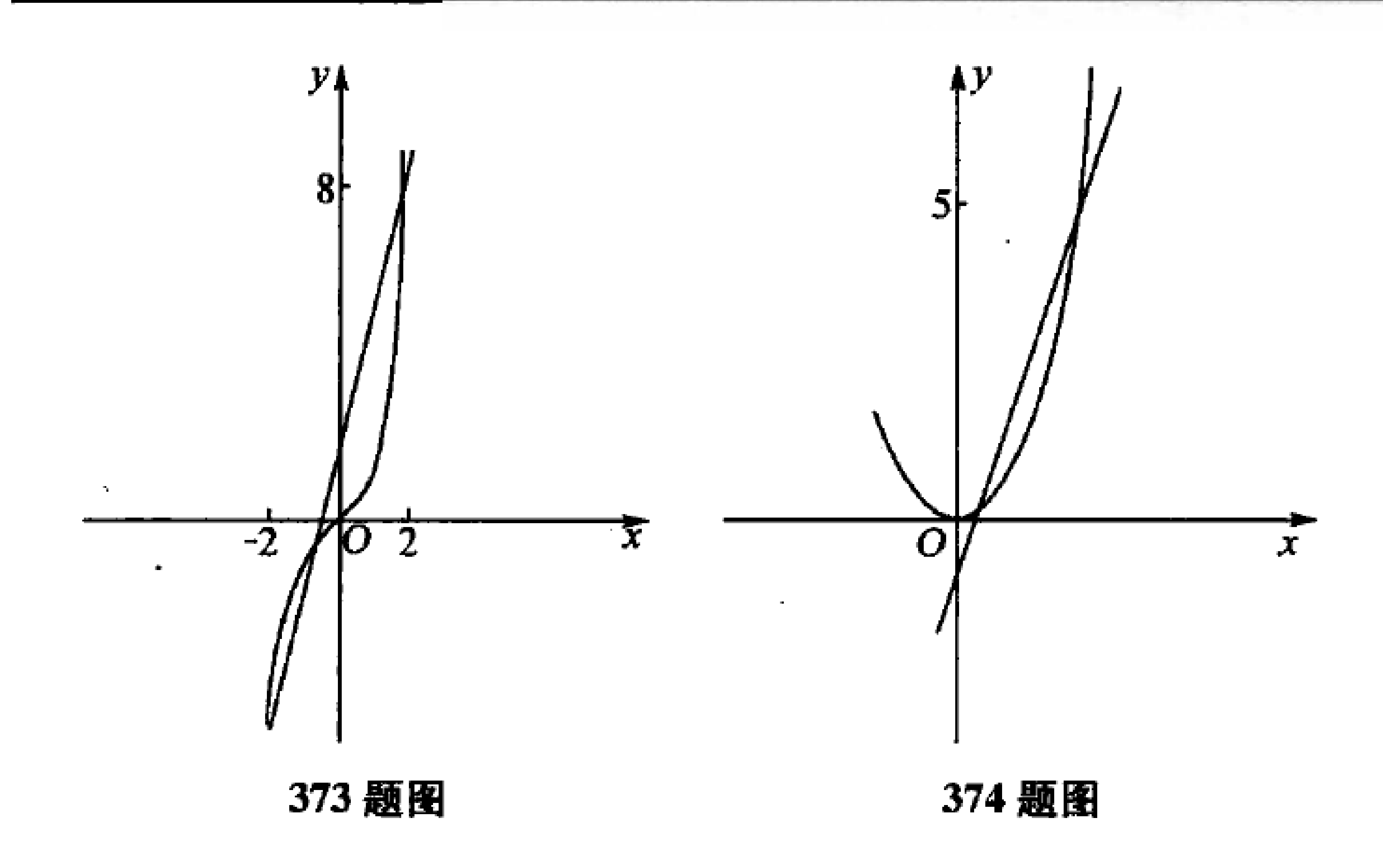
$$f(x_0 + \delta)f(x_0 - \delta) < 0,$$

则方程的根介于 $x_0 - \delta$ 及 $x_0 + \delta$ 之间,则 x_0 可作为近似根.

经判别,方程的近似根为 -1.86, -0.25, 2.11.

【374】 $x^4 - 4x + 1 = 0.$

解 作函数 $y = x^4$ 及 $y = 4x - 1$ 的图形. 如 374 题图所示. 两曲线的交点的横坐标即为所求之根.



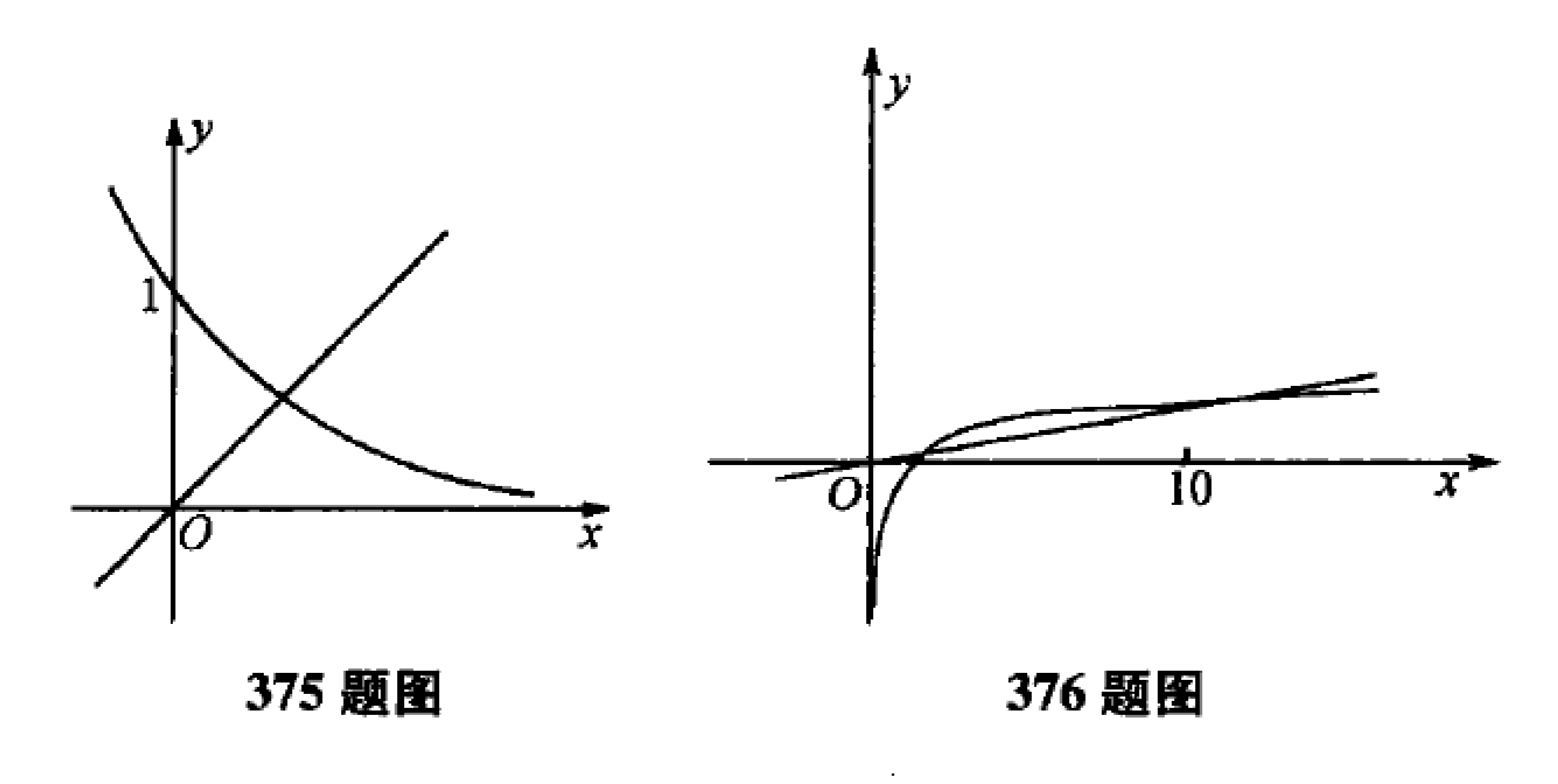
373 题图　　374 题图

经判别,其近似值为 0.25;1.49.

【375】 $x = 2^{-x}$.

解　作函数 $y = 2^{-x}$ 及 $y = x$ 的图,如 375 题图所示. 两曲线交点的横坐标即为所求的根.

经判别其近似值为 0.64.



375 题图　　376 题图

【376】 $\lg x = 0.1x$.

解　作函数 $y = \lg x$ 及 $y = 0.1x$ 的图形. 如 376 题图所示. 两曲线的交点的横坐标即为方程的根

经判别方程的根为 1.37(近似值) 及 10(精确值).

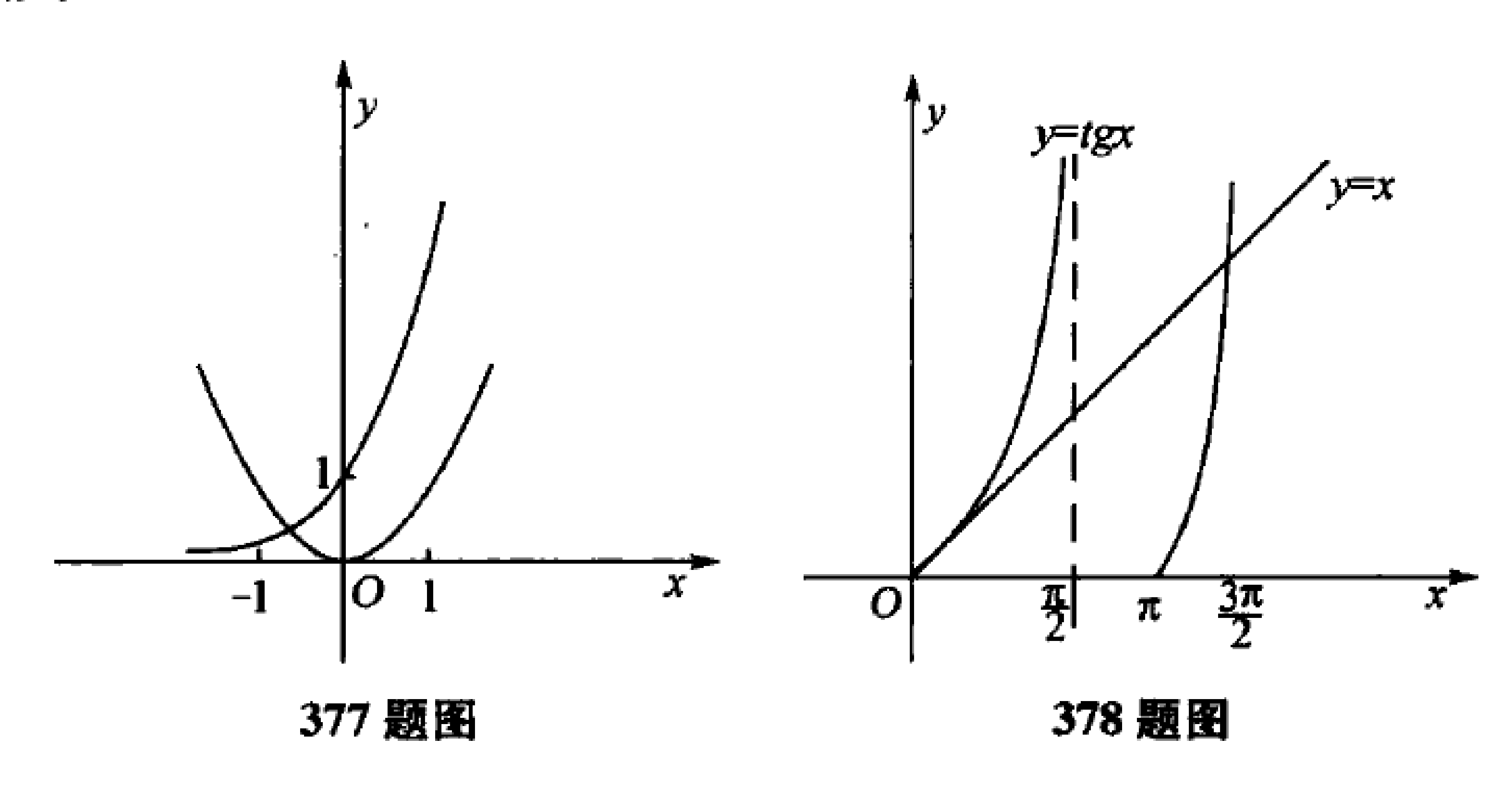
【377】 $10^x = x^2$.

解 作函数 $y = 10^x$ 及 $y = x^2$ 的图形,如 377 题图所示. 两曲线交点的横坐标即为原方程的根.

经判别其近似值为 -0.54.

【378】 $\tan x = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

解 作函数 $y = \tan x$ 及 $y = x$ 的图形,如 378 题图所示,两曲线交点的横坐标即为所求之根,它们是 0(精确值)4.49(近似值).



377 题图　　378 题图

用图解法解以下方程组(379 ~ 380).

【379】 $x + y^2 = 1, \qquad 16x^2 + y = 4$.

解 作函数 $y^2 = 1 - x$ 及 $y = 4 - 16x^2$ 的图形,如 379 题图所示. 两曲线的交点为 A、B、C、D. 它们的一对坐标即为所求方程的解. 它们的近似值为

$$x_1 = -0.42, y_1 = 1.19(A\text{ 点}),$$

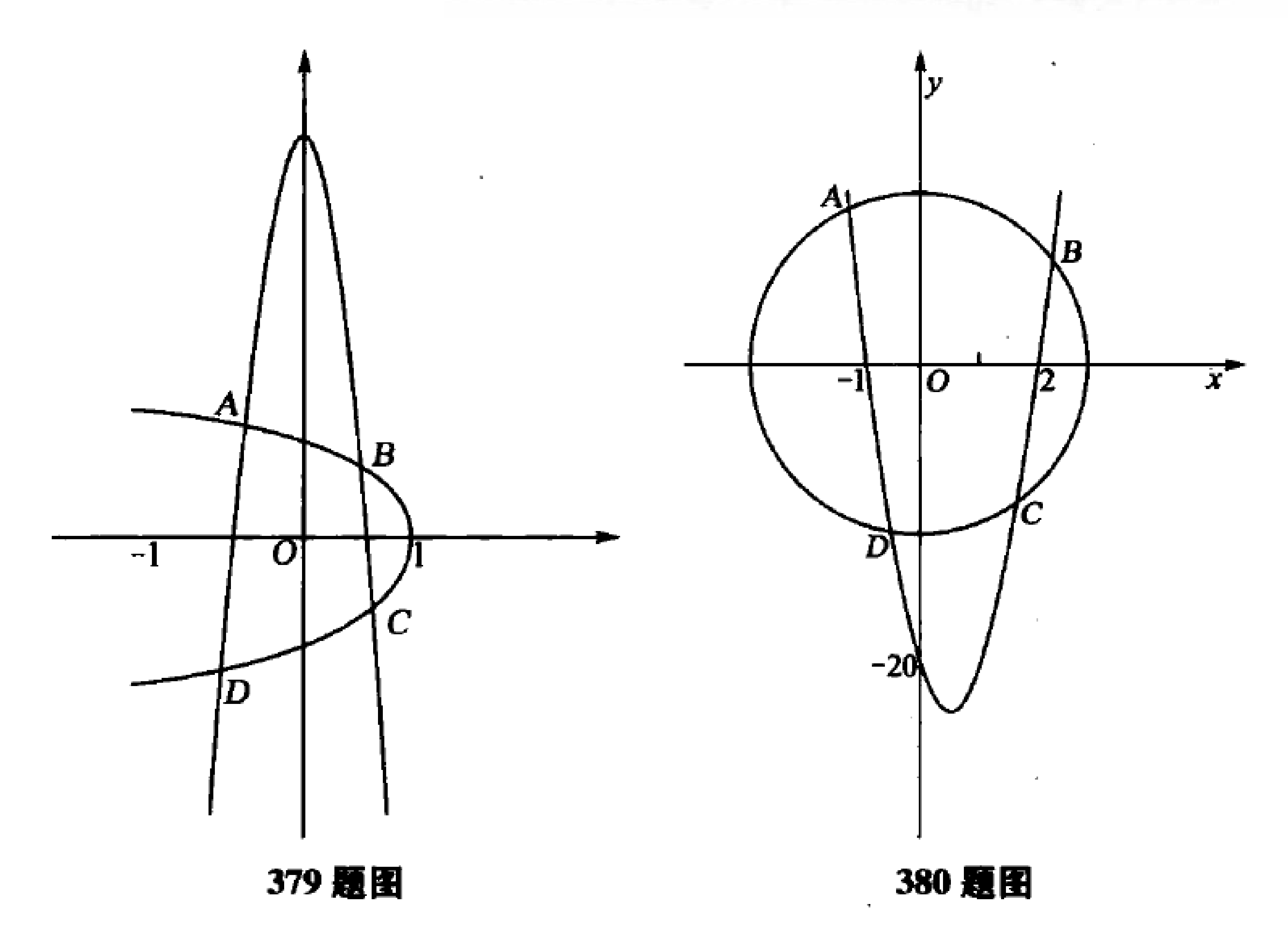
$$x_2 = 0.43, y_2 = 0.74(B\text{ 点}),$$

$$x_3 = 0.54, y_2 = -0.68(C\text{ 点}),$$

$$x_4 = -0.57, y_4 = -1.26(D\text{ 点}).$$

【380】 $x^2 + y^2 = 100, y = 10(x^2 - x - 2)$.

解 作曲线 $x^2 + y^2 = 100$ 及 $y = 10(x^2 - x - 2)$ 的图形. 如 380 题图,两曲线的交点的坐标即为方程组的解,它们的近似值为



379 题图　　380 题图

$x_1=-1.30, y_1=9.91$(A 点),

$x_2=2.30, y_2=9.73$(B 点),

$x_3=1.62, y_3=-9.87$(C 点),

$x_4=-0.62, y_4=-9.98$(D 点).

§5. 函数的极限

1. 函数的有界性

如果存在两个数 m 及 M,使得当 $x\in(a,b)$ 时,$m\leqslant f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在此区间(a,b) 为有界函数.

数 $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}=\max m$ 被称作函数 $f(x)$ 在此区间(a,b) 的下确界,而数 $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}=\min M$ 被称作函数 $f(x)$ 在此区间(a,b) 的上确界. 差 M_0-m_0 被称作函数在区间(a,b) 的振辐.

2. 函数在某一点的极限

设函数 $f(x)$ 在有聚点 a 的集 $X=\{x\}$ 上定义,符号:

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad ①$$

表示对于任一个数 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得满足条件 $0<|x-a|<\delta$ 且使 $f(x)$ 有意义的一切 x，下列不等式成立：

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数极限 ① 存在的必要且充分条件是：对于每一个序列 $x_n\to a, x_n\neq a(x_n\in X; n=1,2,\cdots)$，成立等式

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

两个著名的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

柯西判别法：函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在，当且仅当对于每一个 $\varepsilon>0$ 都能找到 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，$0<|x'-a|<\delta$ 和 $0<|x''-a|<\delta$ 时，即有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

式中 x', x'' 为函数 $f(x)$ 定义域内的点.

3. 单侧极限

若当 $0<a-x<\delta(\varepsilon)$ 时，有 $|A'-f(x)|<\varepsilon$，则数 A' 称作函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限：

$$A'=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)$$

同样，若当 $0<x-a<\delta(\varepsilon)$ 时，有 $|A''-f(x)|<\varepsilon$，则数 A'' 称作函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限：

$$A''=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)$$

对于函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要且充分条件为：

$$f(a-0)=f(a+0).$$

4. 无穷极限

符号：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$

表示对于任何的 $E>0$，只要 $0<|x-a|<\delta(E)$，则有

$|f(x)| > E$ 成立.

5. 聚点

如果对于某序列 $x_n \to a(x_n \neq a)$ 成立等式 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$，则数 B(或符号 ∞) 称作函数 $f(x)$ 在点 a 的聚点(相应地为有穷的或无穷的).

其中最小的和最大的聚点，分别用以下符号表示：

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \text{ 和 } \varlimsup_{x\to a} f(x),$$

它们分别称为函数 $f(x)$ 在点 a 的下极限和上极限.

等式 $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) = \varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 a 存在极限(有穷的和无穷的) 的必要且充分条件.

【381】 函数 $f(x)$ 由下列条件定义：

若 $x = \dfrac{m}{n}$，则 $f(x) = n$.

式中 m 和 n 为互质整数且 $n > 0$；

若 x 是无理数，则 $f(x) = 0$.

证明此函数在每一点 x 是有穷的，但并非有界(即在该点的任何邻域内是无界的).

证　对于固定 x_0，$f(x_0)$ 确定. 下面我们证明 $f(x)$ 在 x_0 的任何邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内无界($\delta > 0$). 由于有理数在实数域内处处稠密，故在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有无穷多个有理数. 反设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有界，即存在 $M > 0$. 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，$|f(x)| \leqslant M$.

由 $f(x)$ 的定义知，$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内的有理数只能落在下列有理数中 $\dfrac{k}{1}, \dfrac{k}{2}, \cdots, \dfrac{k}{[M]}$，其中 k 是与分母互质的整数，$[M]$ 为 M 的整数部分. 由于这些有理数位于 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中，故

$$(x_0 - \delta)[M] < k < (x_0 + \delta)[M]$$

这表示在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数仅为有限多个，矛盾！因此 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为无界的.

【382】 如果函数 $f(x)$ 在:(1) 开区间;(2) 闭区间内的每一个点确定而有界,则这个函数在给定的开区间或对应的闭区间内是否有界?

请举出适当的例子说明.

证 (1) 不一定. 例如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内每一点确定而有界,但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

(2) 是有界的. 事实上,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则存在 $x_n\in[a,b]$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$. 又存在 $x_0\in[a,b]$ 及 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=x_0$ 显然 $f(x)$ 在 x_0 无界,矛盾.

【383】 证明:函数 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在区间 $-\infty<x<+\infty$ 内是有界的.

证 当 $|x|\leqslant 1$ 时, $|f(x)|<\frac{1+1}{1}=2$;

当 $|x|>1$ 时,有 $x^2<x^4$,故 $|f(x)|<\frac{1+x^2}{1+x^2}=1$.

因此在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒有 $|f(x)|<2$,即函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

【384】 证明:函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x\to 0$ 时,不是无穷大.

证 当 $x=\frac{1}{k\pi}$ 时, $f(x)=(-1)^k k\pi$,而当 $k\to\infty$ 时, $\frac{1}{k\pi}\to 0$, $f(x)=(-1)^k k\pi\to\infty$. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x=\frac{2}{(3k+1)\pi}$ 时, $f(x)=0$. 因此,当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

【385】 研究函数 $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$ 在区间 $0<x<\varepsilon$ 内的有界性.

解 在$(0,\varepsilon)$内有$f(x)\leqslant|\ln\varepsilon|$，即$f(x)$在$(0,\varepsilon)$内上方有界. 而当$x=\dfrac{2}{3k+1}$时，

$$f(x)=\ln\frac{2}{2k+1}\longrightarrow\infty(k\to+\infty),$$

所以$f(x)$下方无界.

【386】 证明：函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在域$0\leqslant x<+\infty$内有下确界$m=0$和上确界$M=1$.

证 当$0\leqslant x<+\infty$时，显然有，

$$1\geqslant f(x)=\frac{x}{1+x}\geqslant 0.$$

又$f(0)=0$，故下确界$m=0$. 且设$x_n=n$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=1.$$

故上确界$M=1$.

【387】 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义并单调递增. 在此闭区间内函数的下确界和上确界等于多少？

解 上确界$M=f(b)$ 下确界$m=f(a)$.

确定以下函数的下确界和上确界(388 ～ 396).

【388】 $f(x)=x^2$在$[-2,5)$内.

解 $m=0,M=25$.

求函数的上确界和下确界(389 ～ 396).

【389】 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内.

解 $m=0,M=1$.

【390】 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$在$(0,+\infty)$内.

解 当$x\in(0,+\infty)$时，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，而$f(1)=1$，当$x_n=n\to+\infty$时，$f(x_n)=\dfrac{2n}{1+n^2}\to 0$，故$m=0,M=1$.

【391】 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在$(0, +\infty)$内.

解 因为 $f(x) = x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2$

而 $f(1) = 2$,所以 $m = 2$. 而当 $x_n = n \to +\infty$ 时

$$f(x_n) = n + \frac{1}{n} \to +\infty,$$

故 $M = +\infty$.

【392】 $f(x) = \sin x$ 在$(0, +\infty)$内.

解 $m = -1, M = 1$.

【393】 $f(x) = \sin x + \cos x$ 在$[0, 2\pi]$内.

解 由 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

知 $m = -\sqrt{2}, M = \sqrt{2}$.

【394】 $f(x) = 2^x$ 在$(-1, 2)$内.

解 因为 $f(x) = 2^x$ 在$(-\infty, +\infty)$内为单调增的函数,故

$m = f(-1) = \frac{1}{2}, M = 2^2 = 4$.

【395】 $f(x) = [x]$;(1) 在$(0,2)$内和(2) 在$[0,2]$内.

解 (1) $m = 0, M = 1$;

(2) $m = 0, M = 2$.

【396】 $f(x) = x - [x]$ 在$[0,1]$内.

解 因为 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. 而 $f(0) = 0$,所以 $m = 0$. 当 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ 时,$f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} (n \geqslant 2)$.

所以当 $n \to +\infty$ 时,$f(x_n) \to 1$. 故 $M = 1$.

【397】 确定函数 $f(x) = x^2$ 在以下区间内的振辐:

(1) $(1,3)$; (2) $(1.9, 2.1)$;

(3) $(1.99, 2.01)$; (4) $(1.999, 2.001)$.

解 (1) 用 ω 表示振幅,则 $\omega = M - m$,因为 $m = 1, M = 9$. 所以 $\omega = 8$.

(2) $m=(1.9)^2, M=(2.1)^2$,

所以　$\omega=(2.1)^2-(1.9)^2=0.8$,

(3) $m=(1.99)^2, M=(2.01)^2$,

所以　$\omega=(2.01)^2-(1.99)^2=0.08$.

(4) $m=(1.999)^2, M=(2.001)^2$,

$$\omega=(2.001)^2-(1.999)^2=0.008.$$

【398】 确定函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 在以下区间内的振辐：

(1) $(-1,1)$；　(2) $(-0.1,0.1)$；

(3) $(-0.01,0.01)$；　(4) $(-0.001,0.001)$.

解　(1) 当 x 从 -1 变到 0 时，$\dfrac{1}{x}$ 从 -1 变到 $-\infty$；

当 x 从 0 变到 1 时，$\dfrac{1}{x}$ 从 $+\infty$ 变到 1. 所以

$$m=-\frac{\pi}{2}, M=\frac{\pi}{2}.$$

$$\omega=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

(2) $\omega=\pi$.　(3) $\omega=\pi$.　(4) $\omega=\pi$.

【399】 设 $m[f]$ 及 $M[F]$ 分别是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的下确界和上确界.

证明：如果 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 是在 (a,b) 内定义的函数，则

$$m[f_1+f_2]\geqslant m[f_1]+m[f_2],$$

及　$$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子，使其在最后的二关系中是：

(1) 等式的情形；

(2) 不等式的情形.

证　因为对任何 $x\in(a,b)$ 恒有

$$m[f_1]\leqslant f_1(x)\leqslant M[f_1],$$

$$m[f_2]\leqslant f_2(x)\leqslant M[f_2],$$

所以　$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant f_1(x)+f_2(x)\leqslant M[f_1]+M[f_2],$$

从而有 $m[f_1]+m[f_2]\leqslant m[f_1+f_2]$,

$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2]$.

例 (1) $f_1(x)=x^2, f_2(x)=x^3, (a,b)=(0,1)$,

有 $m[f_1]+m[f_2]=0=m[f_1+f_2]$,

$M[f_1]+M[f_2]=1+1=2=M[f_1+f_2]$.

(2) $f_1(x)=x^2, f_2(x)=-x^2, (a,b)=(-1,1)$,

则 $m[f_1]=0, m[f_2]=-1$,

$M[f_1]=1, M[f_2]=0$,

$m[f_1+f_2]=M[f_1+f_2]=0$.

从而 $m[f_1]+m[f_2]<m[f_1+f_2]$,

$M[f_1+f_2]<M[f_1]+M[f_2]$.

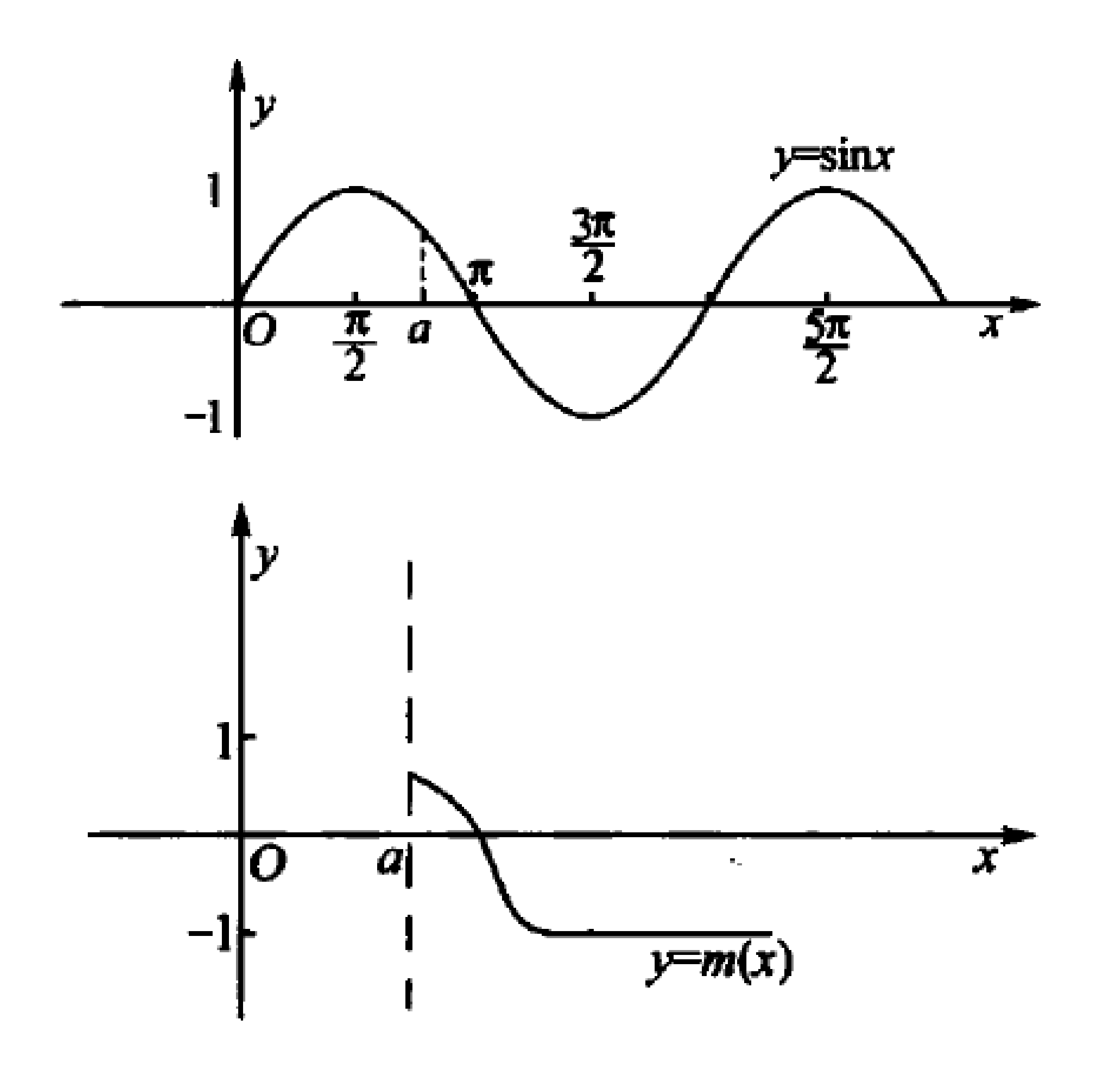
【400】 设函数 $f(x)$ 在域 $[a,+\infty)$ 内定义,且在每个闭区间 $[a,b]\subset[a,+\infty)$ 有界. 假定

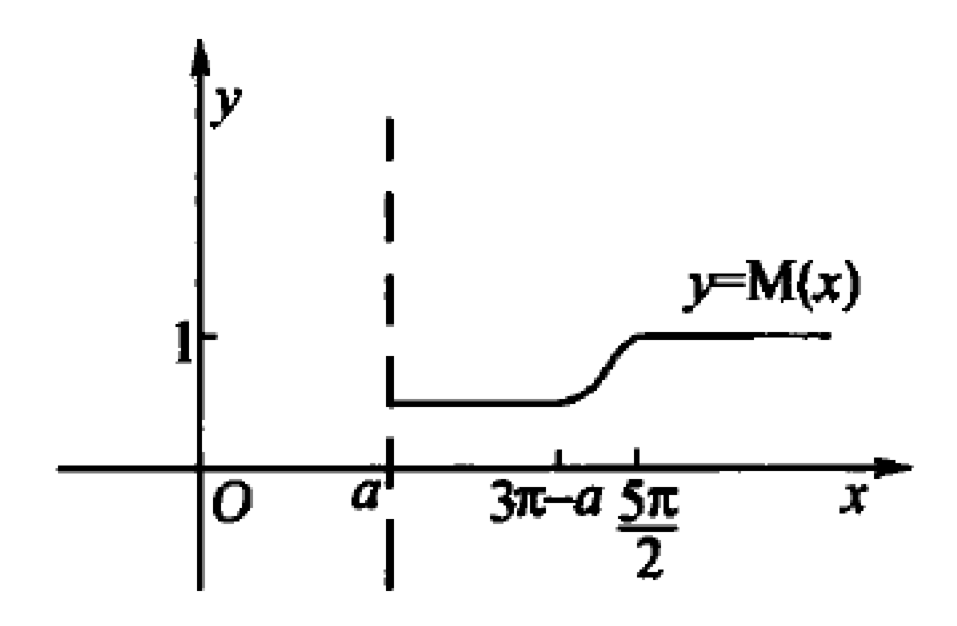
$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \text{ 及 } M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\},$$

作出函数 $y=m(x)$ 及 $y=M(x)$ 的图形. 设

(1) $f(x)=\sin x$; (2) $f(x)=\cos x$.

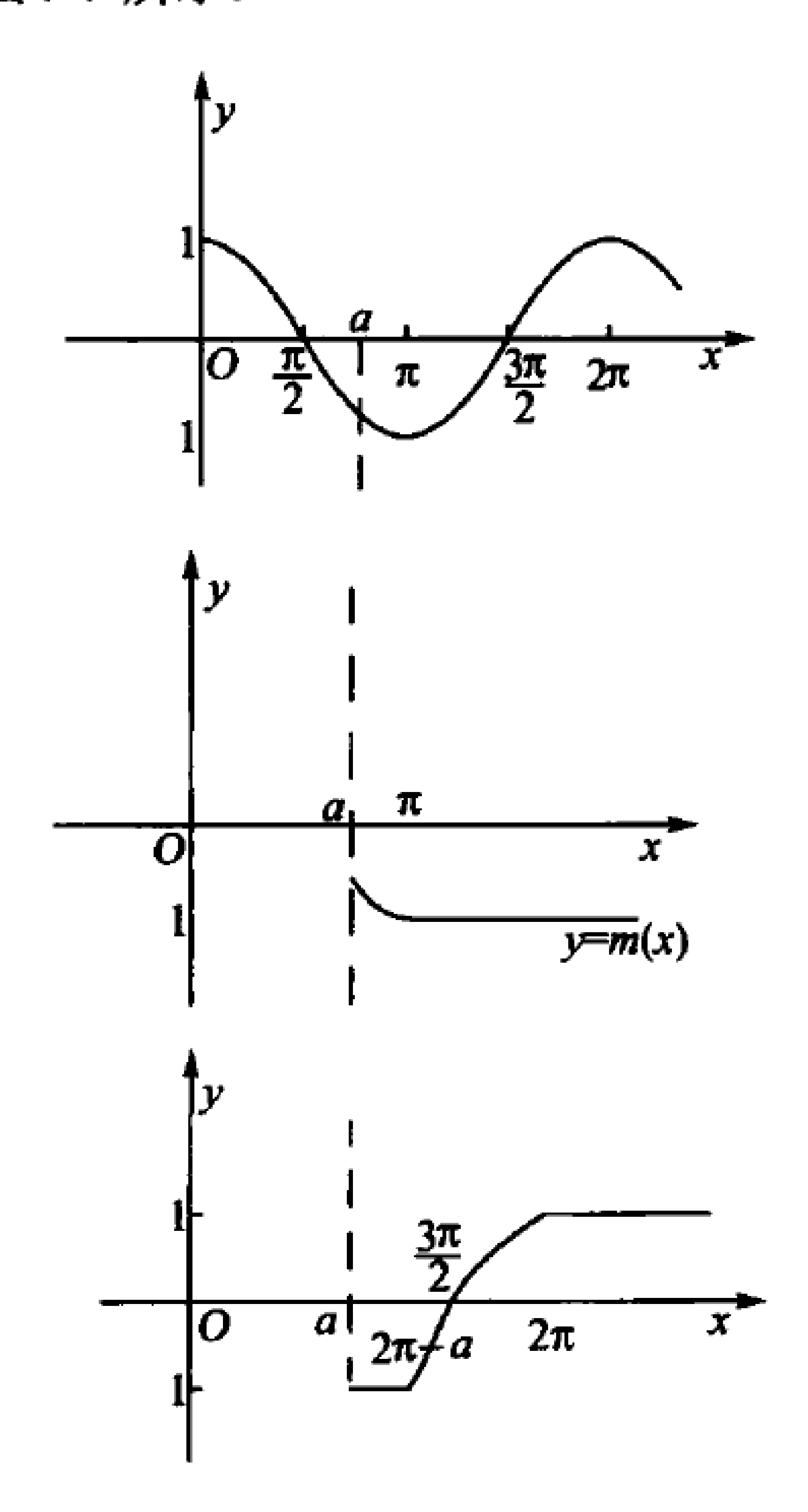
解 (1) 如 400 题图(1) 所示.





400 题图 1

（2）如 400 题图（2）所示.



400 题图 2

【401】　使用"ε－δ"论证法，证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2 = 4$.

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

证 因

$$|x^2-4|=|x-2||x+2|.$$

当 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$ 时，

$$|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|,$$

所以，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\}$. 于是当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|x^2-4|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$.

填表

ε	0.1	0.01	0.001	0.000 1	…
δ	0.02	0.002	0.000 2	0.000 02	…

【402】 用"$E-\delta$"语言法，证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

填下表：

E	10	100	1000	10000	…
δ					

证 对任给的 $E>0$，要使 $\frac{1}{(1-x)^2}>E$.

只需 $0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{E}}$，

故取 $\delta=\frac{1}{\sqrt{E}}$. 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\frac{1}{(1-x)^2}>E$，

即 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

填表

E	10	100	1000	10000	…
δ	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0.1	$\frac{1}{\sqrt{1000}}$	0.01	…

【403】 用不等式表示下列各式：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$；(2) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b$；(3) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$.

举出适当的例子说明.

解 (1) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-b|<\varepsilon$，

则称 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

例如 $f(x)=x+2$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

当 $0<a-x<\delta$，即 $a-\delta<x<a$ 时，$|f(x)-b|<\varepsilon$，

则称 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b$

例如
$$f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},\\ x^2+1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=2$.

(3) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<x-a<\delta$，即 $a<x<a+\delta$ 时，$|f(x)-b|<\varepsilon$，

则称 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$.

例如本题(2)中的 $f(x)$ 有

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=1.$$

用不等式表示以下各式，并举出适当的例子(404 ~ 406).

【404】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$； (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$.

解 (1) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$ 使得当 $|x|>R$ 时，

$|f(x)-b|<\varepsilon$，

则称 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$.

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $R>0$,使得当 $x<-R$ 时,

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b.$

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $R>0$,使得当 $x>R$ 时,

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b.$

例于,对函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

【405】 (1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$; (2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$; (4) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty$; (6) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$;

(7) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$; (8) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$;

(9) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$.

解 (1) 对任意给定的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$

(2) 对任给的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$f(x)<-E$,则称 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

(3) 对任给的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$f(x)>E$,则称 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.

(4) 对任给的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<a-x<\delta$,即 $a-\delta<x<a$ 时,$|f(x)|>E$,则称 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$.

(5) 对任给的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<a-x<\delta$,即 $a-\delta<x<a$ 时,$f(x)<-E$,则称 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty$.

(6) 对任给的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<a-x<\delta$,即 $a-\delta<x<a$ 时,$f(x)>E$,则称 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$.

(7) 对任给的 $E>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<x-a<\delta$,即

$a < x < a+\delta$ 时，$|f(x)| > E$，则称 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

(8) 对任给的 $E > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < x-a < \delta$，即 $a < x < a+\delta$ 时，$f(x) < -E$，则称 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$.

(9) 对任给的 $E > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < x-a < \delta$，即 $a < x < a+\delta$ 时，$f(x) > E$，则称 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

【406】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$；(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$；

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$；(6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$；(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

解 (1) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $|x| > R$ 时，$|f(x)| > E$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(2) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $|x| > R$ 时，$f(x) < -E$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

(3) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $|x| > R$ 时，$f(x) > E$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

(4) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $x < -R$ 时，$|f(x)| > E$，则称 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

(5) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $x < -R$ 时，$f(x) < -E$. 则称 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(6) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $x < -R$ 时，$f(x) > E$，则称 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

(7) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $x > R$ 时，$|f(x)| > E$，则称 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

(8) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $x > R$ 时，$f(x) < -E$. 则称 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(9) 对任给的 $E > 0$，存在 $R > 0$，使得当 $x > R$ 时，

$f(x) > E$，则称 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

【407】 设 $y = f(x)$，用不等式表示下面各种情况：

(1) 当 $x\to a$ 时，$y\to b-0$；

(2) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b-0$；

(3) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b-0$；

(4) 当 $x\to a$ 时，$y\to b+0$；

(5) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b+0$；

(6) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b+0$；

(7) 当 $x\to\infty$ 时，$y\to b-0$；

(8) 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b-0$；

(9) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b-0$；

(10) 当 $x\to\infty$ 时，$y\to b+0$；

(11) 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b+0$；

(12) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b+0$.

并举出适当的例子.

解 (1) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$0<b-y<\varepsilon$，即 $b-\varepsilon<y<b$.

则称 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b-0$

或当 $x\to a$ 时，$y\to b-0$.

例如 $y=-x^2$. 就有当 $x\to 0$ 时，$y\to 0-0$.

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<a-x<\delta$，即 $a-\delta<x<a$ 时，$0<b-y<\varepsilon$，则称当 $x\to a-0$ 时，$y\to b-0$.

例如 $y=x$ 就有当 $x\to 0-0$ 时，$y\to 0-0$.

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$0<b-y<\varepsilon,$$

则称当 $x\to a+0$ 时，$y\to b-0$.

例如 $y=-x$ 就有当 $x\to 0+0$ 时，$y\to 0-0$.

(4) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$0<y-b<\varepsilon$，则称当 $x\to a$ 时，$y\to$

$b+0$.

例如，$y=x^2$ 就有当 $x\to 0$ 时，$y\to 0+0$.

(5) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<a-x<\delta$ 时，$0<y-b<\varepsilon$，则称当 $x\to a-0$ 时，$y\to b+0$.

例如 $y=-x$，就有当 $x\to 0-0$ 时，$y\to 0+0$.

(6) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<x-a<\delta$ 时，$0<y-b<\varepsilon$，则称当 $x\to a+0$ 时，$y\to b+0$.

例如 $y=x$ 就有当 $x\to 0+0$ 时，$y\to 0+0$.

(7) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $|x|>R$ 时，$0<b-y<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时，$y\to b-0$.

例如 $y=-\frac{1}{x^2}$ 就有当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0-0$.

(8) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $x<-R$ 时，$0<b-y<\varepsilon$，则称当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b-0$.

例如 $y=\frac{1}{x}$，就有当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0-0$.

(9) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $x>R$ 时，$0<b-y<\varepsilon$，则称当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b-0$.

例如 $y=-\frac{1}{x}$，就有当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0-0$.

(10) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $|x|>R$ 时，$0<y-b<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时，$y\to b+0$.

例如 $y=\frac{1}{x^2}$，就有当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0+0$.

(11) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $x<-R$ 时，$0<y-b<\varepsilon$，则称当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b+0$.

例如 $y=-\frac{1}{x}$，就有当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0+0$.

(12) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $x>R$ 时，$0<y-b<\varepsilon$，则称当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b+0$.

例如 $y=\frac{1}{x}$ 就有当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0+0$.

【408】 令 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，式中 $a_i(i=0,1,\cdots n;n\geqslant 1,a_0\neq 0)$ 为实数，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$.

证 因为 $a_0\neq 0$. 则

$$|P(x)|$$
$$\geqslant|a_0||x|^n\left|1-\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\cdot\frac{1}{|x|}+\left|\frac{a_2}{a_0}\right|+\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\frac{1}{|x|^n}\right)\right|.$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots n)$，

故存在 $E_1>0$ 使得，$|x|>E_1$ 时，有

$$\left|1-\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\frac{1}{|x|}+\left|\frac{a_2}{a_0}\right|\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|>\frac{1}{2},$$

故 $|P(x)|>\frac{1}{2}|a_0||x|^n$，

对任给的 $M>0$，设 $E_2=\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$，

取 $E=\max(E_1,E_2)$，

则当 $|x|>E$ 时，有 $|P(x)|>M$，

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$.

【409】 令 $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，

其中 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

证明：

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty,\text{若 } n>m;\\ \frac{a_0}{b_0},\text{若 } n=m;\\ 0,\text{若 } n<m.\end{cases}$$

证 因为

$$R(x)=\frac{x^n}{x^m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}},$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_m}{x_m}}=\dfrac{a_0}{b_0}\neq 0,$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$

【410】 令 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式,并且 $P(a)=Q(a)=0$,问式 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的可能值?

解 设 a 为 $P(x)$ 的 n 重根,$Q(x)$ 的 m 重根,即

$$P(x)=(x-a)^nP_1(x),$$
$$Q(x)=(x-a)^mQ_1(x),$$

其中 $P_1(x)$,$Q_1(x)$ 均为多项式,且 $P_1(a)\neq 0$,$Q_1(a)\neq 0$. 故

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & n>m,\\ \dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}\neq 0, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

求出下列各式的值(411 ~ 433).

【411】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{-1}{-1}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

【412】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

解 因为

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)=1+6x+11x^2+6x^3,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x+11x^2+6x^3}{x}=\lim_{x\to 0}(6+11x+6x^2)=6.$$

【413】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(10+10x+5x^2+x^3)}{x^2(1+x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10+10x+5x^2+x^3}{1+x^3}=10.$$

【414】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m 与 n 为自然数).

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+n\cdot(mx)+\frac{1}{2!}n(n-1)(mx)^2+\cdots(mx)^n\right]-\left[1+m\cdot(nx)+\frac{1}{2!}m(m-1)(nx)^2+\cdots(nx)^m\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}(n(n-1)m^2-m(m-1)n^2)+o(x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}nm(n-m).$$

【415】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(5-\frac{1}{x}\right)^5}$$

$$=\frac{1}{5^5}.$$

【416】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解 分子、分母同时除以 x^{50}，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

【417】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 因为

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

分子、分母同时除以 $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left[n^n+\frac{1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

【418】 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2}.$

【419】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x^2+2x+3)(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{x+2x+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

【420】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)^2}{[x(x+1)(x^2+1)-3](x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x^2+1)-3}=0.$

【421】 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}.$

解 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2-4)(x-2)}{(x^2-4)^2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$

【422】 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}.$

解 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{[x(x-1)-1](x+1)}{[x(x^2+1)(x-1)-1](x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x(x-1)-1}{x(x^2+1)(x-1)-1}=\frac{1}{3}.$

【423】 $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$

解　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^2-12x+16)^{10}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$

【424】　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}.$

解　因为

$$x+x^2+\cdots+x^n-n$$
$$=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$$
$$=(x-1)[x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n],$$

所以$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}[x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n]$$
$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【424.1】　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}.$

解　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^{99}-1)-(x-1)}{x(x^{49}-1)-(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}.$$

【425】　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$　(m 与 n 为自然数).

解　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\frac{m}{n}.$$

【426】　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$　(n 为自然数).

解　因为

$$\lim_{x\to a}\frac{x^k-a^k}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-1})}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-1})$$

$$=ka^{k-1}\qquad(k\text{ 为自然数}),$$

所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{[(x^{n-1}-a^{n-1})+a(x^{n-2}-a^{n-2})+\cdots+a^{n-2}(x-a)](x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{x^{n-1}-a^{n-1}}{x-a}+a\frac{x^{n-2}-a^{n-2}}{x-a}+\cdots+a^{n-2}\frac{x-a}{x-a}\right]$$

$$=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

【427】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ （n 为自然数）.

解 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=k,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^n-1}{x-1}+\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+\cdots+\frac{x-1}{x-1}\right]$$

$$=n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【428】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ （m 与 n 为自然数）.

解 当 $m=n$ 时，此极限显然等于 0，下面设 $n\neq m$.

由 424 题有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{n(n+1)}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{m[x+\cdots+x^{n-1}-(n-1)]-n[x+\cdots+x^{m-1}-(m-1)]}{(x-1)}$$

$$\times\lim_{x\to1}\frac{1}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{1}{nm}\times\left[\lim_{x\to1}\frac{m[x+\cdots+x^{n-1}-(n-1)]}{x-1}\right.$$

$$\left.-\lim_{x\to1}\frac{n[x+\cdots+x^{m-1}-(m-1)]}{x-1}\right]$$

$$=\frac{1}{nm}\times\left(m\frac{n(n-1)}{2}-n\frac{m(m-1)}{2}\right)=\frac{n-m}{2}.$$

当 $m=n$ 时，上述结果仍适用. 总之

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{n-m}{2}.$$

【429】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right].$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x+\frac{a}{n}(1+2+\cdots+n-1)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x+\frac{a}{n}\,\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{a}{2}\right)\frac{n-1}{n}=x+\frac{a}{2}.$$

【430】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right].$

提示：利用题 2 的结果

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x^2+\frac{2xa}{n}(1+2+\cdots+(n-1))\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+(a-1)^2)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x^2+\frac{2xa}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\right.$$

$$+\frac{a^2}{n^2}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\Big]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n-1)}{n}x^2+xa\,\frac{n-1}{n}+\frac{a^2}{6}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\right]$$

$$=x^2+xa+\frac{a^2}{3}.$$

【431】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

解 因为

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}-1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+(2n)^2}{2^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)}-1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}}{4\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}-1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(4n+1)}{2(n+1)(2n+1)}-1=\frac{2\times4}{2\times2}-1=1.$$

【432】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)$.

提示:利用题 3 的结果

解 因为

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{4n}-\frac{n}{4}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n}=\frac{1}{2}.$$

【433】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

解 令

$$x_n = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3,$$
$$y_n = [1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2,$$

则 $y_{n+1} > y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2 - [1+4+\cdots+(3n-2)]^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^3}{\left[\dfrac{(3n+2)(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\dfrac{(3n-1)n}{2}\right]^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^3}{\left[\dfrac{(3n+2)(n+1)}{2} + \dfrac{(3n-1)n}{2}\right](3n+1)} = 3.$$

利用 143 题的结果有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2} = 3.$$

【434】 把抛物线 $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$，$Ox$ 轴和直线 $x = a$ 所围成的曲边三角形 OAM（图 3）的面积，当作以 $\dfrac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和在 $n \to \infty$ 的极限，求此面积.

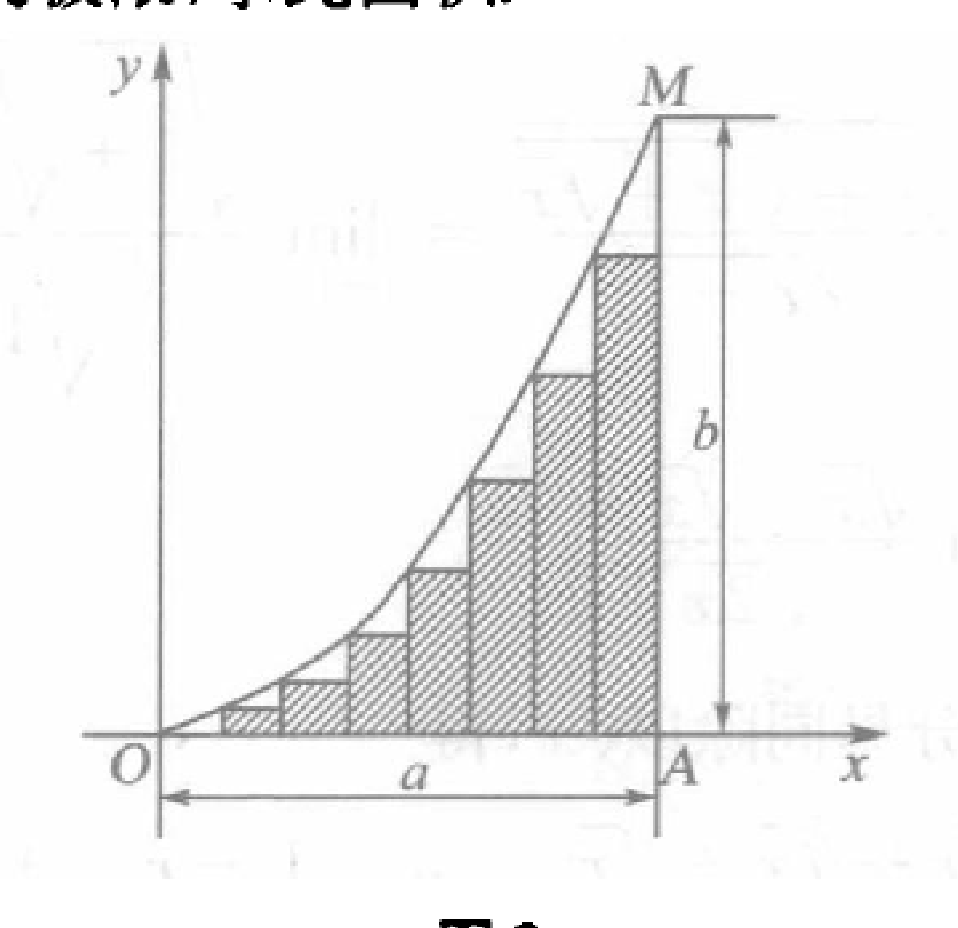


图 3

解 底的 n 个分点分别为

$$0,\frac{a}{n},\frac{2a}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}a,$$

它们所对应的高为

$$0,b\left(\frac{1}{n}\right),b\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

故第 k 个矩形的面积为

$$\frac{1}{n}a\cdot b\left(\frac{k}{n}\right)^2=ab\frac{k^2}{n^3}\qquad(k=0,1,\cdots,n-1).$$

于是,内接的 n 个矩形的面积之和为

$$\sum_{k=0}^{n-1}ab\frac{k^2}{n^3}=ab\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{ab}{6}\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2},$$

因此曲面三角形 OAM 的面积为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ab}{6}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}=\frac{ab}{3}.$$

求下列极限(435 ~ 454).

【435】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

【436】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

解 分子、分母同除以$\sqrt{x}$,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【437】 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{8}{3+3}=\frac{4}{3}.$$

【438】 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)}=\frac{-(4+4+4)}{6}=-2.$$

【439】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$=\lim_{x\to a+0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a+0}\frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a+0} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

【440】 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}.$$

【441】 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

解 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{x-6})^2-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

$$= \frac{1}{144}.$$

【442】 $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

解 $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)}$

$$= \lim_{x \to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

【443】 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{9+2x}+5}=\frac{12}{5}.$$

【444】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$　（n 为整数）.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{(1+x)}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1}=\frac{1}{n}.$$

【445】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)][\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)]}{x[\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4x-2x^2}{x[\sqrt{1-2x-x^2}+1+x]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4-2x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x}=-2.$$

【446】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

【447】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x(1+2\sqrt[3]{x})}$$

$$\times\frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}$$

$$=\frac{2}{27}.$$

【448】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\times\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

【449】 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9+2})(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[4]{x+9}-2)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}$$

$$\times\frac{\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}}}{\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{[(x+2)^3-(x+20)^2](\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)}^{10}}$$

$$=\frac{189\cdot 4\cdot 8}{3^5+3^4\cdot 3+3^3\cdot 3^2+3^2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+3^5}$$

$$=\frac{6048}{1458}.$$

【450】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^4}-\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\left(1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}$$

$$\times\frac{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}}+\cdots+\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}}+\cdots+\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{7}{12}+\frac{23}{48}x+\frac{7}{54}x^2+\frac{1}{81}x^3\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}}+\cdots+\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}$$

$$=\frac{\frac{7}{12}\times 2}{\frac{1}{2}\times 12}=\frac{7}{36}.$$

【451】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[\sqrt[5]{(1+5x)^4}+\sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x)+\cdots+(1+x)^4\right]}{(1+5x)-(1+x)^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4}+\cdots+(1+x)^4}{-10-10x-5x^2-x^3}=-\frac{1}{2}.$$

【452】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ （m 和 n 为整数）.

解 我们首先求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+\alpha x}-1}{x}\quad（k\text{ 为整数}）.$$

当 k 为正整数时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{x\left(\sqrt[k]{(1+\alpha x)^{k-1}}+\cdots+\sqrt[k]{1+\alpha x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\sqrt[k]{(1+\alpha x)^{k-1}}+\cdots+\sqrt[k]{1+\alpha x}+1)}=\frac{\alpha}{k}.$$

当 k 为负整数时，设 $k=-k'$，则 k' 为正整数. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+\alpha x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[k']{1+\alpha x}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\alpha x)^{\frac{1}{k'}}}{x}\cdot\frac{1}{(1+\alpha x)^{\frac{1}{k'}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+\alpha x)^{\frac{1}{k'}}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k']{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$=-\frac{\alpha}{k'}=\frac{\alpha}{k}.$$

因此对任何非零整数都

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+\alpha x}-1}{x}=\frac{\alpha}{k},$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\qquad (mn\neq 0).$$

【453】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\ \sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ （m 和 n 为整数).

解　由 452 题结果有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}-(1+\beta x)^{-\frac{1}{n}}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{-n}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\qquad (mn\neq 0).$$

【454】 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$m$ 为整数，证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-1}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}}+\cdots+1}=\frac{a_1}{m}.$$

求下列极限(455 ~ 467).

【455】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m 和 n 为整数).

解 首先我们求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}$,

当 m 为正整数时,有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+1}=\frac{1}{m}.$$

当 m 为负整数时,设 $m=-m'$,则 m' 为正整数,所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[m']{x}}{x-1}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{m'}}}=-\frac{1}{m'}=\frac{1}{m}.$$

即对任何负零整数,都有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{m},$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

$$=\frac{n}{m}\qquad(m\cdot n\neq 0).$$

【455.1】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to1}3\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}-\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}3\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1-x}=\infty.$$

【456】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1}{n}$,

所以 $$\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

【457】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

【458】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

【459】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}-\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+2x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

【460】 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right]$.

解

$$\lim_{x\to+0}\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}$$

$$=1$$

【461】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

【462】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+(x-\sqrt{x^2-2x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x(\sqrt[3]{x^3+3x^2})+x^2}+\frac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}+\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right]$$

$$=\frac{3}{1+1+1}+\frac{2}{1+1}=2.$$

【463】 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^2-(x-1)^2]}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac{4}{3}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{4}{3}.$$

【464】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

【465】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n)-x^n}{\sum\limits_{j=1}^{n}[(x+a_1)\cdots(x+a_n)]^{\frac{n-j}{n}}\cdot x^{j-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)x^{n-1}+\cdots+(a_1\cdot a_2\cdots a_n)}{\sum\limits_{j=1}^{n}[(x+a_1)\cdots(x+a_n)]^{\frac{n-j}{n}}\cdot x^{j-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)\right]^{\frac{n-j}{n}}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}.$$

【466】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$

(n 为自然数).

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n+\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]$

$=2^n$.

【467】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

(n 为自然数).

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}\cdot[(\sqrt{1+x^2}+x)^{n-1}$

$+(\sqrt{1+x^2}+x)^{n-2}(\sqrt{1+x^2}-x)+\cdots$

$+(\sqrt{1+x^2}-x)^{n-1}]$

$=2n$.

【468】 研究二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1 和 x_2 的性质,其中系数 a 趋于零,而系数 b 和 c 为常数,且 $b\neq0$.

解 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

不失一般性,设 $b>0$,于是 $\lim\limits_{a\to0}x_2=\infty$

$\lim\limits_{a\to0}x_1=\lim\limits_{a\to0}\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$

$=\lim\limits_{a\to0}\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{c}{b}$.

【469】 根据条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求常数 a 和 b.

解 $\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b$

$$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$

的充要条件为 $1-a=0$，及 $a+b=0$. 解之得 $a=1,b=-1$.

【470】 根据下列条件:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0,$$

和 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$.

求常数 a_i 和 $b_i(i=1,2)$.

解 因为

$$(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)$$
$$=\frac{(1-a_1^2)x^2-(2a_1b_1+1)x+1-b_1^2}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1}.$$

上式极限为零的必要条件为

$$1-a_1^2=0,$$

及 $1+2a_1b_1=0$,

解之得 $a_1=\pm1,b_1=-\frac{1}{2a_1}=\mp\frac{1}{2}$.

但当 $a_1=1$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}\right)=+\infty$.

因此 $a_1=-1,b_1=\frac{1}{2}$.

同样可得，$a_2=1,b_2=-\frac{1}{2}$.

求下列极限(471 ～ 481).

【471】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=5\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=5$.

【472】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,而$|\sin x|\leqslant 1$,所以$\dfrac{\sin x}{x}$在$x\to\infty$时为无穷小量,即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

【473】 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m和n—整数).

解 令$y=x-\pi$,则当$x\to\pi$时,$y\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}$$

$$=(-1)^{m-n}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin my}{my}\cdot\frac{ny}{\sin ny}\cdot\frac{m}{n}\right)$$

$$=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

【474】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

【474.1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1^*$.

* 注:$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$(见481题).

【474.2】 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 3x$.

解 $$\lim_{x\to 0}x\cot 3x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\lim_{x\to 0}\cos 3x=\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}.$$

【475】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

【476】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos4x\cdot\sin x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\cos4x=2.$

【477】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin2x\sin x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=4.$

【478】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x}{2\sin^2\dfrac{px}{2}+\sin px}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\dfrac{px}{2}\left(\sin\dfrac{px}{2}+\cos\dfrac{px}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{\dfrac{px}{2}}{\sin\dfrac{px}{2}}\cdot\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{px}{2}+\cos\dfrac{px}{2}}$

$$=\frac{1}{p}\qquad(p\neq 0).$$

【479】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

解　令 $\frac{\pi}{4}-x=t$，则当 $x\to\frac{\pi}{4}$ 时，$t\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cdot\tan t=\lim_{t\to 0}\cot 2t\cdot\tan t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{\sin 2t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{2\cos^2 t}=\frac{1}{2}.$$

【480】 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

解　令 $1-x=t$，则当 $x\to 1$ 时，$t\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}t\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)\right]=\lim_{t\to 0}t\cot\frac{\pi t}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

【481】 证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$；　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a.\ \left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$.

证　(1) 因为

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant|x-a|,$$

故任给 $\varepsilon>0$，要使 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$.

只须 $|x-a|<\varepsilon$. 故取 $\delta=\varepsilon$. 则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$|\sin x-\sin a|<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a.$

(2) 根据(1)有

$$\lim_{x\to a}\cos x=\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a.$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\tan a.$

其中 $a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

求下列极限(482 ~ 565).

【482】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}.$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

【483】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}.$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(-\sin\frac{x+a}{2}\right)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a.$$

【484】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}.$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x\cos a-\sin a\cos x}{(x-a)\cdot\cos x\cdot\cos a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos x\cdot\cos a}\cdot\frac{\sin(x-a)}{x-a}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 a}\qquad\left(a\neq\frac{2n+1}{2}\pi;n=0,\pm1,\cdots\right).$$

【485】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cot x-\cot a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cot x-\cot a}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin x\sin a}$

$$=-\frac{1}{\sin^2 a}\qquad(a\neq n\pi;n=0,\pm1,\cdots).$$

【486】 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sec x-\sec a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos a-\cos x}{(x-a)\cos x\cdot\cos a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos x\cdot\cos a}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\frac{\sin a}{\cos^2 a}\qquad\left(a\neq\frac{2n+1}{2}\pi;n=0,\pm1,\cdots\right).$$

【487】 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin a-\sin x}{(x-a)\sin x\sin a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-\cos\frac{x+a}{2}}{\sin x\sin a}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=-\frac{\cos a}{\sin^2 a}\qquad(a\neq n\pi;n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【488】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-[\sin(a+x)-\sin a]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}-2\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\sin(a+x)=-\sin a.$$

【489】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[\cos(a+2x)-\cos(a+x)]-[\cos(a+x)-\cos a]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}+2\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\cos(a+x)=-\cos a.$$

【490】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[\tan(a+2x)-\tan(a+x)]-[\tan(a+x)-\tan a]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x)-\sin(a+x)\cos(a+2x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2}\right.$$

$$-\left.\frac{\dfrac{\sin(a+x)\cos a-\sin a\cos(a+x)}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}\cdot\frac{\cos(a+x)\cos a-\cos(a+2x)\cos(a+x)}{\cos a\cdot\cos(a+2x)\cos^2(a+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2\sin\ (a+x)}{\cos a\cos(a+x)\cos(a+2x)}$$

$$=\frac{2\sin a}{\cos^3 a}\qquad\left(a\neq\frac{2n+1}{2}\pi;n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【491】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cot(a+2x)-\cot(a+x))-(\cot(a+x)-\cot a)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\dfrac{\cos(a+2x)\sin(a+x)-\sin(a+2x)\cos(a+x)}{\sin(a+2x)\sin(a+x)}}{x^2}\right.$$

$$-\left.\frac{\dfrac{\cos(a+x)\sin a-\sin(a+x)\cos a}{\sin(a+x)\sin a}}{x^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x[\sin a-\sin(a+2x)]}{x^2\sin(a+2x)\sin(a+x)\sin a}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{2\cos(a+x)}{\sin(a+2x)\sin(a+x)\sin a}$$

$$=\frac{2\cos a}{\sin^3 a}\qquad(a\neq n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【492】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}[\cos x-\cos(2a+3x)]-\sin^2 a}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(2a+3x)-(1-\cos 2a)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}+\frac{\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\left(2a+\frac{3x}{2}\right)}{x}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\sin 2a.$$

【493】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)(\sin x+1)}{(2\sin x-1)(\sin x-1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1}=-3.$$

【494】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\cos 2x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 2x)-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2 2x}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2 3x}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot[4+16+36]=14.$$

【495】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

解　令 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则当 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时，$t\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}+\sqrt{3}\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

【496】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

解　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\,\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-2\tan x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)}{\cos^2 x}=-24.$$

【497】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a \tan x} \cdot \dfrac{\tan a - \tan x}{1 + \tan a \tan x} - \tan^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 a - \tan^2 x - \tan^2 a(1 - \tan^2 a \tan^2 x)}{x^2(1 - \tan^2 a \tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x(\tan^4 a - 1)}{x^2(1 - \tan^2 a \tan^2 x)} = \tan^4 a - 1$$

$$= -\frac{\cos 2a}{\cos^4 a} \qquad \left(a \neq \frac{2n+1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

【498】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cot x)(1 + \cot x + \cot^2 x)}{(1 - \cot x)(2 + \cot x + \cot^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cot x + \cot^2 x}{2 + \cot x + \cot^2 x} = \frac{3}{4}.$$

【499】 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} = \frac{1}{4}.$$

【500】 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{2\sin^2\frac{x}{2}+x\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{\sin x}{x}} = \frac{4}{3}.$$

【501】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x})}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x})}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.$$

【502】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$$= \sqrt{2}\lim \frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \sqrt{2}.$$

【503】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\frac{1}{2(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=0.$$

【504】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2\cdot(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x})}$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

【505】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 因为

$$(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$
$$=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$
$$=2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2},$$

及 $$\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0,$$

且 $$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

【506】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}=\ln\frac{1}{2}$,

所以 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}}=\frac{1}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\ln\frac{1+x}{2+x}=0.$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}}=e^0=1.$$

【507】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

解 法一:因为

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}x^2\ln\frac{x+2}{2x-1}=-\infty,$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}}=0.$$

法二:当 $|x|\geqslant 5$ 时,

$$\left|\frac{x+2}{2x-1}\right|=\left|\frac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right|\leqslant\frac{1+\left|\frac{2}{x}\right|}{2-\left|\frac{1}{x}\right|}\leqslant\frac{7}{9}.$$

而 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{x^2}=0,$$

因此 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=0.$$

【508】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

解 法一:当 $x\to\infty$ 时,

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to\frac{3}{2},$$

且 $$\frac{x^3}{1-x}=\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\to-\infty.$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0.$$

法二:因为

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=-\infty,$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}}=0.$$

【509】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\pi n}{3n+1}=\dfrac{2\pi}{3}$,

故当 n 充分大时，$\left|\sin\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right| < \dfrac{1}{2}+\varepsilon < 1$.

其中 $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}$ 为一固定的实数. 而

$$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^n \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}=0.$$

【510】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\tan 2x}$.

解 因为当 $x\to\dfrac{\pi}{4}+0$ 时

$$1<\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)<\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)<+\infty.$$

而 $$\tan 2x\to-\infty,$$

所以 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\tan 2x}=0.$$

【511】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0$,

所以 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x-1}{x+1}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}}=1.$$

【512】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{2}\cdot 2+1}=e^2.$$

【513】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1.$$

【514】 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=e^{-2}$.

【515】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}\times 2a+a}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{a}=e^{2a}.$$

【516】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}\qquad(a_1>0,a_2>0)$.

解 $$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{x}\left(\frac{x+\frac{b_1}{a_1}}{x+\frac{b_2}{a_2}}\right)^{x}$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{\frac{x+C}{A}}\right)^{x},$$

其中 $C=\dfrac{b_2}{a_2},A=\dfrac{b_1}{a_1}-\dfrac{b_2}{a_2}$.

而 $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+C}{A}}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+C}{A}}\right)^{\frac{x+C}{A}\cdot A-C}=e^{A}.$$

当 $a_1=a_2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{x}=1$；

当 $a_1<a_2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{x}=0$；

当 $a_1>a_2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{x}=+\infty$.

因此 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\begin{cases}e^{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}, & a_1=a_2>0,\\ 0, & a_2>a_1>0,\\ +\infty, & a_1>a_2>0.\end{cases}$$

【517】 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\cot^2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\cos^2x}=e$.

【518】 $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$

$=\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cdot\cos\pi x}=e^{-1}$.

【519】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{(1+\sin x)\cos x}}=e^0=1.$$

【519.1】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2x}\cdot\frac{1}{1+\sin x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【520】 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解 $$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}}$$

$$= e^{\cot a} \quad (a \neq n\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

【521】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+2\sin^2 x}{x^2\cos 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}+\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)\frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}} = e^{\frac{3}{2}}$.

【522】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{-2\tan x}{\tan x+1}} = e^{-1}.$$

【523】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2 x)^{-\frac{\tan x}{2}}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2 x)^{\frac{1}{\cot^2 x}\cdot\left(-\frac{\cot x}{2}\right)}$$

$$= e^0 = 1.$$

【524】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1+\tan x}{-2\tan x}}\right)^{\frac{1+\tan x}{-2\tan x}\cdot\frac{-2}{1+\tan x}} = e^{-2}.$$

【525】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解 因为

$$\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$$

$$=\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

而 $$\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}}\right)=1.$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

【526】 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

解 $$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\ln\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}\ln\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

【527】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\times2+1}=\mathrm{e}^2.$$

【528】 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\cot^2\frac{x}{\sqrt{n}}\left(\frac{\tan\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}}\right)^2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

【529】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

【530】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1.$$

【531】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\qquad(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{a}{x-a}}=\frac{1}{a}\ln e=\frac{1}{a}.$$

【532】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

解 $\sin\ln(x+1)-\sin\ln x$

$$=2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=0$

又 $\left|2\cos\dfrac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\right|\leqslant 2$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]=0.$

【533】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^{10}+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{\ln x}\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10+\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}=\frac{1}{5}.$$

【534】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\lg\frac{100+x^2}{1+100x^2}=\lim_{x\to\infty}\lg\frac{\frac{100}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+100}=\lg\frac{1}{100}=-2.$$

【535】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{2x})}{\ln(3+e^{3x})}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln\left(\frac{2}{e^{3x}}+1\right)}{\ln e^{2x}+\ln\left(\frac{3}{e^{2x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{e^{3x}}+1\right)}{2+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3}{e^{2x}}+1\right)}=\frac{3}{2}.$$

【536】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\ln\sqrt[3]{x}+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{3}+\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}=\frac{3}{2}.$$

【537】 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$ $(x>0)$.

解 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\lg(x^2-h^2)-\lg x^2}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[-\frac{1}{x^2}\lg\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]=-\frac{1}{x^2}\lg e.$$

【538】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{1+\tan ax}{1-\tan ax}}{\sin bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin bx}\cdot\frac{2\tan ax}{1-\tan ax}\cdot\ln\left(1+\frac{2\tan ax}{1-\tan ax}\right)^{\frac{1-\tan ax}{2\tan ax}}$$

$$=\frac{2a}{b}.$$

【539】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos bx - 1}{\ln\cos bx} \cdot \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{ax}{2}}{-2\sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

【540】 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\ln \frac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right\}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln \frac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right] = \ln 1 = 0.$

【540.1】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(nx+\sqrt{1-n^2x^2}-1)\ln[1+(nx+\sqrt{1-n^2x^2}-1)]^{\frac{1}{nx+\sqrt{1-n^2x^2}-1}}}{(x+\sqrt{1-x^2}-1)\ln[1+(x+\sqrt{1-x^2}-1)]^{\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}-1}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}-1}{x+\sqrt{1-x^2}-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(nx-1)^2-(1-n^2x^2)}{(x-1)^2-(1-x^2)} \cdot \frac{x-1-\sqrt{1-x^2}}{nx-1-\sqrt{1-n^2x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2n+2n^2x}{-2+2x} \cdot \frac{x-1-\sqrt{1-x^2}}{nx-1-\sqrt{1-n^2x^2}} = n.$$

【541】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$　　$(a>0)$.

解 令 $a^x - 1 = t$，则 $x = \log_a(1+t)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$

$$= \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

注：此题的结果，后面经常用到.

【542】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\qquad (a>0)$.

解 因为

$$\frac{a^x-x^a}{x-a}=\frac{a^a\left[a^{x-a}-\left(\frac{x}{a}\right)^a\right]}{x-a}$$

$$=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a-1}{x-a}$$

$$=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{a\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}.$$

对于$\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}$,令 $x-a=t$,则当 $x\to a$ 时,$t\to 0$,所以由 541 题结果有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}=\ln a$.

同样 $$\lim_{x\to a}\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}=1,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}=1,$$

因此 $$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a.$$

【543】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\qquad (a>0)$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}a^a\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}$$

而 $$\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{x\ln x-x\ln a}{x-a}+\ln a\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x}{a}\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{\frac{x-a}{a}}+\ln a$$

$$= 1 + \ln a.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{x\ln x - a\ln a} - 1}{x\ln x - a\ln a} = 1.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x - a^a}{x-a} = a^a(1+\ln a).$

【544】 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}e\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}e\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}\cdot\frac{1}{e^x}} = e\cdot e = e^2.$$

【545】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$= \left(1+\frac{1}{\dfrac{1+x\cdot 3^x}{x(2^x-3^x)}}\right)^{\frac{1+x\cdot 3^x}{x(2^x-3^x)}\cdot\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)}}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x\cdot 3^x}\left(\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)$$

$$= \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

【545.1】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$

解 $\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{1+\sin x\cos\beta x}{\sin x(\cos\alpha x-\cos\beta x)}}\right)^{\frac{1+\sin x\cos\beta x}{\sin x(\cos\alpha x-\cos\beta x)}\cdot\frac{\sin x(\cos\alpha x-\cos\beta x)}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\cot^3 x}$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos\alpha x-\cos\beta x)}{1+\sin x\cos\beta x}\cot^3 x$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}x\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}{x^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}=e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$.

【545.2】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

解 $$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}=\lim_{x\to1}\frac{\sin[\pi(x^\alpha-1)]}{\sin[\pi(x^\beta-1)]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin[\pi(x^\alpha-1)]}{\pi(x^\alpha-1)}\cdot\frac{\pi(x^\beta-1)}{\sin[\pi(x^\beta-1)]}\cdot\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\lim_{x\to1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1}\cdot\frac{\alpha\ln x}{\beta\ln x}^{(*)}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}.$$

(*)利用 541 题的结果.

【545.3】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot2^x)]}$.

解 $$\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot2^x)]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4\sin^2(\pi\cdot2^{x-1})\cos^2(\pi\cdot2^{x-1})}{\ln(1-2\sin^2(\pi\cdot2^{x-1}))}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2\cos^2(\pi\cdot2^{x-1})}{\ln[1-2\sin^2(\pi\cdot2^{x-1})]^{-\frac{1}{2\sin^2(\pi\cdot2^{x-1})}}}=-2.$$

【546】 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\cdot n}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\frac{1}{1-\tan\frac{1}{n}}=2.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=e^2$.

【547】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\beta x}\left[e^{(\alpha-\beta)x}-1\right]}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}\cdot\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}x}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}\cdot\frac{e^{\beta x}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x}$$

$$=\ln e=1.$$

【548】 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$

$$=\lim_{x\to0}a^{\alpha-\beta}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}a^{\alpha-\beta}\frac{e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1}{\alpha\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{\beta\ln\frac{x}{a}}{e^{\beta\ln\frac{x}{a}}-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}(\beta\neq 0).$$

【549】 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}\quad(a>0).$

解 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}a^b\dfrac{a^{x-b}-1}{x-b}=a^b\ln a.$

【550】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}\quad(a>0).$

解 由 541 题的结果有

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a,$$

所以 $$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=\lim_{h\to 0}a^x\frac{a^h+a^{-h}-2}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x}{a^h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2=a^x\ln^2 a.$$

【551】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}\cdot b}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}\cdot 2(a+b)}\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{a+b}}$$

$$=\frac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}.$$

【552】 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0).$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x.$

【553】 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\qquad(x>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\frac{n^2x^{\frac{1}{n+1}}}{n(n+1)}=\ln x.$$

【554】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\qquad(a>0,b>0)$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(b^{\frac{1}{n}}-1)}{a}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}}\right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\cdot\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln b}{a},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=e^{\frac{\ln b}{a}}=b^{\frac{1}{a}}$.

【555】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\qquad(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

【556】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}}$$

$$= e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)} = \sqrt[3]{abc}.$$

【557】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a+b+c}\left[a\frac{a^x-1}{x}+b\frac{b^x-1}{x}+c\frac{c^x-1}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{a+b+c}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)$$

$$= \ln(a^a\cdot b^b\cdot c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}} = (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

【558】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}{a^x+b^x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}}\right)^{\frac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x}\left[x\cdot\frac{a^{x^2}-1}{x^2}+x\cdot\frac{b^{x^2}-1}{x^2}-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-\ln a-\ln b)=\ln\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\frac{1}{\sqrt{ab}}}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}.$

【559】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}\quad(a>0,b>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}-\frac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)^2}$$

$$=(\ln a-\ln b)\frac{1}{(\ln a-\ln b)^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}.$$

【560】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\quad(a>0).$

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim\limits_{x\to a}a^{x^a}\dfrac{a^{(a^x-x^a)}-1}{a^x-x^a}=a^{a^a}\ln a.$

【561】 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$

解 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}\cdot\frac{2^x}{\ln(1+2^x)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$$

$$=1\times 1\times 0=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\frac{1}{x}\ln(1+3^{-x})}{\ln 2+\frac{1}{x}\ln(1+2^{-x})}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

【562】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\frac{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}{\frac{x}{3}}=3\ln 2.$$

【563】 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$

$$= \lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\frac{\ln 2}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\ln 2\cdot\frac{-1}{\ln[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}}=-\ln 2.$$

【564】 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \qquad (a>1,n>0)$.

证 当 $x\geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使得

$$k\leqslant x<k+1.$$

于是
$$0<\frac{x^n}{a^x}\leqslant\frac{(k+1)^n}{a^k},$$

而当 $x\to+\infty$ 时，$k\to+\infty$，所以由 60 题结论有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^{k+1}}\cdot a=0\cdot a=0,$$

因此
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0.$$

【565】 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0 \qquad (a>1,\varepsilon>0)$.

证 令 $\log_a x=t$，则 $x=a^t$，且当 $x\to+\infty$ 时，$t\to+\infty$.
所以由 564 题的结论有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(a^t)^\varepsilon}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(a^\varepsilon)^t}=0.$$

求下列极限(566 ~ 597).

【566】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+e^x)}{(x^4+e^{2x})}$.

解 (1) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}=\lim_{x\to0}\frac{x+\ln(1+x^2e^{-x})}{2x+\ln(1+x^4e^{-2x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x^2e^{-x}}\cdot xe^{-x}}{2+\dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x^4e^{-2x}}\cdot x^3e^{-2x}}=\frac{1}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{2x+\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{2+\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

【567】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\ln(1+xe^x)}{x\cdot e^x}\cdot xe^x}{\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x\cdot\dfrac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}}{\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{1\times 1}{0+1\times 1} = 1.$$

【568】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} + \ln\frac{x+2}{x+1}\right]$$

$$= \ln e - \ln e + \ln 1 = 0.$$

【569】 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right] \quad (a>1).$

解 因为当 $x\to+0$ 时，$\ln x\to-\infty$

所以

$$\lim_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+0}\ln\left(\frac{\ln a+\ln x}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln x+\ln(\ln a)}$$

$$= \lim_{x\to+0}\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot 2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$$

$$= \lim_{x\to+0}2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln\ln a}{\ln x-\ln a}\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}} = 2\ln a.$$

【570】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right]}{\ln^2\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\right)^{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{2}}}{\ln^2\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]}$$

$$\times \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}}{\left(\dfrac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}{2\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{8}.$$

【571】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\sin x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}(\sqrt{1+x\sin x}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【572】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\dfrac{x(e^x+e^{-x})}{2}\sin\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}-2\frac{\sin\dfrac{x(e^x+e^{-x})}{2}}{\dfrac{x(e^x+e^{-x})}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}}$$

$$\cdot\frac{x^2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{4x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{e^x}=-2.$$

【573】 $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{(x+1)}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(2e^{\frac{x}{x+1}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\,\frac{\ln[1+2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)]}{2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)}\times 2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\times\frac{2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)}{\frac{x}{x+1}}\times\frac{x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}\times 2\,\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{x+1}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^2$.

【574】 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

解 因为

$\lim\limits_{x\to 1}\ln(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\ln[1+(1-x)]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}\,\frac{\ln[1+(1-x)]}{1-x}\times\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

【575】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\ln\sin x}}{\sqrt{(1-e^{\alpha\ln\sin x})(1-e^{\beta\sin x})}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{(\alpha+\beta)\ln\sin x}}{-(\alpha+\beta)\ln\sin x} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{\alpha\ln\sin x}{(1-e^{\alpha\ln\sin x})} \cdot \frac{\beta\ln\sin x}{(1-e^{\beta\ln\sin x})}} \times \frac{-(\alpha+\beta)\ln\sin x}{\sqrt{\alpha\beta}(-\ln\sin x)}^{(*)}$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

注意：$\ln\sin x \leqslant 0$，故 $\sqrt{\ln^2\sin x} = -\ln\sin x$.

【576】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}x}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x-1}{x^2}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{th}x}{x}$.

(参照 340 题).

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}x}{x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x} + \frac{e^{-x}-1}{-x}\right]$

$$= \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x-1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{8}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\frac{x}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}-1}{-\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{th}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{e^x-e^{-x}}{x} = \frac{1}{2}\times 2 = 1.$

【576.1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$ (参照 340 题).

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)^2}{4e^{2x}} \cdot \frac{1}{\ln\left[1+\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})}{\ln\left[1+\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\right]}$$

$$\cdot \left(\frac{3x}{e^{3x}-1}\right)^2 \cdot e^x \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

【577】 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}$.

解 $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}$

$$= 2\operatorname{sh}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2},$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}{\operatorname{ch}x}$$

$$= \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x+e^{-x}}$$

$$= e^{\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}-x\right)}\ \frac{1+e^{-(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}}{1+e^{-2x}}.$$

又 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}+\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}\right) = 0,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}2\operatorname{sh}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}$$

$$\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}{\operatorname{ch}x} = 2\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

【577.1】 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a}{x-a}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{2}\left[\frac{e^x-e^a}{x-a}-\frac{e^{-x}-e^{-a}}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{2}\left[e^a\frac{e^{x-a}-1}{x-a}+e^{-a}\frac{e^{-(x-a)}-1}{-(x-a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})=\operatorname{ch}a.$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{2}\left[\frac{e^x-e^a}{x-a}+\frac{e^{-x}-e^{-a}}{x-a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\left[e^a\frac{e^{x-a}-1}{x-a}-e^{-a}\frac{e^{-(x-a)}-1}{-(x-a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})=\operatorname{sh}a.$$

【577.2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\ln\cos x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\ln\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2}\right)}{\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2}\right)}{\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2}}{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{4}\times 2^2\times 1=-1.$$

【578】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln e^x+\ln 2-\ln(1+e^{-2x}))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln 2-\ln(1+e^{-2x}))=\ln 2.$$

【579】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin 2x}-e^{\sin x})(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 2x-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{2x}\right)(e^{2x}+1)}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 2}{1}=1.$$

【580】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right]^{n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\frac{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}}{2}-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}})^2\right)-\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}})^2\right)}{\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}})^2}\cdot\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\pi^2}{8}+\frac{\ln\left(1-2\sin\frac{2\pi}{2n}\right)}{-2\sin^2\frac{\pi}{2n}}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{2}\right]$$

$$= 2^2\times\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{2}=\pi^2,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right]^{n^2}=e^{\pi^2}.$$

【581】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}$$

$$=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

【582】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

【583】 $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\dfrac{x-4}{(x-2)^2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

【584】 $\lim\limits_{x\to -\infty}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to -\infty}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\lim_{x\to -\infty}\arctan\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

【585】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\arctan x\to 0$. 故令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1$.

又 $$\tan(\arctan(x+h)-\arctan x)=\frac{x+h-x}{1+(x+h)x}=\frac{h}{1+x(x+h)},$$

所以 $$\arctan(x+h)-\arctan x=\arctan\frac{h}{1+x(x+h)}.$$

因此 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\arctan\frac{h}{1+x(x+h)}}{\frac{h}{1+x(x+h)}}\cdot\frac{h}{1+x(x+h)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

【586】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}}\cdot\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\arctan\frac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{2-x^2}{1-x}$$

$$=2.$$

【587】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[n\arctan\frac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)\right].$

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n\arctan\frac{1}{n(x^2+1)+x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n(x^2+1)+x}}{\frac{1}{n(x^2+1)+x}}\cdot\frac{n}{n(x^2+1)+x}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{1+\tan\frac{x}{2n}}{1-\tan\frac{x}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2\tan\frac{x}{2n}}{1-\tan\frac{x}{2n}}\right)}{\frac{2\tan\frac{x}{2n}}{1-\tan\frac{x}{2n}}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\cdot\frac{x}{1-\tan\frac{x}{2n}}$$

$$=x.$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\left[n\arctan\frac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\cdot e^x=\frac{e^x}{1+x^2}.$$

【588】 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}}\cdot\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

【589】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

解 因为

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1.$$

【590】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\sin(n\pi - \pi\sqrt{1+n^2})} \times \frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{(-1)^n}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\sin\frac{-1}{n+\sqrt{1+n^2}}\pi}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{-1}{n+\sqrt{1+n^2}}\pi} \cdot \frac{\frac{-1}{n+\sqrt{1+n^2}}\pi}{\sin\frac{-1}{n+\sqrt{1+n^2}}\pi} = \frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

【591】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{100}} e^{\frac{-1}{x^2}}$.

解 令 $t = \frac{1}{x}$,则当 $x \to 0$ 时,$t \to \infty$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^{100}}{e^{t^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{(t^2)^{50}}{e^{t^2}} = 0$.

注:最后一步利用 564 题的结果.

【592】 $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$.

解 设 $t = \frac{1}{x}$,则当 $x \to +0$ 时,$t \to +\infty$,所以

$$\lim_{x\to +0} x\ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0.$$

注:最后一步利用 565 题的结果.

【593】 (1) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x} - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

【594】 (1) $\lim\limits_{x \to -\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

解 (1) 注意当 $x<0$ 时,$x=-\sqrt{x^2}$,所以

$$\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

【594.1】 若

$$f(x) = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}},$$

求出 $h = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

解 当 $x<0$ 时,$-x=\sqrt{x^2}$,所以

$$h = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}} - \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+b^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}} - \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+1}\right)$$

$$=-2\ln\frac{a}{b}.$$

【595】 (1) $\lim\limits_{x\to1-0}\arctan\dfrac{1}{1-x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to1+0}\arctan\dfrac{1}{1-x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to1-0}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1+0}\arctan\dfrac{1}{1-x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

【596】 (1) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解　(1) 当 $x\to-0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，所以

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1;$$

(2) 当 $x\to+0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，所以

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

【597】 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}\cdot\dfrac{e^x}{x}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}=1$.

【598】 证明：

(1) 当 $x\to-\infty$ 时，$\dfrac{2x}{1+x}\to2+0$；

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{2x}{1+x}\to2-0$.

证 显然$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x}=2$.

(1) 若 $x\to-\infty$,当 $|x|$ 充分大时

$$\frac{2x}{1+x}=\frac{2}{1+\dfrac{1}{x}}>2.$$

于是当 $x\to-\infty$ 时,$\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$.

(2) 若 $x>0$,则 $0<\dfrac{2x}{1+x}<2$.

于是当 $x\to+\infty$ 时,$\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$.

【599】 证明:

(1) 当 $x\to-0$ 时,$2^x\to 1-0$;

(2) 当 $x\to+0$ 时,$2^x\to 1+0$.

证 显然$\lim\limits_{x\to 0}2^x=1$.

(1) 当 $x<0$ 时,$0<2^x<1$. 于是,当 $x\to-0$ 时,$2^x\to 1-0$.

(2) 当 $x>0$ 时,$2^x>1$. 于是,当 $x\to+0$ 时,$2^x\to 1+0$.

【600】 若:$f(x)=x+[x^2]$,求:$f(1)$,$f(1-0)$,$f(1+0)$.

解 $f(1)=2$,

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}(x+[x^2])=\lim_{x\to 1-0}(x+0)=1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+[x^2])=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2.$$

【601】 若:$f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$

求:$f(n)$,$f(n-0)$,$f(n+0)$($n=0,\pm 1,\cdots$).

解 $f(n)=0$,

$$f(n-0)=\lim_{x\to n-0}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^{n-1},$$

$$f(n+0)=\lim_{x\to n+0}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^n$$

$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

求下列极限(602 ~ 606).

【602】 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$.

解　因为$\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$为有界函数，所以$\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}=0$.

【603】　$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解　因为$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]<\frac{1}{x}\qquad(x\neq 0)$.

当$x>0$时，$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]<1$；

当$x<0$时，$1-x>\left[\frac{1}{x}\right]>1$.

而　$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$，

所以　$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

【604】　$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\pi=0.$$

【605】　$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

【606】　$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}x$.

解　先设$0\leqslant x\leqslant\pi$，这时$0\leqslant\sin x\leqslant x$，从而

$0\leqslant\sin\sin x\leqslant\sin x\leqslant 1$，

依此类推有

$$0\leqslant \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x\leqslant \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n-1个} x\leqslant 1,$$

即 $\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x$ 是单调减少的有界数列. 从而,$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x$ 存在,设为 A,显然 $0\leqslant A\leqslant 1$. 因此

$$A=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n} x=\sin(\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n-1} x)=\sin A$$

因此 $A=0.$

再设 $-\pi\leqslant x\leqslant 0,$

则 $0\leqslant -x\leqslant \pi,$

且 $\sin\sin\cdots\sin x=-\sin\sin\cdots\sin(-x),$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x=-\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}(-x)=0.$

再由 $\sin x$ 的周期性,得对任一 x 有

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x=0.$$

【607】 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$,由此能否推导出 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B$?

研究下例:

当 $x=\dfrac{p}{q}$(式中 p 和 q 为互质整数)时,$\varphi(x)=\dfrac{1}{q}$;当 x 为无理数时,$\varphi(x)=0$;

当 $x\neq 0$ 时,$\psi(x)=1$;

当 $x=0$ 时,$\psi(x)=0$. 而且 $x\to 0$.

解 不一定. 例于对于函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & 当 x=\dfrac{p}{q}(其中 p 和 q 互质)时,\\ 0, & 当 x 为无理数时,\end{cases}$$

及 $$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0,\end{cases}$$

显然 $$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\psi(x)=1,$$

但 $$\psi(\varphi(x))=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\end{cases}$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$不存在.

【608】 证明柯西定理:

如果函数在区间$(a,+\infty)$有定义并且在每个有穷区间(a,b)内是有界的,则

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\quad(f(x)\geqslant C>0)$,

假设在等式的右边极限都存在.

证 (1) 设
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A.$$
则任给$\varepsilon>0$,必存在正数$X_0>0$,使得当$x\geqslant X_0$时,恒有
$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$
现设$x>X_0+1$,于是存在一个唯一的正整数n(依赖于x),满足$n\leqslant x-X_0<n+1$. 令$\tau=x-X_0-n$,则
$$0\leqslant\tau<1,x=x_0+n+\tau.$$
于是我们有
$$\frac{f(x)}{x}-A$$
$$=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]+\frac{f(X_0+\tau)}{x}$$
$$-\frac{(X_0+\tau)A}{x}.$$

显然
$$\left|\frac{x}{n}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{f(X_0+\tau+n)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right|$$
$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A]\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

由假定知 $f(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界. 故存在 $X_1>0$,使得当 $x>X_1$ 时,
$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(0\leqslant\tau<1).$$
另外,显然存在 $X_2>0$,使得当 $x>X_2$ 时,
$$\left|\frac{(X_0+\tau)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$
令 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$,于是当 $x>X$ 时,必有
$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon,$$
因此
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)).$$

(2) 设
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=B.$$
因为 $f(x)\geqslant C>0$,

所以 $B\geqslant0$. 下面证明 $B>0$. 事实上,若 $B=0$,则必存在 $X_0>0$,使得当 $x\geqslant X_0$ 时,
$$0<\frac{f(x+1)}{f(x)}<\frac{1}{2}.$$
于是
$$0<\frac{f(X_0+n)}{f(X_0)}$$

$$= \frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)} \cdot \frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)} \cdot \cdots \frac{f(X_0+1)}{f(X_0)}$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_0+n) = 0$，这与 $f(x) \geqslant C > 0$ 相矛盾. 因此，有 $B > 0$.

由于 $f(x) \geqslant C > 0$，且 $f(x)$ 在每个有穷区间 (a,b) 内有界，故 $\ln f(x)$ 在每个有穷区间 (a,b) 内也有界，并且

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln f(x+1) - \ln f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ln B.$$

于是，将(1) 的结果用于函数 $\ln f(x)$，即有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \ln B,$$

因此　$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = B.$$

【609】 证明：如果(1) 函数 $f(x)$ 在域 $x > a$ 内有定义；

(2) 在每个有限的域 $a < x < b$ 内有界；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$.

注：原题应改为如果(1) $f(x)$ 定义在域 $x > a$ 内，

(2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 内为有界，

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$　　(或 $-\infty$)

则　$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty(-\infty).$$

原题中条件(3) 误为 $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$ 结论误为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$. 例如，按下式定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2n & x \in [2n, 2n+1) \\ -2n & x \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots$$

显然 $f(x)$ 满足条件(1)，(2) 并且

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty.$$

但 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\neq\infty,$$

事实上 $$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,$$

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1.$$

证 只须证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ 的情形. 这时要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, $\forall E>0$, $\exists X_0>0$, 使得当 $x\geqslant X_0$ 时 $f(x+1)-f(x)>4E$. 现设 $x>2(X_0+1)$. 则恰有一正整数 n, 满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$, 令 $\tau=x-X_0-n$, 则 $0\leqslant\tau<1$, $x=X_0+\tau+n$. 由于 $n+1>x-X_0>X_0+2$, 故 $n>X_0+1>X_0+\tau$. 从而

$$x=X_0+\tau+n<2n,$$

即 $$\frac{n}{x}>\frac{1}{2}.$$

又 $$\frac{f(x)}{x}=\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(x_0+\tau)}{n}+\frac{f(X_0+\tau)}{x},$$

显然 $$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)]\\&>\frac{1}{n}\times n\cdot 4E=4E,\end{aligned}$$

故 $$\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}>2E.$$

由于 $f(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界, 故存在正数 X_1, 使得当 $x>X_1$ 时, $\left|\dfrac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<E$.

令 $X=\max\{2(X_0+1),X_1\}$, 则当 $x>X$ 时, $\dfrac{f(x)}{x}>E$,

即 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

【610】 证明:如果(1) 函数 $f(x)$ 在域 $x>a$ 内有定义;(2) 在每个有限的域 $a<x<b$ 内有界;(3) 对于某个自然数 n 存在着有穷或无穷极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

证 我们先证明一条一般性的定理:

若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义在 $x>a$ 内;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限区间 $a<x<b$ 内均有界,并且当 $x>a$ 时,$g(x+1)>g(x)$,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$;

(3) 存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l$$

(l 为有限数或为 $+\infty$ 或为 $-\infty$),

则必有 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

证明如下:

第一情况:l 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$,存在正数 $X_0>a$,使得当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是存在唯一的整数 n(依赖于 x) 使得 $n\leqslant x-X_0<n+1$,令 $\tau=x-X_0-n$,

则 $$0\leqslant\tau<1,\qquad x=X_0+\tau+n,$$

因此 $$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$

$$\cdot\left[\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right],$$

而 $$\left|\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

又由于

$$g(x)=g(X_0+\tau+n)>g(X_0+\tau+n-1)>\cdots>g(X_0+\tau),$$

从而

$$\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>0$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

由此可知 $$\left|\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\frac{\varepsilon}{2},$$

并且 $$\frac{f(x)}{g(x)}-l$$

$$=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right]$$

$$+\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故必存在 $X_1>a$，使得当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{g(X_0+1)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

令 $X=\max\{X_1,X_0+1\}$，于是当 $x>X$ 时，$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon.$

因此 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

第二种情况：$l=+\infty$. 任给 $M>0$，存在正数 $X_0>a$，使得当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4M,$$

与前面一样的证明，可得当 $x>X_0+1$ 时有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\\&\quad\cdot\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}\\&>4M\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\\&=4M,\end{aligned}$$

并且
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}+\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty,$$

以及 $f(x)$，$g(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故存在正数 $X_1>a$，使得当 $x>X_1$ 时，

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<M$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$，则当 $x>X$ 时，恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{2}\cdot 4M-M=M,$$

因此
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

第三种情况：$l=-\infty$. 则设 $F(x)=-f(x)$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x+1)-F(x)}{g(x+1)-g(x)}=+\infty,$$

由第二种情况的证明，我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{g(x)}=+\infty$，

因此 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty.$$

现在我们应用此一般性定理来证明本题. 设 $g(x)=x^{n+1}$,则 $g(x)$ 满足一般性定理的条件,并且

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+(n+1)x+1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\cdot\frac{x^n}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+1}\\&=\frac{l}{n+1},\end{aligned}$$

因此 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^n-x^n}=\frac{l}{n+1}.$$

注:原题所说明无穷,必须是带符号的无穷,即 $+\infty$ 或 $-\infty$. 参见 609 题的注.

【611】 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

证 (1) 当 $x=0$ 时,等式显然成立.

当 $x\neq0$ 时,令 $y_n=\frac{n}{x}$,由 71 题的结果,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{y_n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^x=e^x.$$

(2) 当 $x=0$ 时,显然. 先讨论 $x>0$ 的情形. 由牛顿二项式定理得

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$
$$\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

另一方面，当 $m>n$ 时，有

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots$$
$$+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right).$$

令 $m\to+\infty$（n 保持不变），得

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x \qquad (x>0).$

由于

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)$$
$$=1+(-1)^n\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2.$$

而对固定的 x，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. 因此对 $x<0$，仍然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x.$$

【612】 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}n\sin(2\pi e n!)=2\pi.$

提示：利用 72 题的公式.

证 由 72 题有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{\theta_k}{k!k},$$

其中 $0<\theta_k<1$，因而

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi e n!)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]}{2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}2\pi n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

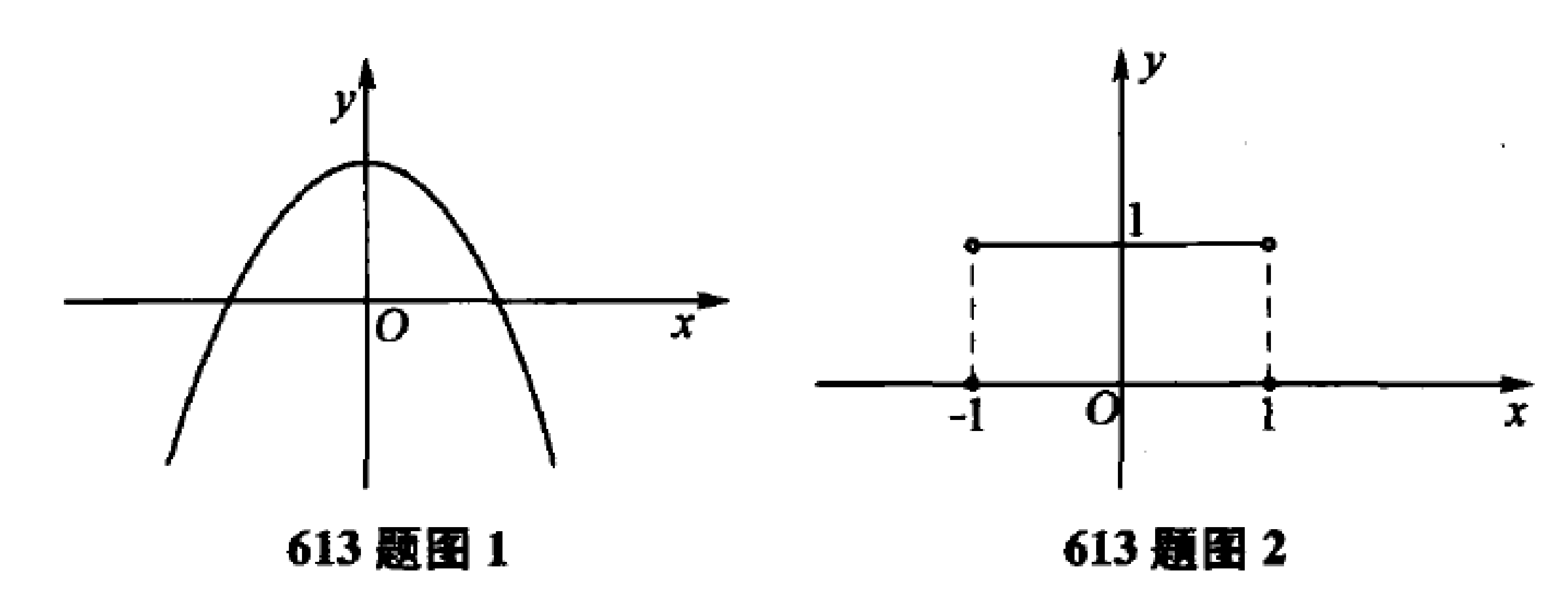
$$= 2\pi.$$

绘制以下函数的图形(613 ～ 625).

【613】 (1) $y = 1 - x^{100}$;

(2) $y = \lim_{n\to\infty}(1 - x^{2n}) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 (1) 图形关于 y 轴对称. 如 613 题图 1 所示.



613 题图 1　　613 题图 2

(2) $y = \lim_{n\to\infty}(1 - x^{2n}) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1. \end{cases}$

如 613 题图 2 所示.

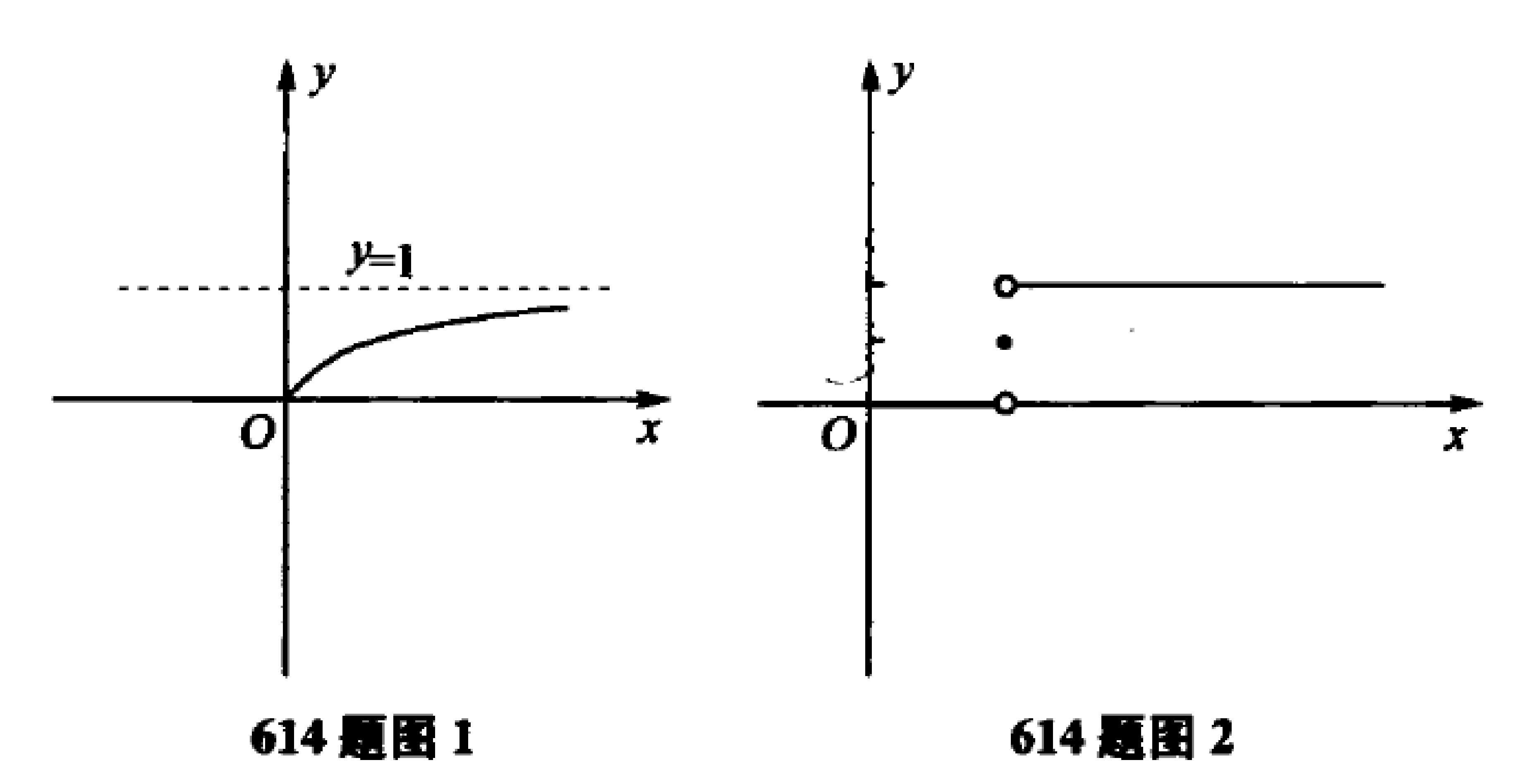
【614】 (1) $y = \dfrac{x^{100}}{1 + x^{100}} \qquad (x \geqslant 0)$;

(2) $y = \lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1 + x^n} \qquad (x \geqslant 0)$.

解 (1) 如 614 题图 1 所示.

(2) $y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

如 614 题图 2 所示.



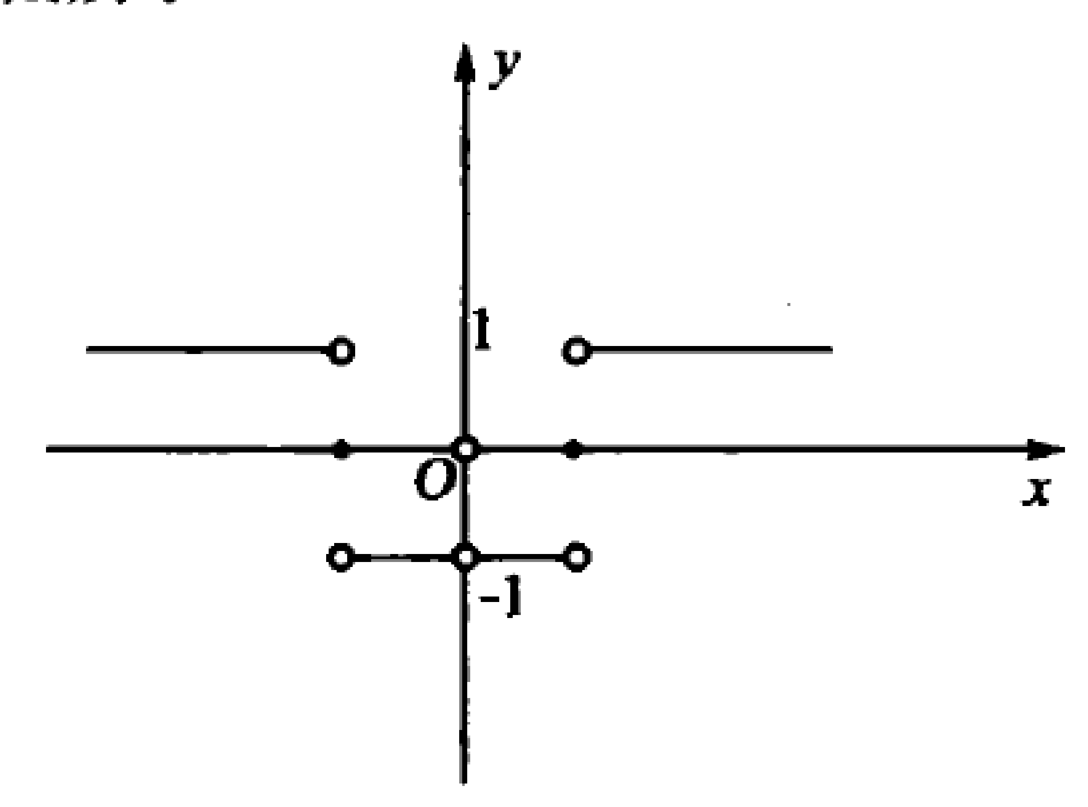
614 题图 1　　614 题图 2

【615】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\quad(x\neq 0).$

解 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

$$=\begin{cases}-1, & 若\ |x|<1(x\neq 0),\\ 0, & 若\ |x|=1,\\ 1, & 若\ |x|>1.\end{cases}$$

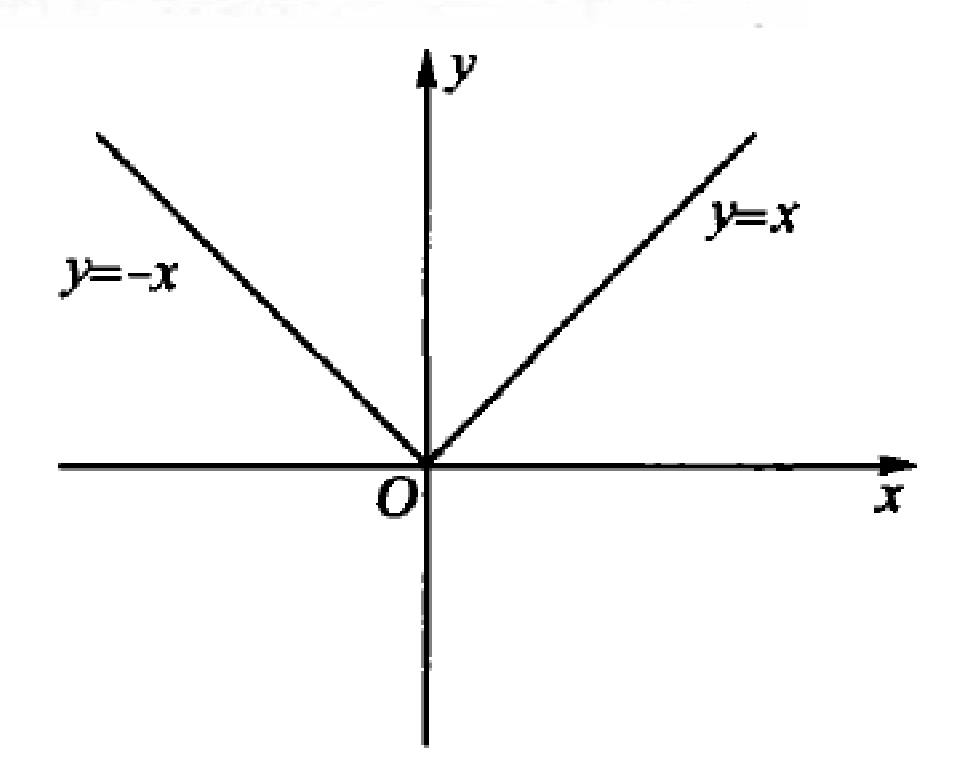
如 615 题图所示.



615 题图

【616】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}.$

解 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,如 616 题图所示.



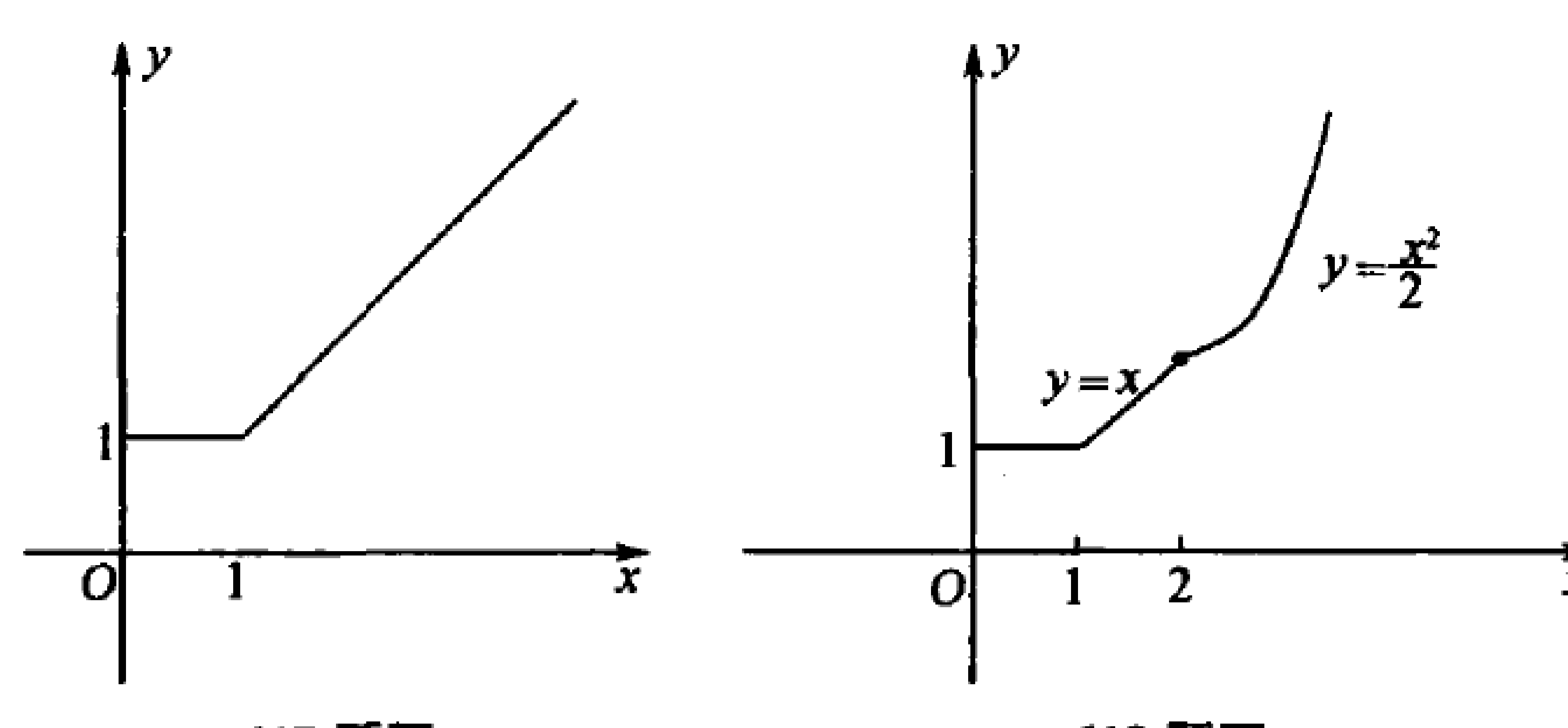
616 题图

【617】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 若 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 若 x>1.\end{cases}$

如 617 题图所示.

【618】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0)$.



617 题图　　618 题图

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant 3^{\frac{1}{n}}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=1$.

当 $1<x<2$ 时

$$x\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\sqrt[n]{x^n\left(\frac{1}{x^n}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}<\sqrt[n]{3}x$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x.$

当 $x>2$ 时

$$\frac{x^2}{2}\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

$$=\sqrt[n]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\left(\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\frac{2^n}{x^n}+1\right)}\leqslant\sqrt[n]{3}\,\frac{x^2}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}.$

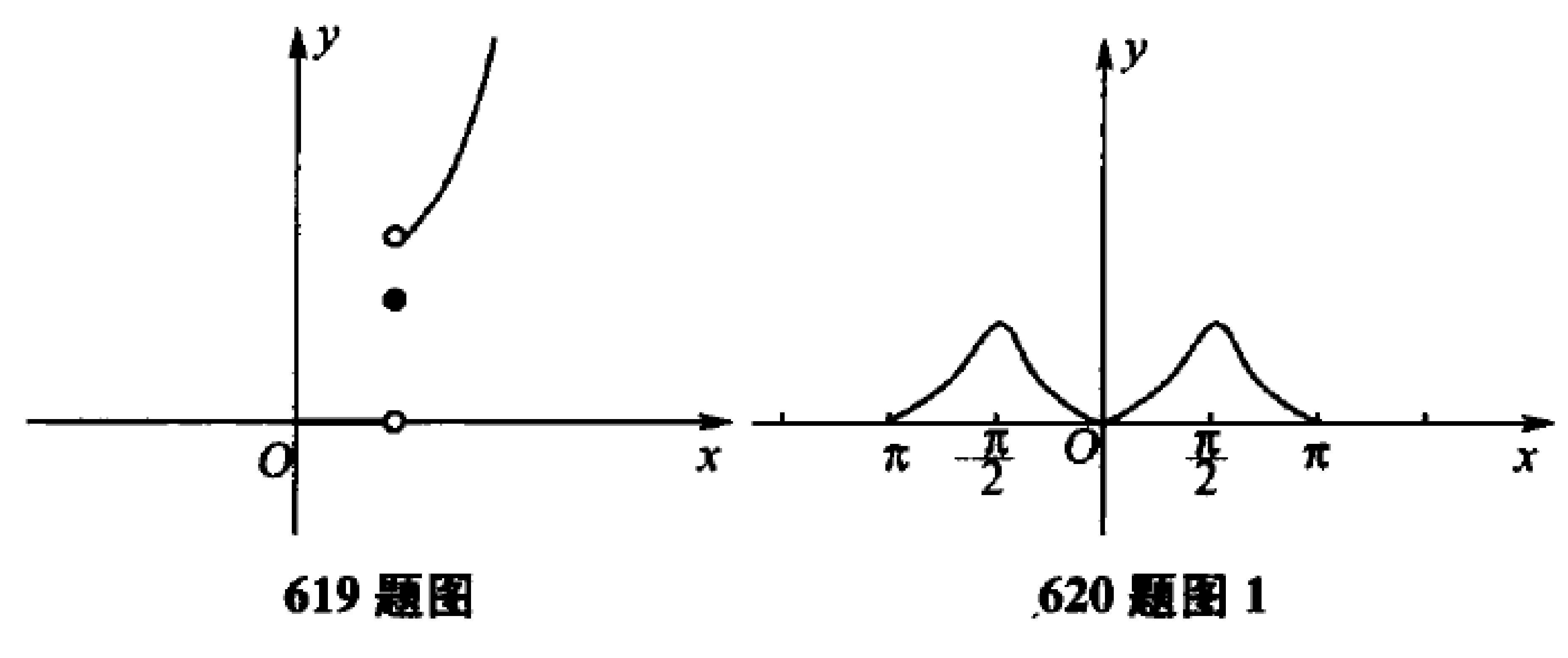
因此 $$y=\begin{cases}1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & 若\ 1<x<2;\\ \frac{x^2}{2}, & 若\ 2<x<+\infty.\end{cases}$$

如 618 题图所示.

【619】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}\quad(x\geqslant 0).$

解 $$y=\begin{cases}0, & 若\ 0\leqslant x<2;\\ 2\sqrt{2}, & 若\ x=2;\\ x^2, & 若\ x>2.\end{cases}$$

如 619 题图所示.



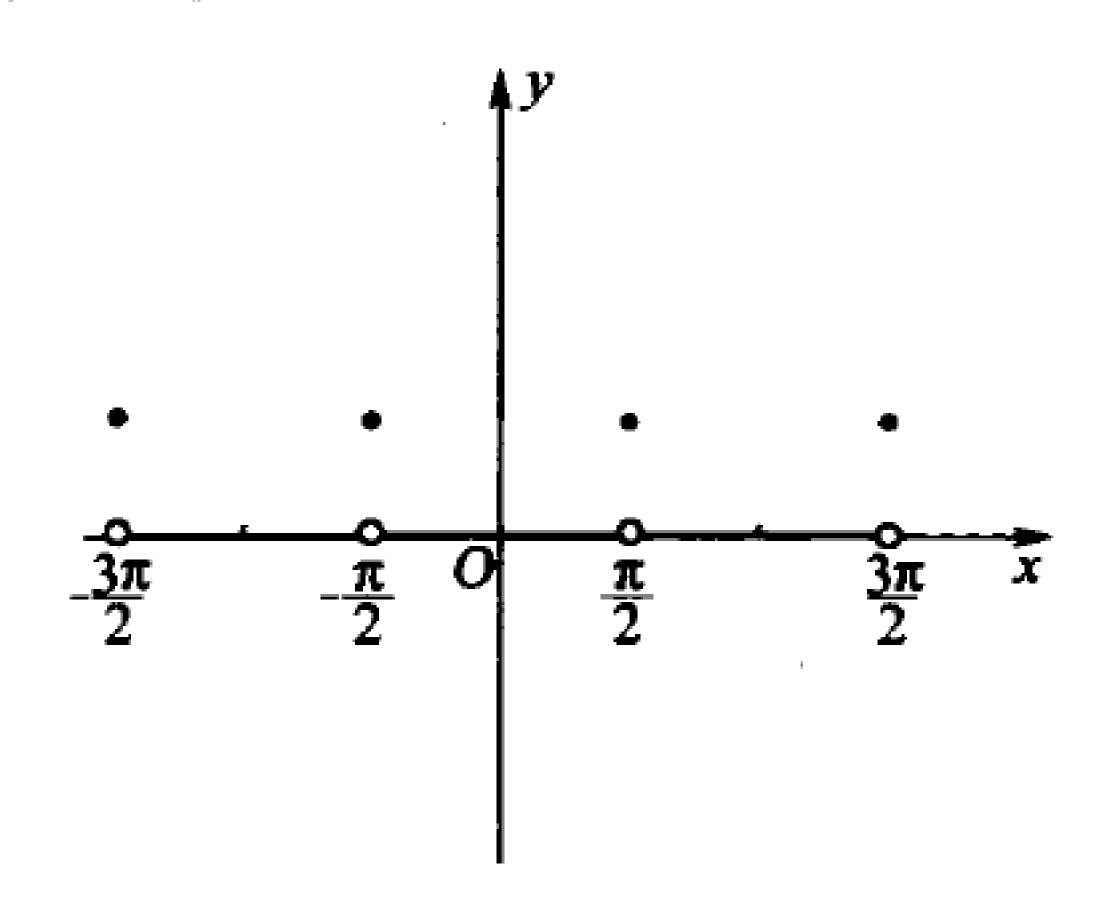
619 题图　　620 题图 1

【620】 (1) $y=\sin^{1000}x$;　　(2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x.$

解 (1) 如 620 题图 1 所示.

(2) $y=\begin{cases}0, & \text{当 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ 时},\end{cases}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

如 620 题图 2 所示.

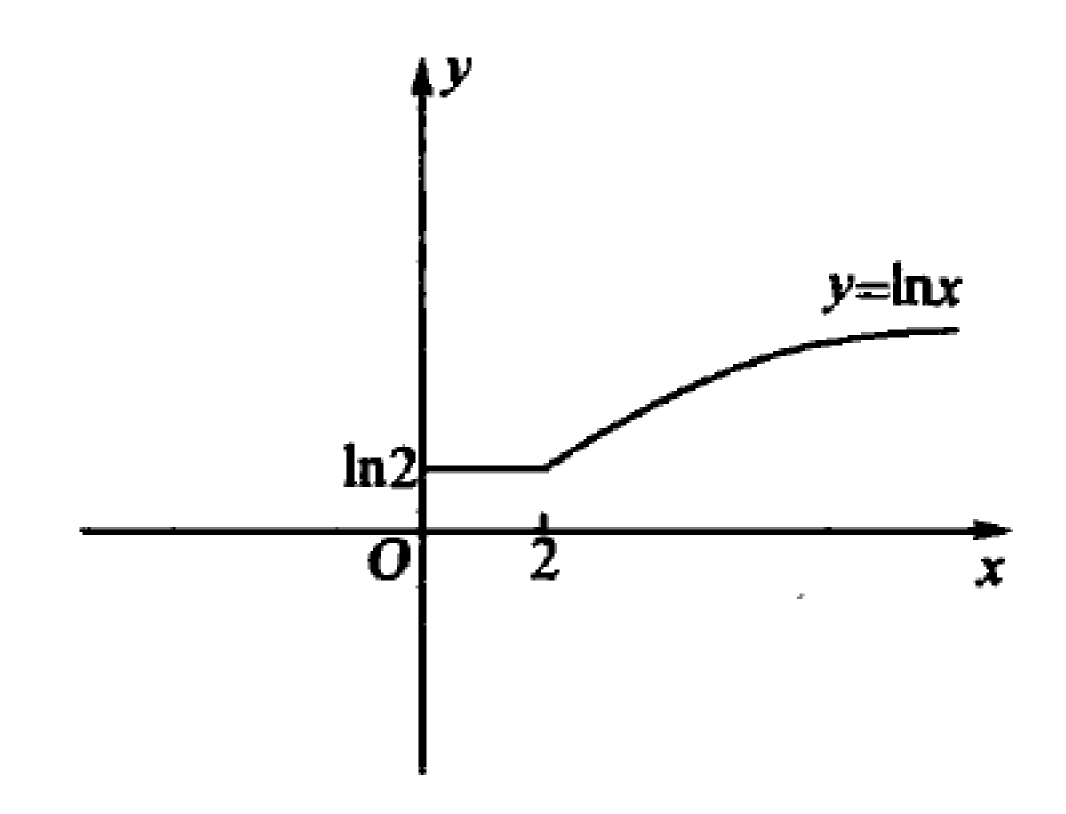


620 题图 2

【621】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}\qquad(x\geqslant 0).$

解 $y=\begin{cases}\ln 2, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \ln x, & \text{若 } x>2.\end{cases}$

如 621 题图所示.

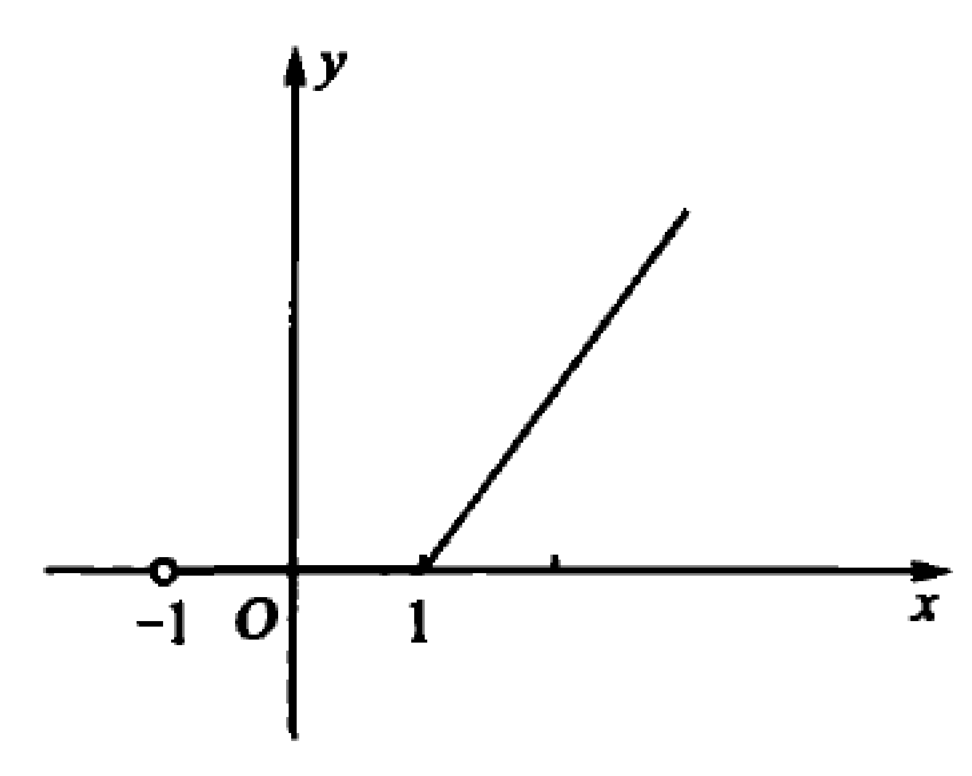


621 题图

【622】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\arctan x^n.$

解 $y=\begin{cases}0, & 若 -1<x\leqslant 1^*, \\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), & 若 x>1.\end{cases}$

如 622 题图所示.



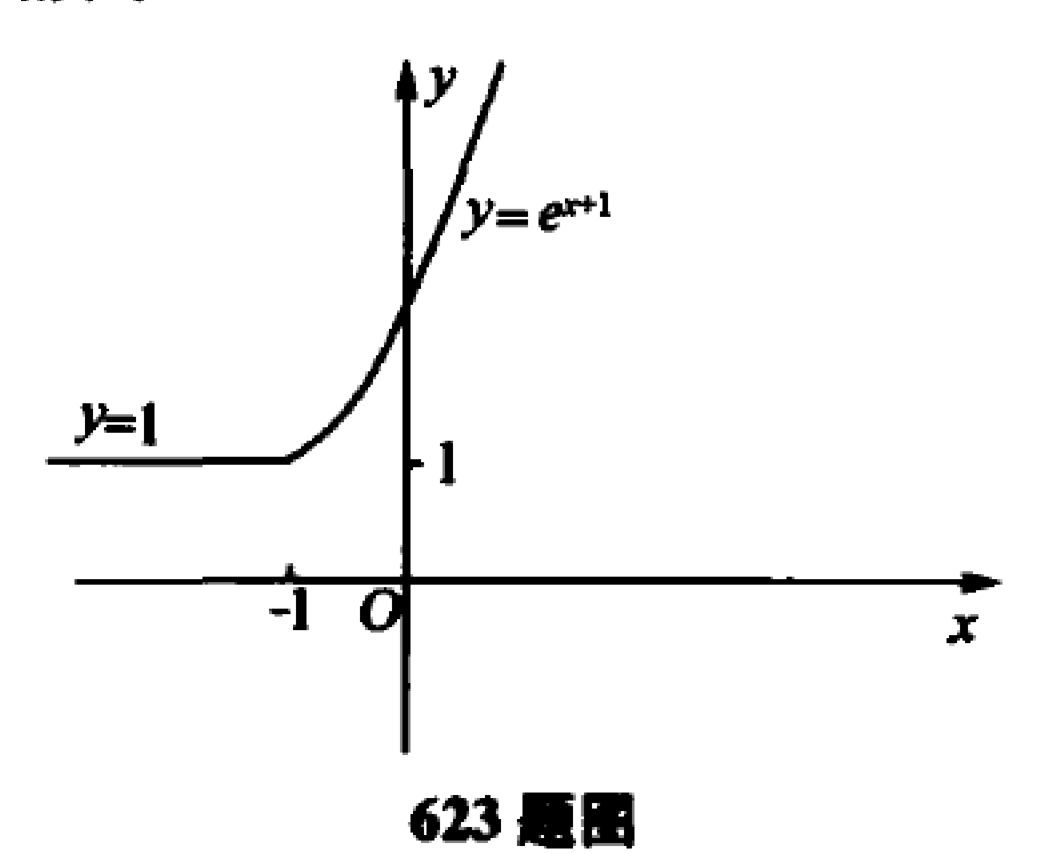
622 题图

注:应加上条件 $x>-1$.

【623】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

解 $y=\begin{cases}1, & 若 x\leqslant -1, \\ e^{x+1}, & 若 x>-1.\end{cases}$

如 623 题图所示.

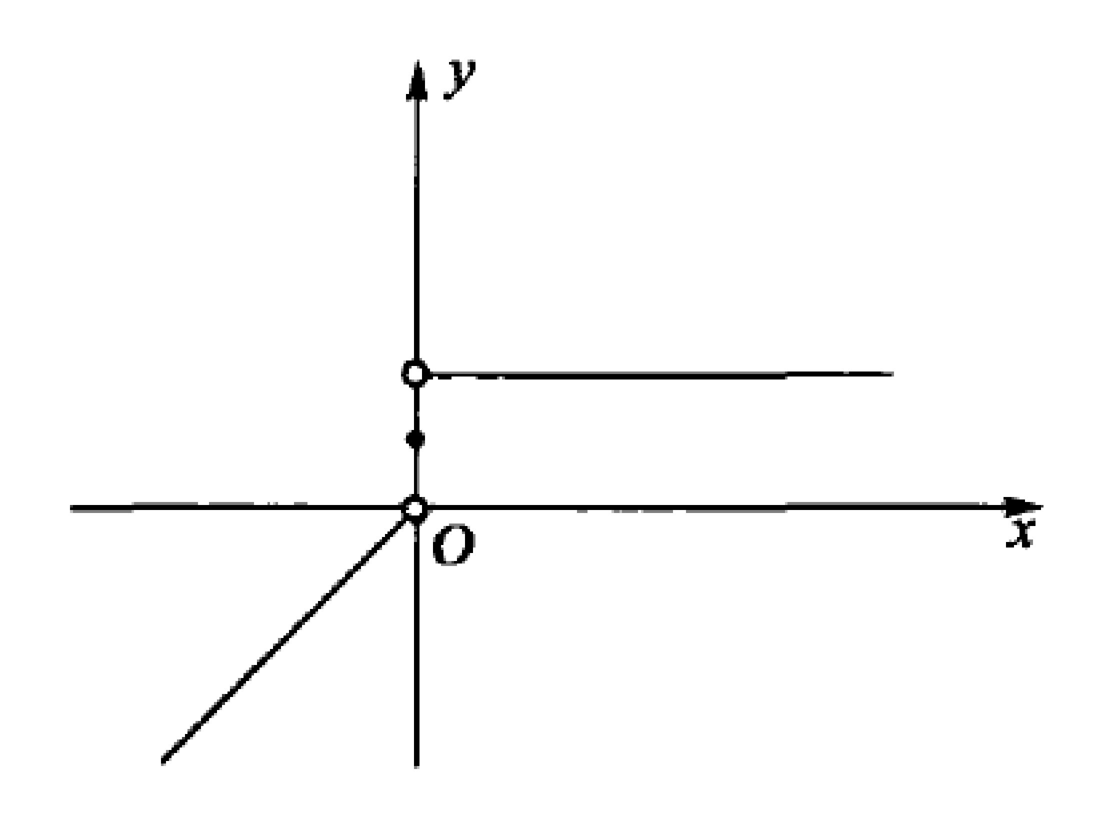


623 题图

【624】 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

解 $y=\begin{cases}x, & 若 x<0, \\ \dfrac{1}{2}, & 若 x=0, \\ 1, & 若 x>0.\end{cases}$

如 624 题图所示.

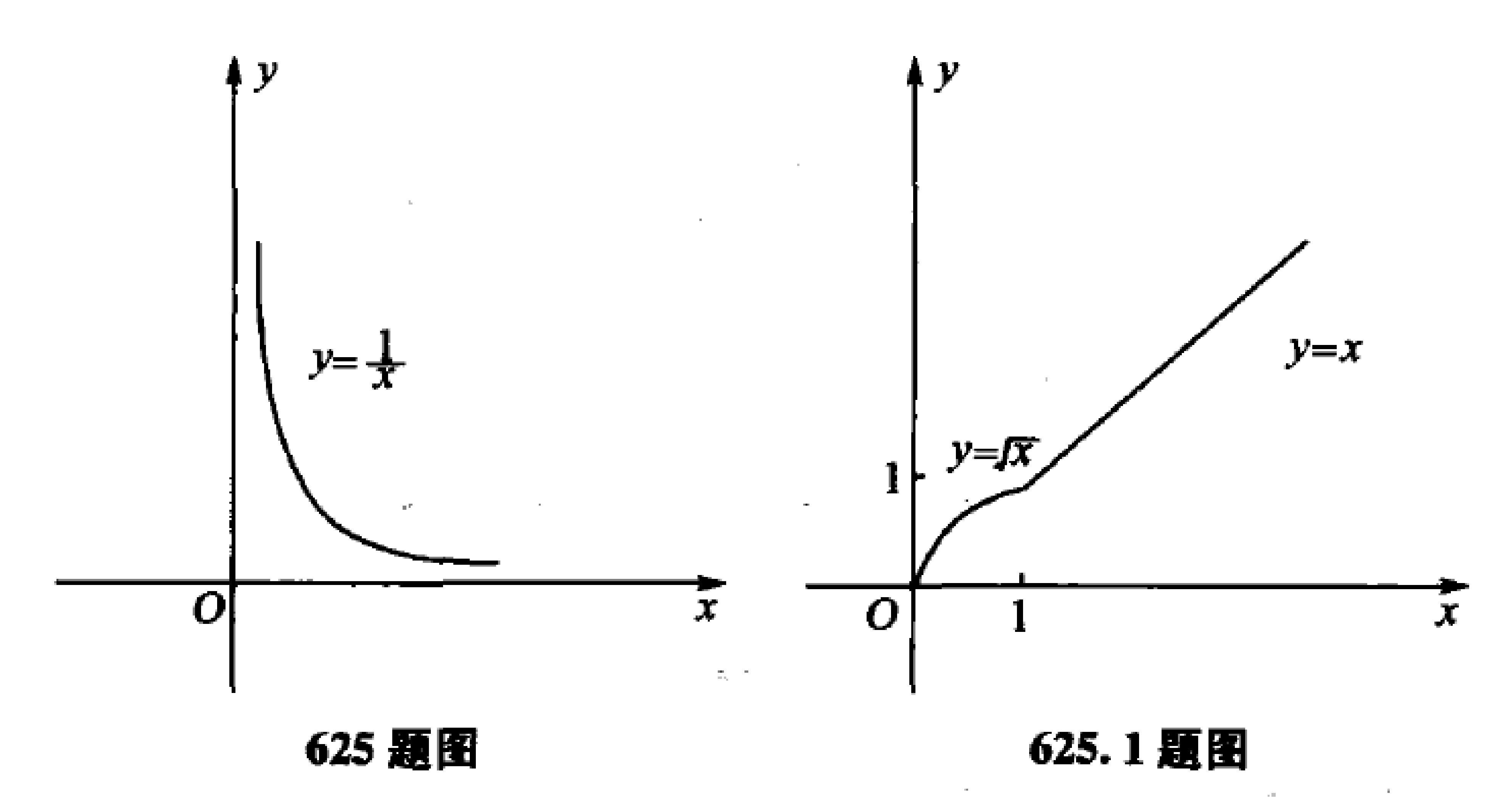


624 题图

【625】 $y=\lim\limits_{t\to x}\frac{1}{t-x}\ln\frac{t}{x}\qquad(x>0).$

解 $y=\lim\limits_{t\to x}\frac{\ln\left(1+\frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$

如 625 题图所示.



625 题图　　625.1 题图

【625.1】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x\tan^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\tan^{2n}\frac{\pi x}{4}+1}\qquad(x\geqslant 0).$

解 $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

如 625.1 题图.

【625.2】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}|\sin^2(n!\pi x)|$.

若 x 为有理数,则 x 可表示为某既约分数,故

解 $y=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}.\end{cases}$

如 625.2 题图所示

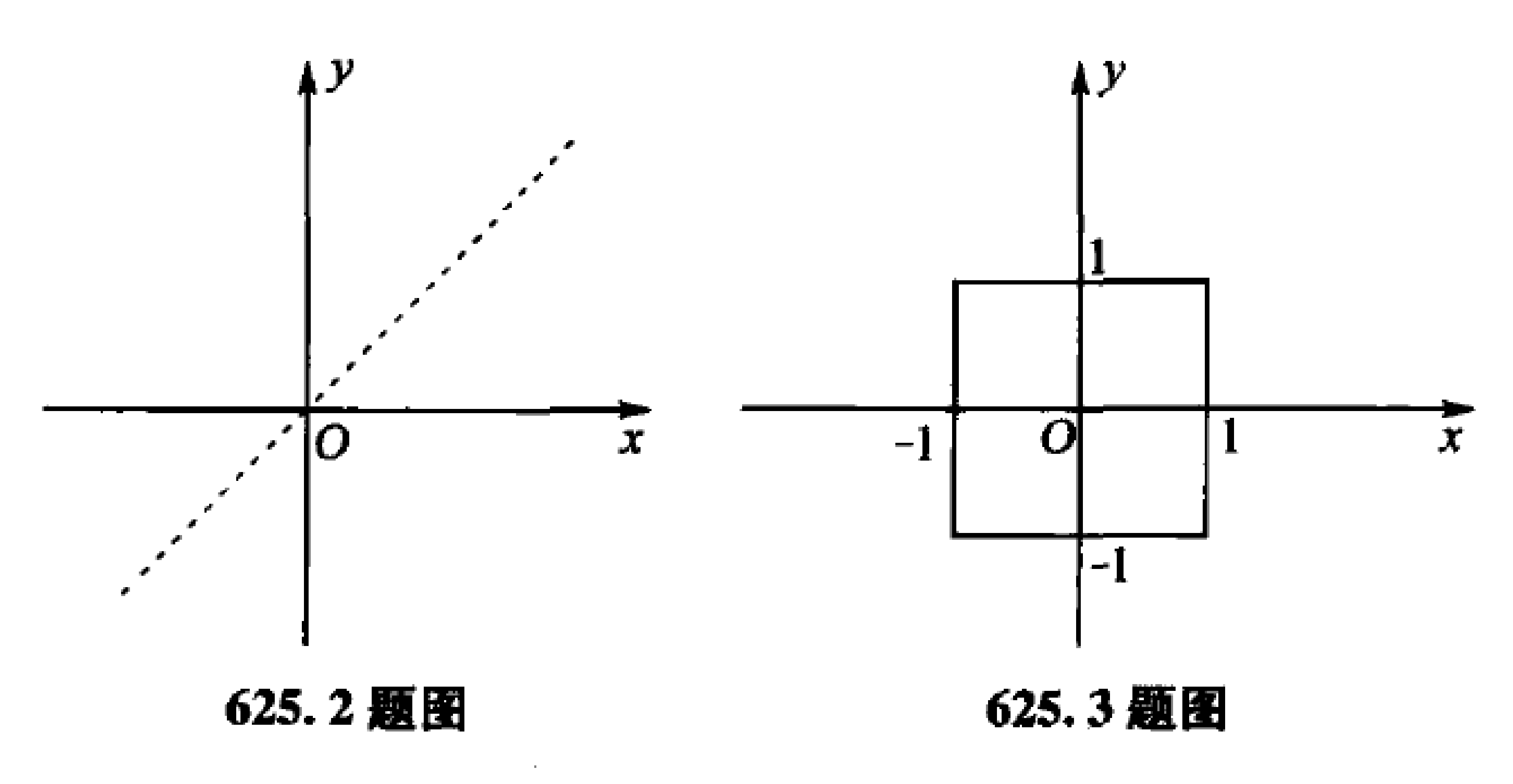
【625.3】 作出曲线

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=\max\{|x|,|y|\}$.

所以所求曲线为 $\max\{|x|,|y|\}=1$.

如 625.3 题图所示.



625.2 题图　　625.3 题图

【626】 若

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

那么直线 $y=kx+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的(斜)渐近线,利用这个方程式推导出渐近线存在的必要且充分的条件.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形即

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0, \qquad ①$$

而当 $x>0$ 时，$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-(kx+b)}{x}+k+\frac{b}{x}$.

从而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$ ②

由 ① 立得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$， ③

即常数 k,b 由 ②,③ 即可得. 反之，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，且

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b.$$

则 ① 式成立，即 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 同理，若

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,$$

且 $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b.$$

则 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条(从左边伸向无穷远的渐近线).

【627】 求出以下曲线的渐近线并作图：

(1) $y=\frac{x^3}{x^2+x-2}$；　(2) $y=\sqrt{x^2+x}$；

(3) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$；　(4) $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$；

(5) $y=\ln(1+e^x)$；　(6) $y=x+\arccos\frac{1}{x}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3}{x^2+x-2}=\infty,\qquad\lim_{x\to-2}\frac{x^3}{x^2+x-2}=\infty,$$

所以直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线.

其次因为

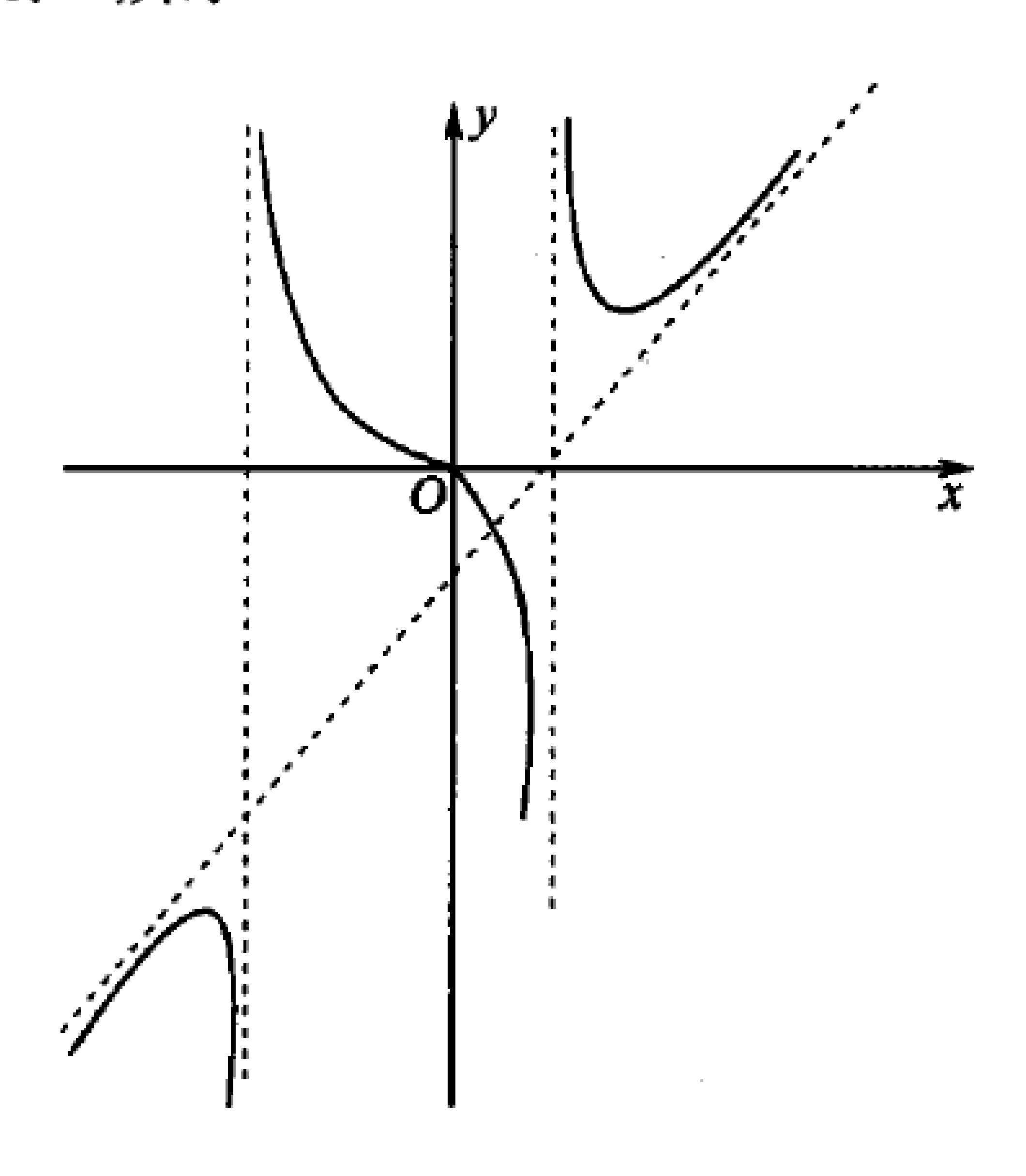
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1=k,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+x-2}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x}{x^2+x-2}=-1,$$

所以 $y=x-1$ 为曲线的斜渐近线.

如 627 题图 1 所示.



627 题图 1

(2) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=1=k_1,$$

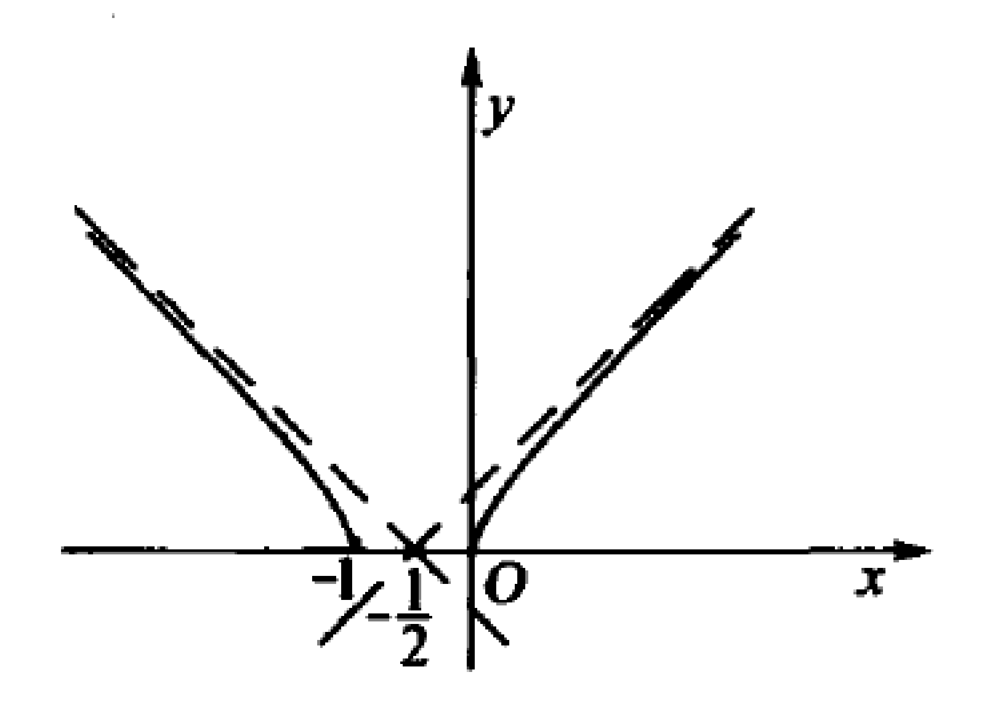
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}=b_1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1=k_2,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=-\frac{1}{2}=b_2.$$

于是直线 $y=x+\frac{1}{2}$ 及 $y=-x-\frac{1}{2}$ 为曲线的斜渐近线. 曲线 $y=\sqrt{x^2+x}$ 为双曲线 $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ 在 Ox 轴上面的部分.

如 627 题图 2 所示.



627 题图 2

(3) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{x^2-x^3}+x^2}$$

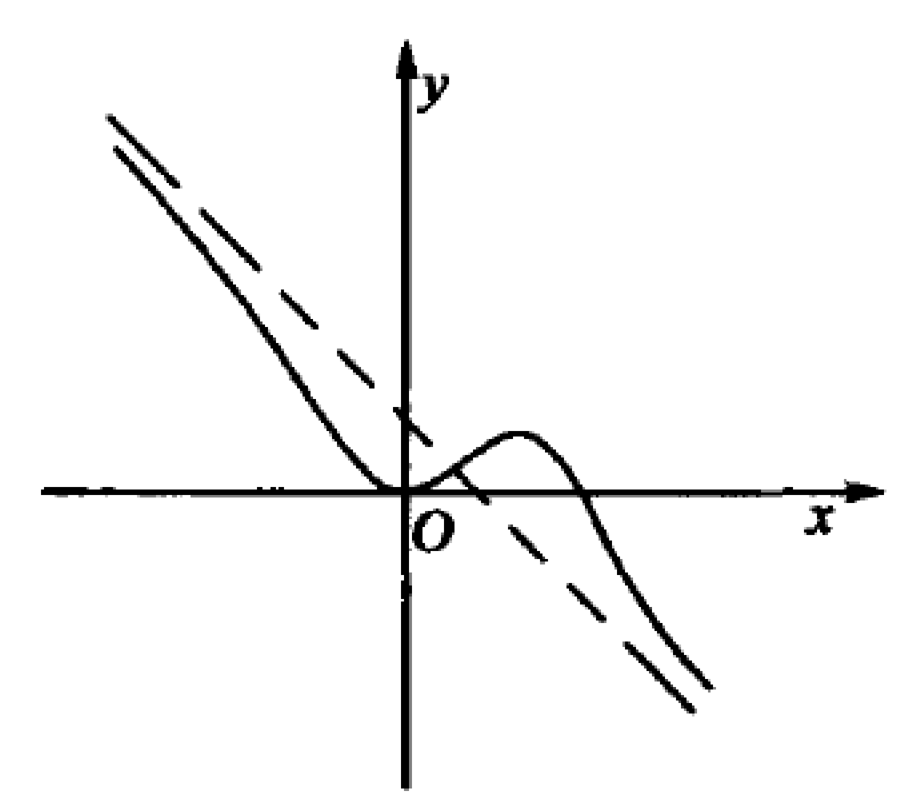
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

斜渐近线为 $y=-x+\frac{1}{3}$,曲线过原点及 $A(1,0)$ 点.

当 $-\infty<x<1$ 时,$y>0$;

当 $x>1$ 时,$y<0$.

如 627 题图 3 所示.



627 题图 3

(4) $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0.$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=0,b_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0.$$

故 $y=x$ 为曲线的斜渐近线；$y=0$ 为曲线的水平渐近线. 函数在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明这是可去间断)，如 627 题图 4 所示.

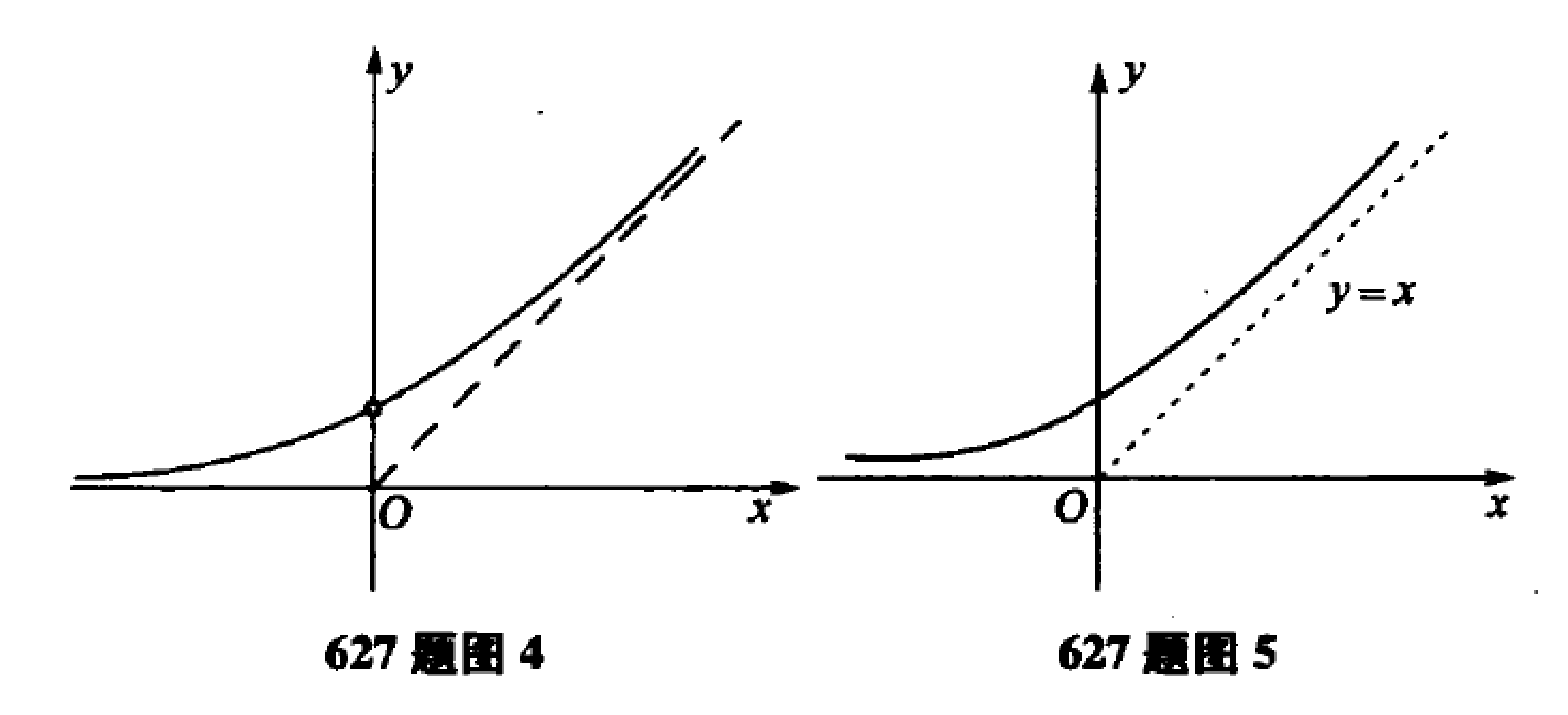
(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{x}=1.$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0.$$

故 $y=x$ 为曲线的斜渐近线. 又

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0.$$

故 $y=0$ 为曲线的水平渐近线. 且曲线过点 $A(0,\ln2)$. 如 627 题图 5 所示.

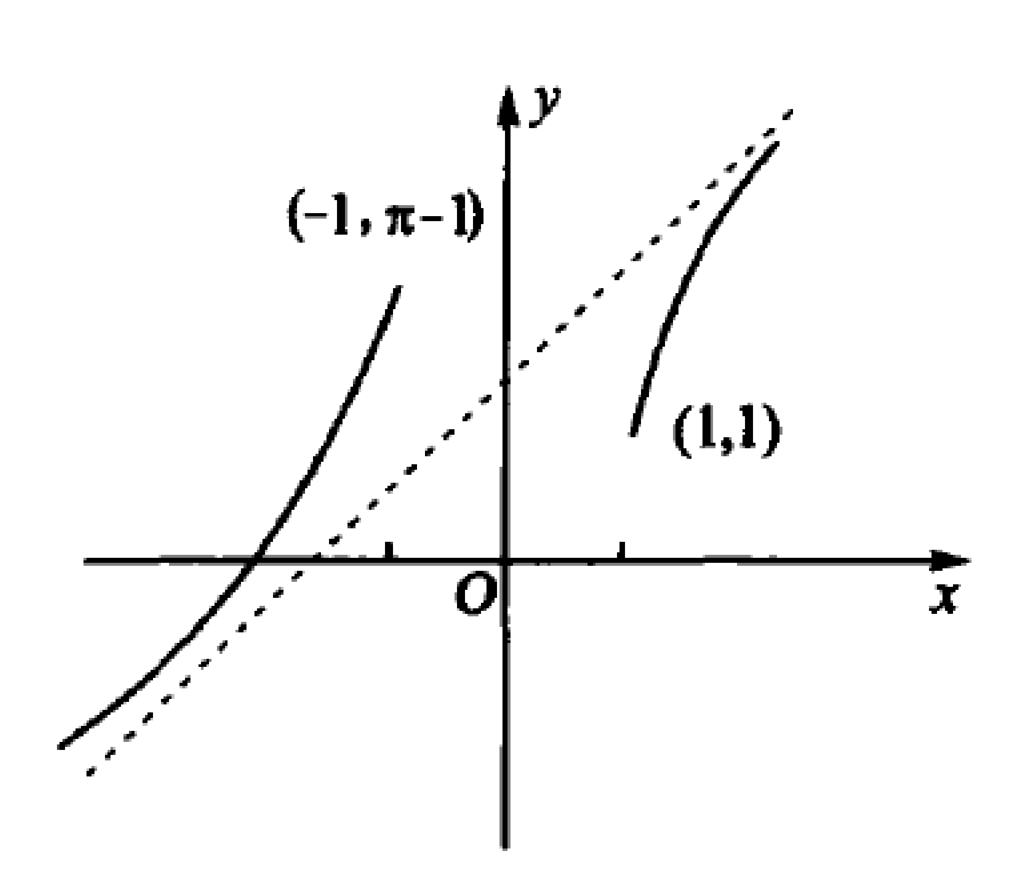


627 题图 4　　627 题图 5

(6) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arccos\dfrac{1}{x}}{x}=1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+\arccos\frac{1}{x}\right)-x\right]=\frac{\pi}{2},$$

故 $y=x+\frac{\pi}{2}$ 为曲线的斜渐近线，如 627 题图 6 所示.



627 题图 6

求出下列极限(628 ～ 630).

【628】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

解　法一：因为

$$\frac{x^{n+1}}{(2n)!}(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

$$<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

若 $x=1$，显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(1+x+\cdots+x^{n-1})=0.$$

若 $x\neq 1$，由 61 题的结果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}(1-x^n)}{(n+1)!}\right]=0,$$

同理　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!}(1+x+\cdots+x^{n-1})=0,$

因此　$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0.$$

法二:由 611 题(2) 的结果有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left[1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=e^x-e^x=0.$$

【629】 若 $|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})].$$

解　$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots+(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots+(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

【630】 $$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

解　因为

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$$

$$=\cdots=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n},$$

所以　$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

【631】 令$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$

其中$\psi(x)>0$,且当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$,亦即当$m=1,2,\cdots$且$n>N(\varepsilon)$时$|\alpha_{mn}|<\varepsilon$.

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})]$

$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})] \qquad ①$$

假定等式①右边存在极限.

注:本题需假定$a_{mn}\neq 0$.

证 任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当$0<|x|<\delta$时,恒有

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}-1\right|<\varepsilon.$$

又$\phi(x)>0$,从而

$$(1-\varepsilon)\phi(x)<\varphi(x)<(1+\varepsilon)\phi(x).$$

由于$a_{mn}\neq 0$,$a_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$,必有正整数$N=N(\varepsilon)$,使得当$n>N$时,恒有

$$0<|a_{mn}|<\delta \qquad (m=1,2,\cdots,n).$$

于是 $$(1-\varepsilon)\phi(a_{mn})<\varphi(a_{mn})<(1+\varepsilon)\phi(a_{mn})$$
$$(n>N,m=1,2,\cdots,n),$$

将这n个不等式相加得

$$(1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\phi(a_{mn})<\sum_{m=1}^{n}\varphi(a_{mn})<(1+\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\phi(a_{mn}),$$

即 $$1-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(a_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\phi(a_{mn})}<1+\varepsilon,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(a_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\phi(a_{mn})}=1.$$

由假设$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\phi(a_{mn})$存在,因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(a_{mn})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(a_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\phi(a_{mn})}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(a_{mn})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\phi(a_{mn}).$$

注:应加上条件 $a_{mn}\neq 0$(原题没有)因为 $\varphi(x)$,$\phi(x)$ 可能在 $x=0$ 处无定义.

利用上述定理,求出(632 ~ 636).

【632】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

解　设 $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$,　　$\phi(x)=\frac{x}{3}$,

则
$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{3}\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=1.$$

其次
$$a_{kn}=\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0\qquad(n\to\infty,k=1,2,\cdots,n).$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\phi(a_{kn})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6},$$

所以由 631 题的结果知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{6}.$$

【633】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,

而当 $n\to\infty$ 时，$a_{kn}=\dfrac{ka}{n^2}\rightrightarrows 0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$.

又 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2}=\frac{a}{2},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

【634】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{\frac{k}{n^2}}-1)\qquad(a>0)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\cdot\ln a}=1$,

当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{k}{n^2}\ln a\rightrightarrows 0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$.

且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a^{\frac{k}{n^2}}-1)=\frac{1}{2}\ln a.$$

【635】 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

解 设 $y_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$,

则 $$\ln y_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

先求 $$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right),$$

因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

又当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{k}{n^2}\rightrightarrows 0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$,

且 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$.

【636】 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

解 设 $y_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

当 n 充分大时 $\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}>0$,

此时 $\ln y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

又
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{-\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{-\frac{1}{2}x^2}=1.$$

又 $\frac{ka}{n\sqrt{n}}\rightrightarrows 0\qquad(n\to\infty,k=1,2,\cdots,n)$.

且
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}\right)=-\frac{a^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$=-\frac{a^2}{6},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=-\frac{a^2}{6}$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{6}}$.

【637】 序列 x_n 由以下等式给定:

$$x_1=\sqrt{a},\qquad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},$$
$$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots\qquad(a>0).$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 显然$x_n>x_{n-1}>0$. 即序列是单调增加的;其次,由$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$有$x_n^2=a+x_{n-1}$,即

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

因为$x_n>x_{n-1}>0$,所以$x_n<\frac{a}{x_n}+1$. 又显然$x_n>\sqrt{a}$,故$x_n<\frac{a}{x_n}+1<\sqrt{a}+1$,即序列$\{x_n\}$是有界的. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,设$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 则由$x_n^2=a+x_{n-1}$有

$$A^2=a+A.$$

解之得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

因为$x_n>0$,故$A\geqslant 0$. 因此$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

即
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

【637.1】 由以下形式给出序列x_n:

$$x_1=0,x_2=1,$$
$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})\qquad(n=2,3,\cdots).$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$有

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}&=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-2}-x_{n-3})\\&=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2},\end{aligned}$$

即
$$x_n = x_{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= x_{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= x_{n-2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

我们讨论$\{x_n\}$的两个子序列$\{x_{2k}\}$及$\{x_{2k+1}\}$，

$$x_{2k} = x_{2(k-1)} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-3}$$
$$= x_{2(k-2)} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-5} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-3}$$
$$= \cdots = x_2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-3}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k}{1-\frac{1}{4}},$$

故
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

又
$$x_{2k+1} = x_{2k-1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}$$
$$= x_{2k-3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}$$
$$= \cdots = x_3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k}{1-\frac{1}{4}}.$$

故
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}$.

【637.2】 序列 y_n 序列 x_n 由下列关系式给出:

$$y_0=x_0,y_n=x_n-ax_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

其中 $|a|<1$,

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由 $y_n=x_n-ax_{n-1}$,得

$$x_n=y_n+ax_{n-1}=y_n+ay_{n-1}+a^2x_{n-2},$$

应用归纳法可得

$$x_n=y_n+ay_{n-1}+a^2y_{n-2}+\cdots+a^ny_0.$$

下面我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 事实上,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在. 故序列 $\{y_n\}$ 有界,即存在 $M>0$,使得 $|y_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$,又 $|a|<1$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,所以,对任给 $\varepsilon>0$. 存在 $N_1>0$,使得当 $n>N$ 时,$|a^n|<\frac{1-|a|}{4M}\varepsilon$.

另一方面 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,由柯西收敛准则,存在 $N_2>0$,使得当 $n>N_2$ 时,对任何正整数 p 都有

$$|y_{n+p}-y_n|<\frac{1-|a|}{2}\varepsilon.$$

取

$$N_3=\max\{N_1,N_2\},N=2N_3,$$

则 $n>N$ 时,$n-N_3>N_3\geqslant N_2$,因此,对任何正整数 p 都有

$$\begin{aligned}&|x_{n+p}-x_n|\\&=|y_{n+p}+ay_{n+p-1}+\cdots+a^{n+p}y_0-(y_n+ay_{n-1}+\cdots+a^ny_0)\\&=|(y_{n+p}-y_n|+a(y_{n+p+1}-y_{n-1})+\cdots+a^{N_3}(y_{n+p-N_3}\\&\quad-y_{n-N_3})+a^{N_3+1}(y_{n+p-N_3-1)}-y_{n-N_3-1})+\cdots+a^{n+p}y_0|\\&<\frac{1-|a|}{2}\varepsilon(1+|a|+\cdots+|a|^{N_3})\\&\quad+2Ma^{N_3+1}(1+|a|+\cdots+|a|^{n+p-N_3-1})\end{aligned}$$

$$< \frac{1-|a|}{2}\varepsilon \cdot \frac{1}{1-|a|} + 2M \cdot \frac{1-|a|}{4M} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{1-|a|}$$

$= \varepsilon.$

由柯西准则知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，对 $y_n = x_n - ax_{n-1}$ 两取极限得 $b = l - al$，

所以 $$l = \frac{b}{1-a},$$

即 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a}.$$

【637.3】 序列 x_n 由以下形式确定：

$$x_0 = 1, x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

提示：研究 x_n 与方程式 $x = \dfrac{1}{1+x}$ 的根之间的差.

解 设 A 是方程 $x = \dfrac{1}{1+x}$ 的正根，即 $A = \dfrac{1}{1+A}$，且 $A >$ 0，解之得 $A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

由于 $$x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}},$$

所以 $$x_n - A = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+A} = \frac{A - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+A)},$$

故 $$|x_n - A| \leqslant \frac{1}{2}|x_{n-1} - A|.$$

用归纳法可得 $|x_n - A| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (A-1)$.

因此 $$\lim_{n\to\infty}(x_n - A) = 0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty} x_n = A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【638】 函数序列

$$y_n = y_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

由以下等式确定：

$$y_1=\frac{x}{2},y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}\qquad(n=2,3,\cdots).$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 当 $x=0$ 时，$y_n=0\qquad(n=1,2,\cdots)$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，

当 $0<x\leqslant1$ 时，用归纳法可证 $y_n>0(n=1,2,\cdots)$. 显然 $y_1>0$，若 $y_k>0$，则 $1\geqslant x>y_{k-1}^2$，所以

$$y_{k+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_k^2}{2}=\frac{4x-(x-y_{k-1}^2)^2}{8}$$

$$>\frac{4x-x^2}{8}\geqslant\frac{3x}{8}>0,$$

因而 $y_1-y_3=\dfrac{y_2^2}{2}>0$，

$$y_2-y_4=\frac{y_3^2-y_1^2}{2}<0.$$

用归纳法可证

$$y_{2n}-y_{2n+2}<0,$$
$$y_{2n-1}-y_{2n+1}>0\qquad n=1,2,\cdots,$$

即 $\dfrac{x}{2}=y_1>y_3>\cdots>0$

$$0<y_2<y_4<\cdots<\frac{x}{2}$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n+1}$ 均存在. 设

$$\lim_{n\to\infty}y_{2n}=A_1,\lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=A_2.$$

由 $y_{2n}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y_{2n-1}^2}{2}$，

及 $y_{2n+1}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y_{2n}^2}{2}$，

得 $A_1=\dfrac{x}{2}-\dfrac{A_2^2}{2},A_2=\dfrac{x}{2}-\dfrac{A_1^2}{2}.$

两式相减得 $A_1 - A_2 = (A_1 - A_2)\dfrac{A_1 + A_2}{2}$.

由于　$0 \leqslant A_1 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}, 0 \leqslant A_2 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$,

可得　$A_1 = A_2 = A$,

即　$\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} y_{2n+1} = A$.

因此　$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$,

且　$A = \dfrac{x}{2} - \dfrac{A^2}{2}$.

解之得　$A = \sqrt{1+x} - 1$,

即　$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1$.

【639】 函数序列

$$y_n = y_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

由下式确定：

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n = 2, 3, \cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解　显然 $y_2 \geqslant y_1$，假设 $y_n \geqslant y_{n-1}$，则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

可得　$y_{n+1} \geqslant y_n$

由数学归纳法知 $\{y_n\}$ 是单调增加序列. 下面我们证明 $\{y_n\}$ 有界.
显然 $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$. 假设 $0 \leqslant y_k \leqslant 1$，则 $0 \leqslant y_k^2 \leqslant 1$，所以

$$0 \leqslant y_{k+1} = \frac{x}{2} + \frac{y_k^2}{2} \leqslant 1,$$

由数学归纳法知 $\{y_n\}$ 有界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$. 得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2}.$$

解之得　$l = 1 \pm \sqrt{1-x}$.

由于　$0 \leqslant l \leqslant 1$,

故必有 $l=1-\sqrt{1-x}$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1-\sqrt{1-x}.$

【639.1】 设 $x>0$ 且

$$y_n=y_{n-1}(2-xy_{n-1})\qquad(n=1,\cdots).$$

证明:若 $y_i>0(i=0,1,\cdots)$,则序列 y_n 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{x}$.

提示:研究 $\dfrac{1}{x}-y_n$ 之差.

证 由 $y_n=y_{n-1}(2-xy_{n-1})$,

有 $$\frac{1}{x}-y_n=x\left(\frac{1}{x}-y_{n-1}\right)^2>0,$$

从而,$\dfrac{1}{x}>y_n$,而由假设知,$y_n>0$. 即$\{y_n\}$是有界序列,下面证明$\{y_n\}$是单调序列. 事实上,由$\dfrac{1}{x}>y_n>0$,有 $1>xy_n>0$,因此$\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=2-xy_n>1$,即 $y_{n+1}>y_n$,所以$\{y_n\}$是单调序列. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$. 则对 $y_n=y_{n-1}(2-xy_{n-1})$,

两边取极限有 $A=A(2-xA)$,

解之得 $A=0$ 及 $A=\dfrac{1}{x}$.

由于 $A\geqslant y_0>0$,舍去 $A=0$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{x}$.

【639.2】 为了求出 $y=\sqrt{x}$ 的近似解,常采用以下步骤:$y_n=\dfrac{1}{2}\left(y_{n-1}+\dfrac{x}{y_{n-1}}\right)(n=1,2,\cdots)$,其中 $y_0>0$ 为任意实数,$x>0$.

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{x}$.

提示:利用公式

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2\qquad(n\geqslant 1).$$

证　由 $y_n=\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+\frac{x}{y_{n-1}}\right)$,

有 $$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left[\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right]^2.$$

由归纳法,我们有

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left[\frac{y_0-\sqrt{x}}{y_0+\sqrt{x}}\right]^{2^n}. \quad ①$$

设 $$q=\frac{y_0-\sqrt{x}}{y_0+\sqrt{x}}.$$

由于 $y_0>0$ 因此 $|q|<1$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=0$.

下面我们证明 $\{y_n\}$ 为有界序列. 事实上,显然有 $y_n>0$. 若 $\{y_n\}$ 为无界序列. 则 $\sup\{y_n\}=+\infty$,因而存在 $\{y_n\}$ 的一子序列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=+\infty$,

因此 $$\lim_{k\to\infty}\frac{y_{n_k}-\sqrt{x}}{y_{n_k}+\sqrt{x}}=1.$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=0$ 相矛盾. 因此存在 $M>0$,使得 $0<y_n<M$.

由 ① 式得

$$|y_n-\sqrt{x}|=|q|^{2^n}(y_n+\sqrt{x})\leqslant(M+\sqrt{x})|q|^{2^n},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}(y_n-\sqrt{x})=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}y_n=\sqrt{x}.$$

【640】　为了求出开普勒方程式

$$x-\varepsilon\sin x=m \qquad (0<\varepsilon<1) \quad ①$$

的近似解,假设

$$x_0=m, x_1=m+\varepsilon\sin x_0, \cdots x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}, \cdots$$

(逐步逼近法).

证明：$\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且数 ξ 是方程式 ① 的唯一的根.

证 $x_2 - x_1 = \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_0)$

$$= 2\varepsilon\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\cos\frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以
$$|x_2 - x_1| \leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\right| \leqslant 2\varepsilon\cdot\frac{|x_1 - x_0|}{2}$$
$$= \varepsilon|x_1 - x_0| = \varepsilon\cdot\varepsilon|\sin x_0| \leqslant \varepsilon^2.$$

同理 $|x_3 - x_2| \leqslant \varepsilon|x_2 - x_1| \leqslant \varepsilon^3$.

设 $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon^n$，则有

$$|x_{n+1} - x_n| = 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right|$$
$$\leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right| \leqslant \varepsilon|x_n - x_{n-1}|$$
$$\leqslant \varepsilon^{n+1}.$$

因此由归纳法知对任一自然数 n 均有 $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon^n$.

于是对任何自然数 p，有

$$\begin{aligned}
&|x_{n+p} - x_n| \\
&\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| \\
&\quad + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leqslant \varepsilon^{n+p} + \varepsilon^{n+p-1} + \cdots + \varepsilon^{n+1} \\
&= \varepsilon^{n+1}\frac{1 - \varepsilon^p}{1 - \varepsilon} < \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon}.
\end{aligned}$$

因此 $|x_{n+p} - x_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

由 Cauchy 判断法知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

则由 $x_n = m + \varepsilon\sin x_{n-1}$，

有 $\xi = m + \varepsilon\sin\xi$.

即 ξ 是方程 ① 的根. 最后证明根的唯一性. 设 ξ_1 是方程的另一根，则有

$$\xi_1 - \xi = \varepsilon(\sin\xi_1 - \sin\xi) = 2\varepsilon\sin\frac{\xi_1 - \xi}{2}\cos\frac{\xi_1 + \xi}{2},$$

因此 $|\xi_1-\xi|\leqslant\varepsilon|\xi_1-\xi|$.

由于 $0<\varepsilon<1$,故 $\xi_1=\xi$,证毕.

【641】 如果 $\omega_k(f)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $|x-\xi|\leqslant k(k>0)$ 的振幅,则数 $\omega_0(f)=\lim\limits_{k\to 0}\omega_k(f)$ 被称作函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振辐.

确定以下函数在点 $x=0$ 的振辐:

(1) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos^2\dfrac{1}{x}$;

(3) $f(x)=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$; (4) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}$;

(5) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$; (6) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

(7) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $\omega_k(f)=2,\omega_0(f)=2$.

(2) $\omega_k(f)=+\infty,\omega_0(f)=+\infty$

(3) $k\leqslant\omega_k(f)\leqslant 3k,\omega_0(f)=0$

(4) $\omega_k(f)=\dfrac{1}{\pi}\left[\arctan\dfrac{1}{k}-\arctan\dfrac{1}{(-k)}\right]=\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{k}$,

$$\omega_0(f)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

(5) 因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$,

且 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=-1,$$

所以 $\omega_k(f)=2,\omega_0(f)=2$.

(6) $\omega_k(f)=\left|\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}}-\dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}}\right|$,

$\omega_0(f)=1$.

(7) $\omega_k(f)=(1+k)^{\frac{1}{k}}-(1+k)^{-\frac{1}{k}}$,

$\omega_0(f)=e-e^{-1}=2\text{sh}1$.

【642】 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

证明:对于满足条件 $-1 \leqslant a \leqslant 1$ 的任何数 a,可以选出序列 $x_n \to 0(n=1,2\cdots)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

证 对于确定的 a: $-1 \leqslant a \leqslant 1$,存在

$$x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

使 $\sin x_0 = a.$

令 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + x_0},$

则显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$

且 $f(x_n) = \sin\dfrac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \sin x_0 = a,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a.$

【643】 若

(1) $f(x) = \sin^2\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}$;

(2) $f(x) = (2 - x^2)\cos\dfrac{1}{x}$;

(3) $f(x) = \left(1 + \cos^2\dfrac{1}{x}\right)^{\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

求出 $l = \varliminf\limits_{x\to 0} f(x), L = \varlimsup\limits_{x\to 0} f(x).$

解 (1) 显然 $-1 < f(x) \leqslant 2$,取

$$x_n = \frac{-1}{n\pi} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\pi}\arctan(-n\pi) = -1.$

取 $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad (n = 1,2,\cdots),$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 2.$

所以 $l = -1, L = 2.$

(2) $l = -2, L = 2.$

(3) $l = 2, L = \mathrm{e}$.

【644】 若

(1) $f(x) = \sin x$;　　(2) $f(x) = x^2\cos^2 x$;

(3) $f(x) = 2^{\sin x^2}$;　　(4) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}(x \geqslant 0)$.

求出 $l = \varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ 和 $L = \varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$.

解　由 l 及 L 的定义,容易求得

(1) $l = -1, L = 1$.

(2) $l = 0, L = +\infty$.

(3) $l = \dfrac{1}{2}, L = 2$.

(4) $l = 0, L = +\infty$.

§6. 无穷大和无穷小的阶

1. 当 $x \in X$ 时,符号:

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

这表示对于 $x \in X$ 存在常数 A,使得

$$|\varphi(x)| \leqslant A|\psi(x)|. \qquad ①$$

当 $x \to a$ 时,类似地可定义

$$\varphi(x) = O(\psi(x)). \qquad ②$$

设不等式 ① 在点 $a(x \neq a)$ 的某域 U_a 内成立;若存在有限的 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. 在这种情况下,将写成

$$\varphi(x) = o(\psi(x)).$$

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0)$

则 $\varphi(x)$ 称为对于无穷小 x 是 p 阶无穷小. 同样,若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \qquad (p > 0).$$

则 $\psi(x)$ 称为对于无穷大 x 是 p 阶无穷大.

2. 当 $x \to a$ 时,符号:

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

这表示 $\varphi(x)=\alpha(x)\psi(x)(x\in U_a,x\neq a)$ ③

其中当 $x\to a$ 时,$\alpha(x)\to 0$,若当 $x\in U_a,x\neq a,\psi(x)\neq 0$ 时,则等式 ③ 与下式等价

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3. 当 $x\to a$ 时,函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 称为等价函数($\varphi(x)\sim\psi(x)$)

若 $x\to a$ 时,

$$\varphi(x)-\psi(x)=o(\psi(x))$$ ④

若当 $x\in U_a,x\neq a,\psi(x)\neq 0$,时,则由式 ④ 得出

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

当 $x\to 0$ 时,有以下等价关系:

$\sin x\sim x;\tan x\sim x;$

$a^x-1\sim x\ln a(a>0);$

$\ln(1+x)\sim x;\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n},$

通常认为:$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

在求解当 $x\to a$ 两个无穷小(或无穷大)函数比的极限时,已知函数可以用其等价的函数替换.

【645】 将中心角 $AOB=x$(645题图)当作1阶无穷小,求以下各无穷小的阶:

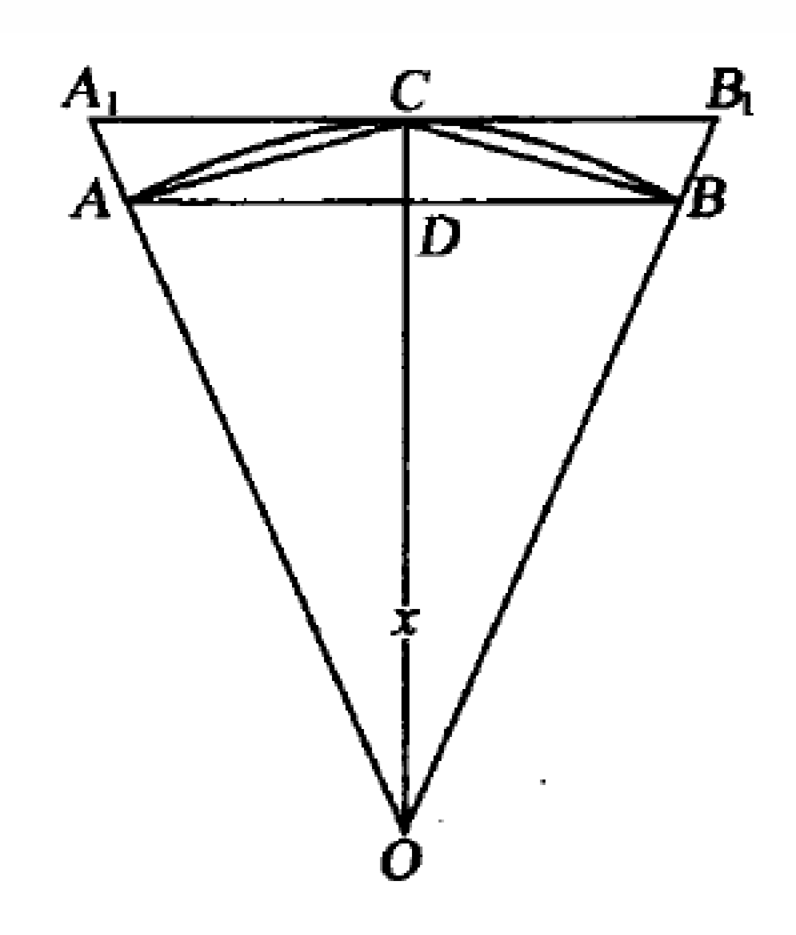
(1) 弦 AB;(2) 矢 CD;

(3) 扇形 AOB 的面积;(4) 三角形 ABC 的面积;

(5) 梯形 ABB_1A_1 的面积;(6) 弓形 ABC 的面积.

解 (1) $AB=2R\sin\frac{x}{2}$,其中 R 为圆的半径.因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{AB}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2R\sin\frac{x}{2}}{x}=R,$$



645 题图

故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

(2) $CD = OC - OD = R - R \cdot \cos\frac{x}{2} = 2R\sin^2\frac{x}{4}$,

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{CD}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2R\cdot\sin^2\frac{x}{4}}{x^2} = \frac{R}{8}.$$

故矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(3) 扇形 AOB 的面积 $S = \frac{1}{2}R^2x$ 是关于 x 的一阶无穷小.

(4) 三角形 ABC 的面积

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\mid AB\mid\cdot\mid CD\mid\\ &= \frac{1}{2}2R\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot 2R\cdot\sin^2\frac{x}{4}\\ &= 2R^2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{4},\end{aligned}$$

是关于 x 的三阶无穷小.

(5) $A_1C = R\tan\frac{x}{2}$,于是梯形 ABB_1A_1 的面积

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}\mid CD\mid(\mid AB\mid+\mid A_1B_1\mid)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2R\sin^2\frac{x}{4}\left(2R\sin\frac{x}{2}+2R\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= 2R^2\sin^2\frac{x}{4}\cdot\sin\frac{x}{2} + 2R^2\sin^2\frac{x}{4}\cdot\tan\frac{x}{2}.$$

从而 $$\lim_{x\to 0}\frac{S_1}{x^3} = \frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{16} = \frac{R^2}{8}.$$

所以 S_1 是关于 x 的三阶无穷小.

(6) 弓形 ABC 的面积

$$S_2 = \frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot R\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}R^2(x-\sin x).$$

而 $S_{\triangle ABC} < S_2 < S_1$ 其中 S_1 是梯形 ABB_1A_1 的面积，且 $S_{\triangle ABC}$ 及 S_1 均为 x 的三阶无穷小，所以 S_2 是 x 的三阶无穷小. 事实上，以后可以证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

【646】 设 $o(f(x))$ 为当 $x\to a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数，而 $O(f(x))$ 为当 $x\to a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶的任意无穷大函数，其中 $f(x)>0$.

证明：

(1) $o\{o(f(x))\} = o\{f(x)\}$;

(2) $O\{o(f(x))\} = o\{f(x)\}$;

(3) $o\{O[f(x)]\} = o(f(x))$;

(4) $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$;

(5) $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$.

证 (1) 因为

$$\lim_{x\to a}\frac{o\{o(f(x))\}}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{o\{o(f(x))\}}{o(f(x))}\cdot\frac{o(f(x))}{o(f(x))} = 0.$$

故 $$o\{o(f(x))\} = o\{f(x)\}.$$

(2) 由 133 题(2) 的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o(f(x))\}|}{f(x)}$$

$$= \overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O\{o(f(x))\}|}{o(f(x))} \cdot \lim_{x\to a} \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0.$$

故 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{O\{o(f(x))\}}{f(x)} = 0,$

因此 $O\{o(f(x))\} = o\{f(x)\}.$

(3) $\overline{\lim\limits_{x\to a}} \dfrac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\right|,$

$$\overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0,$

即 $o\{O[f(x)]\} = o(f(x)).$

(4) 由 132 题(2) 的结果,有

$$\overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{|O(f(x))|} \cdot \overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)}$$

$$< +\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)].$

(5) 由 131 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O[f(x)] + o[f(x)]|}{f(x)}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} + \overline{\lim_{x\to a}} \frac{|o[f(x)]|}{f(x)}$$

$$= \overline{\lim_{x\to a}} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty,$$

故 $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)].$

【647】 令 $x \to +0$ 且 $n > 0$

证明:

(1) $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$(C 为常数);

(2) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)(n < m)$;

(3) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (1) 因为

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\cdot\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $\qquad C\cdot O(x^n)=O(x^n).$

(2) 因为

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+0}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot x^{m-n}\right)$$

$$=\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $\qquad O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\qquad(n<m).$

(3) 因为

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{O(x^n)O(x^m)}{x^{n+m}}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}\cdot\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^m)|}{x^m}<+\infty,$$

故 $\qquad O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{n+m}).$

【648】 令 $x\to+\infty$ 且 $n>0$,证明:

(1) $C\cdot O(x^n)=O(x^n)$;

(2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)(n>m)$;

(3) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (1) 因为

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\cdot\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $\qquad C\cdot O(x^n)=O(x^n).$

(2) $$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot\frac{1}{x^{n-m}}$$

$$=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故　　$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$.

(3) 同 647 题(3)

【649】　证明符号 ~ 具有以下性质：

(1) 自反性：$\varphi(x)\sim\varphi(x)$；

(2) 对称性：若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$，则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$；

(3) 传递性：若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$ 和 $\psi(x)\sim\chi(x)$，则 $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

证　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$ 故 $\varphi(x)\sim\varphi(x)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$,

则　　$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1,$$

所以 $\psi(x)\sim\varphi(x)$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$；$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)}{\chi(x)}=1$,

故　　$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\chi(x)}=1,$$

即 $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

【650】　令 $x\to+0$，证明以下等式：

(1) $2x-x^2=O^*(x)$；　　(2) $x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$；

(3) $x\sin\dfrac{1}{x}=O(|x|)$；　　(4) $\ln x=o\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)(\varepsilon>0)$；

(5) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$；　　(6) $\arctan\dfrac{1}{x}=O(1)$；

(7) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

证　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2x-x^2}{x}=2$,

所以　　$2x-x^2=O^*(x)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=1$,

所以 $x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

(3) 因为 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|\quad(x\neq 0)$,

所以 $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}}=\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=0$,

所以 $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1$,

故 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$.

(6) 因为 $\left|\arctan\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(x\neq 0)$,

故 $\arctan\frac{1}{x}=O(1)$.

(7) 因为

$$\frac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\frac{1}{2}n(n-1)x+\cdots+x^{n-1}\to 0\quad(x\to 0),$$

所以 $(1+x)^n-1-nx=o(x)$.

即 $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

【651】 设 $x\to+\infty$,证明以下等式:

(1) $2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$;　(2) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(3) $x+x^2\sin x=O(x^2)$;　(4) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}=O^*\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(5) $\ln x=o(x^{\varepsilon})(\varepsilon>0)$;　(6) $x^p e^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$;

(7) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$;　(8) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

证　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3}=2$，

所以　$2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2+1}=1$，

所以　$\dfrac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) 因为

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|x+x^2\sin x|}{x^2}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{1}{x}+\sin x\right|=1,$$

所以　$x+x^2\sin x=O(x^2)$.

(4) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\arctan x}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

所以　$\dfrac{\arctan x}{1+x^2}=O^*\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}=0$，

所以　$\ln x=o(x^\varepsilon)$.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p e^{-x}}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{p+3}}{e^x}=0$，

所以　$x^p e^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

(7) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}=1,$$

所以　$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$.

(8) 因为

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x\ln^{100} x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln^{100} x}{x}\right) = 1,$$

故 $x^2 + x\ln^{100} x \sim x^2.$

【652】 证明:当 x 充分大($x > 0$)时,下列不等式成立:

(1) $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$;

(2) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; (3) $x^{10}e^x < e^{2x}$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} = 0$,

所以当 x 充分大时$\dfrac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} < 1.$

即 $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3.$

(2) 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} = 0$ (参阅 565 题),

所以当 x 充分大以后有$\dfrac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} < 1.$

即 $\ln^{1000} x < \sqrt{x}.$

(3) 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{10}e^x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x} = 0$,

所以当 x 充分大以后,有$\dfrac{x^{10}e^x}{e^{2x}} < 1$,即 $x^{10}e^x < e^{2x}.$

【652.1】 当 $x \to +\infty$ 时,证明渐近公式

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

证 因为

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + px + q} - \left(x + \frac{p}{2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)x}{\sqrt{x^2 + px + q} + x + \frac{p}{2}} = \frac{q - \frac{p^2}{4}}{2},$$

即　$$\sqrt{x^2+px+q}-\left(x+\frac{p}{2}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right).$$

所以　$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

【653】 设 $x\to 0$，选出以下函数的形同 Cx^n（C— 常数）的主部，并求对于无穷小变数 x 的阶：

(1) $2x-3x^3+x^5$；　　(2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$；

(3) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$；　　(4) $\tan x-\sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$，即满足

$$f(x)=g(x)+o(x)\qquad(x\to 0),$$

或　$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

(1) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3+x^5}{2x}=1,$$

故其主部为 $2x$，它对无穷小 x 是一阶的.

(2) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}},$$

$$=1$$

故其主部为 x，它对于 x 是一阶的.

(3) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-8x^3}{\frac{x^2}{2}\left(\sqrt[6]{(1-2x)^{15}}+\sqrt[6]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(1-3x)^{10}}\right)}$$

$$=1,$$

所以其主部为 $\frac{x^2}{2}$，它对于 x 是二阶的.

(4) 因为 $\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)=\frac{2}{\cos x}\sin x\sin^2\frac{x}{2}$,

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos x}\cdot\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^3}{2}}=1,$$

故其主部为$\frac{x^3}{2}$,它对于 x 是三阶的.

【654】 假设 $x\to+0$,证明:无穷小

(1) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$; (2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

对任何的 n,都不能与无穷小 $x^n(n>0)$ 相比较,即对任何的 n,等式 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{x^n}=k$ 不成立,式中 k 为非零的有限数.

证 (1) 由 592 题的结果有

$$\lim_{x\to+0}x^n\ln x=0\qquad(n>0).$$

于是 $$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\ln x}}{x^n}=\infty,$$

即$\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较$(x\to+0)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{e^t}=0$,

所以 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小 x^n 相比较$(x\to+0)$.

【655】 设 $x\to 1$,选出以下函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部,并求出其对于无穷小$(x-1)$ 的阶:

(1) x^3-3x+2; (2) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

(3) $\ln x$; (4) e^x-e;

(5) x^x-1.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{3(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{3(x-1)^2}=1,$$

所以其主部为 $3(x-1)^2$，对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小.

(2) 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)^{\frac{1}{3}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}=1,$$

故其主部为 $-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}$，对于 $(x-1)$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=1$,

故其主部为 $x-1$，对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=e$,

故其主部为 $e(x-1)$，对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

(5) 因为 $x^x-1=e^{x\ln x}-1$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln[1+(x-1)]}{x-1}=1,$$

故其主部为 $x-1$，对于 $x-1$ 是一阶无穷小.

【656】 设 $x\to+\infty$，选出以下函数的形如 Cx^n 的主部，并求出其对于无穷大 x 的阶：

(1) $x^2+100x+10000$；　(2) $\frac{2x^5}{x^3-3x+1}$；

(3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$；　(4) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+100x+10000}{x^2}=1$,

所以其主部为 x^2，它对于无穷大 x 是二阶的.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^5}{x^3-3x+1}}{2x^2}=1$,

故其主部为 $2x^2$，它对于无穷大 x 是二阶的.

(3) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)=1,$$

故其主部为 $x^{\frac{2}{3}}$，它对于无穷大 x 是一阶的.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=1$，

故其主部为$\sqrt[8]{x}$，它对于无穷大 x 是$\dfrac{1}{8}$ 阶的.

【657】 令$x\to+\infty$，请选出以下函数的形如$C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$的主部，并求出其对于无穷小$\dfrac{1}{x}$ 的无穷小的阶：

(1) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$；　(2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$；

(3) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$；　(4) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x+1}{x^4+1}}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^3}{x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^4}}=1,$$

故其主部为$\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$，它对于无穷小$\dfrac{1}{x}$ 是三阶的.

(2) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=1,$$

故其主部为$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$，它对于无穷小$\dfrac{1}{x}$ 是$\dfrac{1}{2}$ 阶的.

(3) 因为

$$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})},$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}=1,$$

故其主部为 $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{3}{2}$ 阶的.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$,

故其主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^{2}$，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是二阶的.

【658】 令 $x\to1$，请选出以下函数的形如 $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^{n}$ 的主部，并确定其对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶：

(1) $\dfrac{x^{2}}{x^{2}-1}$； (2) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(3) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^{3}}}$； (4) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$；

(5) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^{2}}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{x^{2}}{x^{2}-1}}{\frac{1}{2(x-1)}}=\lim_{x\to1}\frac{2x^{2}}{x+1}=1,$$

故其主部为 $\frac{1}{2(x-1)}$，它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

(2) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}}{2}=1,$$

故其主部为$\sqrt{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷大$\frac{1}{x-1}$是$\frac{1}{2}$阶的.

(3) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{1-x}}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{3}x}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}=1,$$

故其主部为$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$,它对于无穷大$\frac{1}{x-1}$是$\frac{1}{3}$阶的.

(4) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sin\pi x}}{\frac{1}{\pi(1-x)}}=\lim_{x\to1}\frac{\pi(1-x)}{\sin\pi(-x)}=1,$$

故其主部为$\frac{1}{\pi(1-x)}$,它对于无穷大$\frac{1}{x-1}$是1阶的.

(5) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=1,$$

故其主部为$\frac{1}{x-1}$,它对于无穷大$\frac{1}{x-1}$是一阶的.

【659】 设$x\to+\infty$且$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$,证明:(1) $f_n(x)$中的每个函数都比其前一个函数$f_{n-1}(x)$增加得快;(2) 函数e^x比函数$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$中的每个函数都增加得快.

证 (1) 因为$\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=x\to+\infty\qquad(x\to+\infty)$,

所以 $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加较快.

(2) 因为对任一固定的 n. $\frac{e^x}{x^n}\to+\infty(x\to+\infty)$，所以，$e^x$ 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得较快.

【660】 假设 $x\to+\infty$ 且 $f_n(x)=\sqrt[n]{x}(n=1,2,\cdots)$

证明：

(1) 函数 $f_n(x)$ 中的每个函数都比其前一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得慢；

(2) 函数 $f(x)=\ln x$ 比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每个函数都增加得慢.

证 (1) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n-1]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{n(n-1)}}}=0,$$

所以 $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为对任一固定的 n，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=0$，

所以，$\ln x$ 比 $f_n(x)$ 增加得较慢.

【661】 证明：对于任意的函数序列

$$f_1(x),f_2(x)\cdots f_n(x),\cdots\qquad(x_0<x<+\infty)$$

都可以举出一个函数 $f(x)$，当 $x\to+\infty$ 时它比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每个函数都增加得快.

证 取正整数 $N>x_0$ 定义 $x_0<x<+\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|+1\right), & \text{当 } n\leqslant x<n+1\text{ 时，}\\ & (n=N,N+1,\cdots)\\ 0, & \text{当 } x_0<x<N\text{ 时.}\end{cases}$$

于是，对任何正整数 n，当 $x>\max\{N,n\}$ 时，有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x)|}{[x](\sum_{k=1}^{[x]}|f_k(x)|+1)} < \frac{1}{[x]},$$

其中$[x]$表x的整数部分.因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)} = 0 \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

即当$x\to+\infty$时,$f(x)$比$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

§7. 函数的连续性

1. 函数的连续性

设$\lim\limits_{x\to 0}f(x) = f(x_0)$ ①

亦即函数$f(x)$在$x=x_0$有定义,若对于每个$\varepsilon>0$,都存在$\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时,对于$f(x)$有意义的所有值,不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

都成立,则称函数$f(x)$当$x=x_0$时(或在点x_0)为连续的.

如果函数$f(x)$在集X的每一点上都是连续的,则称函数$f(x)$在已知集$X=\{x\}$(开区间、闭区间,等等)上是连续的.

如果$x=x_0$是属于函数$f(x)$定义域$X=\{x\}$的某个值或者是此集的聚点,等式①不成立,也就是说,或者(1):数$f(x_0)$不存在,换言之,函数在点$x=x_0$没有定义;或者(2):$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;或者(3):公式①的两端存在,但它们不相等,则x_0称作函数$f(x)$的不连续点.

不连续点分为:(1)第一类不连续点x_0,对于这类点存在单侧有限极限:$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$和$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$

(2)第二类不连续点——其他的一切不连续点.

$f(x_0+0)-f(x_0-0)$之差称为函数在点x_0的跳跃.

如果等式

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

成立,则不连续点 x_0 称作可去点,如果极限 $f(x_0-0)$ 或 $f(x_0+0)$ 中至少有一个等于 ∞,则 x_0 被称为无穷不连续点.

如果等式:

$$f(x_0-0)=f(x_0)\qquad(\text{或者 } f(x_0+0)=f(x_0))$$

则称函数 $f(x_0)$ 在 x_0 点是左侧(右侧)连续. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的,充要条件是下面三个数相等:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2. 初等函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,则函数

(1) $f(x)\pm g(x)$;　　(2) $f(x)g(x)$;

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}[g(x_0)\neq 0]$

在 $x=x_0$ 时也是连续的.

特别是:(1) 多项式函数

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

对任何 x 都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m},$$

对使分母非零的所有 x 也是连续的.

一般来说, 基本初等函数:$x^n,\sin x,\cos x,\tan x,a^x,\log_a x$, $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\cdots$ 在所有有定义的点上都是连续的.

较普遍的结果是:如果函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的,而函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时是连续的,则函数 $g(f(x))$ 在 $x=x_0$ 时也是连续的.

3. 连续函数的基本定理:

如果函数 $f(x)$ 在有限的闭区间$[a,b]$上是连续的,则:

(1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间上有界;

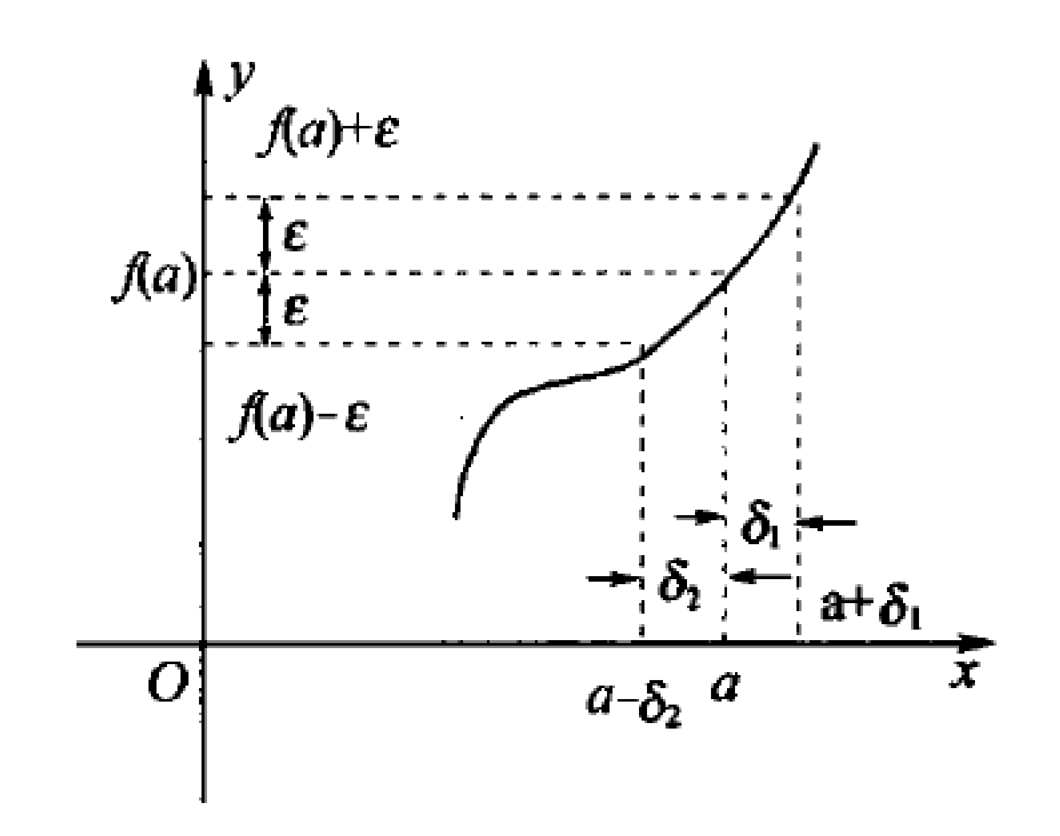
(2) 它能达到其下确界 m 和上确界 M(维尔斯特拉斯定理);

(3) 在每个区间$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$内，函数具有介于$f(\alpha)$和$f(\beta)$之间的所有中间值(柯西定理).

特别是，如果$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$，则能找到一个数值$\gamma(\alpha<\gamma<\beta)$，使得$f(\gamma)=0$.

【662】 已给出连续函数$y=f(x)$的图形. 对于给定点a和给定数$\varepsilon>0$，用几何方法表示出这样的数$\delta>0$，使得当$|x-a|<\delta$时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

解 如662题图所示.



662 题图

$\delta_1<\delta_2$，取$\delta=\delta_1$，于是当$|x-a|<\delta$时，

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

【663】 要求制作一个边长$x_0=10$厘米的金属正方形薄板. 如果要其面积$y=x^2$与预计的$y_0=100$平方厘米的差不超过(1) ±1平方厘米；(2) ±0.1平方厘米；(3) ±0.01平方厘米；(4) $\pm\varepsilon$平方厘米，问该薄板的边长x允许在什么范围内变动?

解 (1) 要使$|x^2-100|<1$，

只要 $99<x^2<101$，

解之得 $9.95<x<10.05$.

(2) 要$|x^2-100|<0.1$，

只要 $\sqrt{100-0.1}<x\sqrt{100+0.1}$，

解之得 $9.995<x<10.005$.

(3) 要$|x^2-100|<0.001$，

只要 $\sqrt{100-0.01}<x<\sqrt{100+0.01}$,

解之得 $9.9995<x<10.0005$.

(4) 要 $|x^2-100|<\varepsilon$,

只要 $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$.

【664】 立方体的边长在2米和3米之间,为了在计算此立方体的体积时其绝对误差不超过 ε 立方米,设:(1) $\varepsilon=0.1$ 立方米;(2) $\varepsilon=0.01$ 立方米;(3) $\varepsilon=0.001$ 立方米,问测量此立方体的边长 x 时,允许有怎样的绝对误差 Δ?

解 要 $|x_1^3-x_2^3|<\varepsilon$,

只要 $|x_1-x_2|(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<\varepsilon$,

注意 $2\leqslant x_1\leqslant 3, 2\leqslant x_2\leqslant 3$,

故只要 $|x_1-x_2|<\dfrac{\varepsilon}{3\times 3^2}=\dfrac{\varepsilon}{27}$,

就有 $|x_1^3-x_2^3|<\varepsilon$,

因此 (1) $\Delta<\dfrac{0.1}{27}$(米) $=3.7$(毫米),

(2) $\Delta<\dfrac{0.01}{27}$(米) $=0.37$(毫米),

(3) $\Delta<\dfrac{0.001}{27}$(米) $=0.037$(毫米).

【665】 在 $x_0=100$ 的点的邻域内要使函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形的纵坐标与 $y_0=10$ 纵坐标之差小于 $\varepsilon=10^{-n}(n\geqslant 0)$,该邻域最大是多少?确定当 $n=0,1,2,3$ 时此邻域的大小.

解 要 $|\sqrt{x}-10|<10^{-n}$,

只要 $10[1-10^{-(n+1)}]^2<\sqrt{x}<10[1+10^{-(n+1)}]$,

即 $100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2$.

故得(1) 当 $n=0$ 时, $81<x<121$,

(2) 当 $n=1$ 时, $98.01<x<102.01$,

(3) 当 $n=2$ 时, $99.8001<x<100.2001$,

(4) 当 $n=3$ 时, $99.980001<x<100.020001$.

【666】 采用“ε-δ”论证法证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=5$ 时是连续的. 填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	…
δ					

证 任给 $\varepsilon>0$. 要使 $|x^2-25|<\varepsilon$，只要

$$|x-5||x+5|<\varepsilon,$$

不妨设 $|x-5|<1$，即 $4<x<6$，

从而 $9<x+5<11$.

于是只要 $|x-5|<\dfrac{\varepsilon}{11}$，

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{11},1\right\}$，则当 $|x-5|<\delta$ 时，恒有

$$|x^2-25|<\varepsilon,$$

即 $y=x^2$ 在 $x=5$ 处连续.

填下表

ε	1	0.1	0.01	0.001	…
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	…

【667】 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 和 $\varepsilon=0.001$. 对于数值 $x_0=0.1$；0.01；0.001；… 求出充分大的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$，使得能从不等式 $|x-x_0|<\delta$ 推出不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

能否对已知的 $\varepsilon=0.001$ 选出 $\delta>0$ 来，使其对于区间 $(0,1)$ 内的所有 x_0 值都适用，亦即使得任何值 $x_0\in(0,1)$，若

$$|x-x_0|<\delta,$$

则 $f(x)-f(x_0)<\varepsilon$?

解 $$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}. \qquad (1)$$

由于 $|x_0|-|x|\leqslant|x-x_0|$，

不妨设 $|x_0|>|x-x_0|$,

则 $|x|\geqslant|x_0|-|x-x_0|>0$,

故有 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\dfrac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}$.

于是要 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,只要

$$\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}<\varepsilon,$$

即只要 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon|x_0|^2}{1+\varepsilon|x_0|}$,

取 $\delta<\dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}>0$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

我们可取

$$\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{2}=0.0005x_0^2<\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|},$$

当 $x_0=0.1$ 时,$\delta=5\times10^{-6}$.

当 $x_0=0.01$ 时,$\delta=5\times10^{-8}$.

当 $x_0=0.001$ 时,$\delta=5\times10^{-10}$.

由表达式(1)知,对于无论怎样小的 δ(固定),则当

$$|x-x_0|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

及 $x_0\to0$ 时,$|f(x)-f(x_0)|$ 可任意地大.因此,无法选出一个公共的正数 δ 来.

【668】 用"ε-δ"语言表述法,在肯定的意义上表达以下论断:函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,但在这一点是不连续的.

解 存在一个 $\varepsilon_0>0$,对于无论怎样小的 $\delta>0$,都有某一 x 满足 $|x-x_0|<\delta$,但 $|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$.

【669】 如果仅仅是设对于某些数 $\varepsilon>0$,能找到相对应的数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,则要 $|x-x_0|<\delta$,则有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

如果:(1) 诸数 ε 形成一个有穷集;(2) 诸数 ε 形成分数 $\varepsilon=$

$\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$的无穷集. 能否确定函数 $f(x)$ 在点 x_0 是连续的?

解 (1) 不能. 因为 ε 不能任意地小.

(2) 能. 事实上,对于任给的 $\varepsilon>0$,总可以取充分大的 n,使 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 于是,存在 $\delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

【670】 假设已知函数 $f(x)=x+0.001[x]$

证明:对于每个 $\varepsilon>0.001$,能选出 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$,使得只要 $|x'-x|<\delta$,则 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.

而对于 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$,这种情况对于所有的值 x 都不行.

在哪些点上破坏了这个函数的连续性?

证 当 $\varepsilon>0.001$,且 $|x'-x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}&|f(x')-f(x)|\\&=|x'-x+0.001([x']-[x])|\\&\leqslant|x'-x|+0.001.\end{aligned}$$

此时只要取 $\delta=\min\{\varepsilon-0.001,1\}$,则当 $|x-x'|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 当 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$,且 x_0 不为整数时,存在整数 n,使得 $n<x_0<n+1$,只要取 $\delta=\min\{x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon\}>0$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $[x]=[x_0]$,从而

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当 $x_0=n$(n 为整数)时,则对于无论怎样选取的正数 δ,总有 x 满足 $x<x_0$,及 $x_0-x<\delta$,但

$$[x_0]-[x]=1,$$

所以 $\quad |f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$

于是,函数 $f(x)$ 在点 $x=n$(整数)失去了连续性.

【671】 设对于每个充分小的数 $\delta>0$,都存在

$$\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$$

使得:若 $|x-x_0|<\delta$

则不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立.

由此能否得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时是连续的?用已知的不等式能说明函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能,因为 ε 是由 δ 所确定的,它不能任意小.不等式只能说明在 x_0 的 δ 邻域内,$f(x)$ 有界.事实上,$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+\varepsilon$.

【672】 假设对于每个数 $\varepsilon>0$,都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使得如果 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则 $|x-x_0|<\delta$

由此能否得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时是连续的?这些不等式说明函数的什么性质?

解 不能.它只能说明落在开区间 $(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ 内的函数值都是由开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的点映过来的.事实上设 R 为 $f(x)$ 的值域.则由题中条件

$$f(x_0-\delta,x_0+\delta)\supset(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)\cap R.$$

故 $f(x)$ 的逆函数 $f^{-1}(y)$ 在 $f(x_0)$ 的充分小邻域内是单值且有界的.

【673】 假设对于每个数 $\delta>0$,都存在数 $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$,使得如果 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则 $|x-x_0|<\delta$.

由此是否得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时是连续的?已知的不等式说明函数的什么性质?

研究下题:

$$f(x)=\begin{cases}\arctan x, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ \pi-\arctan x, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

解 不能.它只能说明反函数的连续性和单值性.

【674】 用"$\varepsilon-\delta$"论证法,证明以下函数的连续性:

(1) $ax+b$;　　(2) x^2;

(3) x^3;　　(4) $\sqrt{x}$;

(5) $\sqrt[3]{x}$;　　(6) $\sin x$;

(7) $\cos x$;　　(8) $\arctan x$.

证 (1) 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,对任给的 $\varepsilon>0$,要使

$$|(ax+b)-(ax_0+b)|=|a||x-x_0|<\varepsilon.$$

只要 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}$,

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon.$$

即 $ax+b$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性,知 $ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内点点连续.

(2) $|x^2-x_0^2|=|x-x_0|\cdot|x+x_0|$.

不妨设 $|x-x_0|<1$,

则 $|x|<|x_0|+1$.

所以 $|x^2-x_0^2|\leqslant(2|x_0|+1)|x-x_0|$,

对任给的 $\varepsilon>0$,要使 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$,

只需 $|x-x_0|<1$,

且 $(2|x_0|+1)|x-x_0|<\varepsilon$,

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1},1\right\}$,

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|x^2-x_0^2|<\varepsilon.$$

所以 x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(3) 由于

$$|x^3-x_0^3|=|x-x_0||x^2+x_0x+x_0^2|$$
$$\leqslant|x-x_0|(|x|^2+|x_0||x|+|x_0|^2).$$

不妨设 $|x-x_0|<1$,

则 $|x|<|x_0|+1$,

所以 $|x^3-x_0^3|<|x-x_0|(1+3|x_0|+3|x_0|^2)$,

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3|x_0|^2}\}$,

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|x^3-x_0^3|<\varepsilon$,

因此 x^3 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(4) 设 $x_0\in(0,+\infty)$，由于

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

对任给的 $\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon,$$

所以，$\sqrt{x}$ 在 $x_0(x_0>0)$ 连续.

若 $x_0=0$，则要使 $|\sqrt{x}-\sqrt{0}|=\sqrt{x}<\varepsilon$，

只须 $0<x<\varepsilon^2$，取 $\delta=\varepsilon^2$，则当 $0<x<\delta$ 时，$|\sqrt{x}-\sqrt{0}|<\varepsilon$.

因此 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$ 内连续.

(5) 由于

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{|x^{\frac{2}{3}}+(x\cdot x_0)^{\frac{1}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}|}$$

$$<\frac{|x-x_0|}{x_0^{\frac{2}{3}}}\qquad(x_0\neq 0,xx_0>0),$$

取 $\qquad\delta=\min\{|x_0|,\varepsilon\sqrt[3]{x_0^2}\}$.

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|<\varepsilon$.

若 $x_0=0$，则取 $\delta=\varepsilon^3$，因此$\sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(6) 由于

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant|x-x_0|,$$

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$ 即可. 因此 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(7) 由于

$$|\cos x-\cos x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|,$$

$$\leqslant|x-x_0|.$$

对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$ 即可. 因此 $\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(8) 当 $x_0=0$ 时，$|\arctan x-\arctan 0|=|\arctan x|$

而当 $|y|<\frac{\pi}{2}$ 时，$|y|\leqslant|\tan y|$，

故 $$|\arctan x|\leqslant|x|,$$

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$ 即可，当 $x_0\neq 0$ 时. 不妨设 $|x-x_0|<|x_0|$，由于

$$\begin{aligned}&|\arctan x-\arctan x_0|\\&=\left|\arctan\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right|\leqslant\left|\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right|<|x-x_0|,\end{aligned}$$

(最后一个不等式是因为 $x\cdot x_0>0$)，所以取

$$\delta=\min\{|x_0|,\varepsilon\}.$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\arctan x-\arctan x_0|<\varepsilon,$$

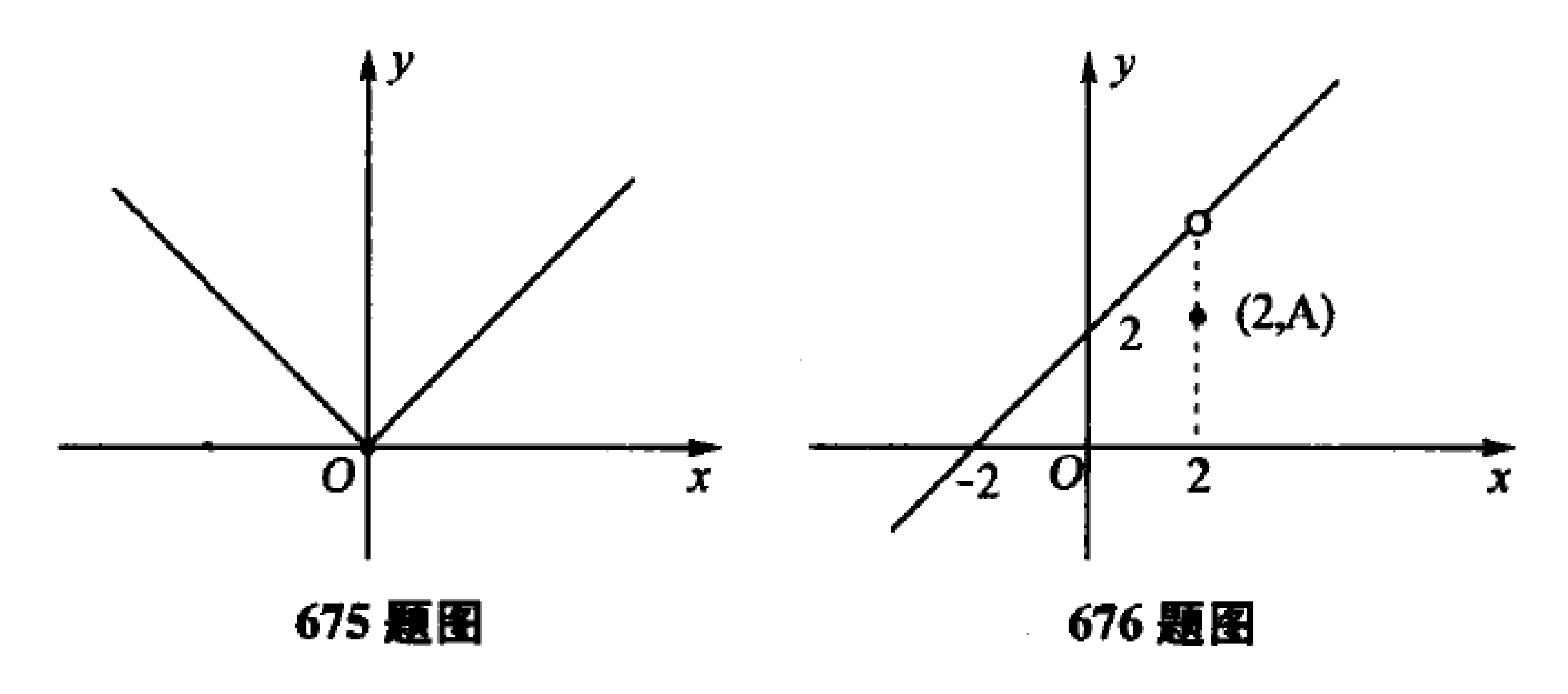
因此 $\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

研究下列函数的连续性并作出其图形(675 ~ 686).

【675】 $f(x)=|x|$.

解 因为 $\big||x|-|x_0|\big|\leqslant|x-x_0|$，因此，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，即可证得 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

如 675 题图所示.



675 题图　　676 题图

【676】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & 若\ x\neq 2,\\ A, & 若\ x=2.\end{cases}$

解 因为$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$，

所以当$A=4$时，$f(x)$在点$x=2$处连续；而当$A\neq 4$时，$f(x)$在点$x=2$处不连续；而当$x\neq 2$时，

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x-2.$$

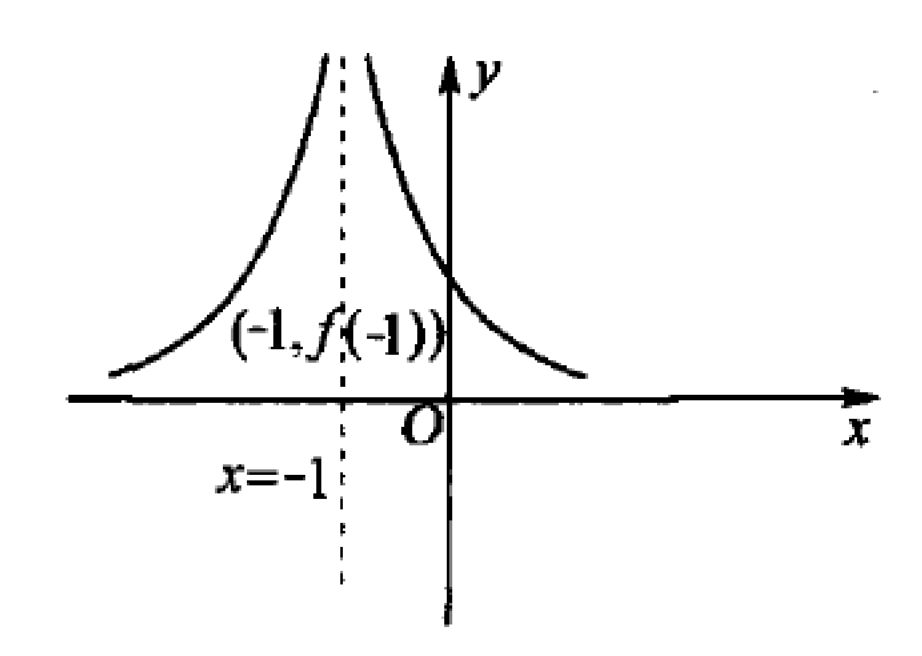
所以$f(x)$连续. 如676题图所示.

【677】 若：$x\neq -1$时$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，而$f(-1)$是任意的.

解 因为$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$.

故函数$f(x)$在点$x=-1$处不连续.

在$x\neq -1$处，函数连续，如677题图.



677 题图

【678】 (1) 若$x\neq 0$时$f_1(x)=\left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$，而$f_1(0)=1$；

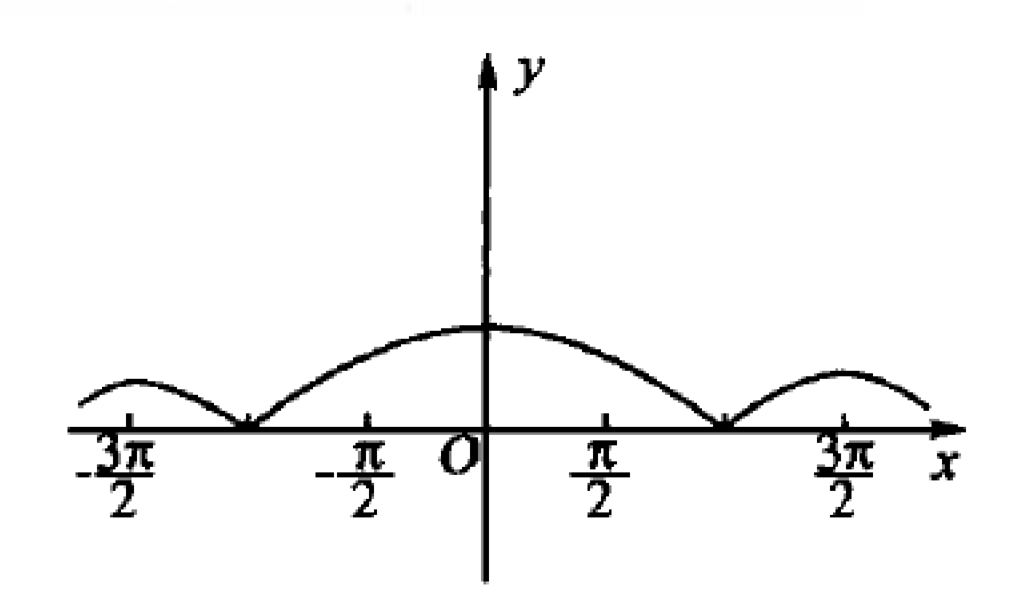
若$x\neq 0$时$f_2(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$，而$f_2(0)=1$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to 0}f_1(x)=1=f_1(0)$，

所以$f_1(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，如678题图1所示.

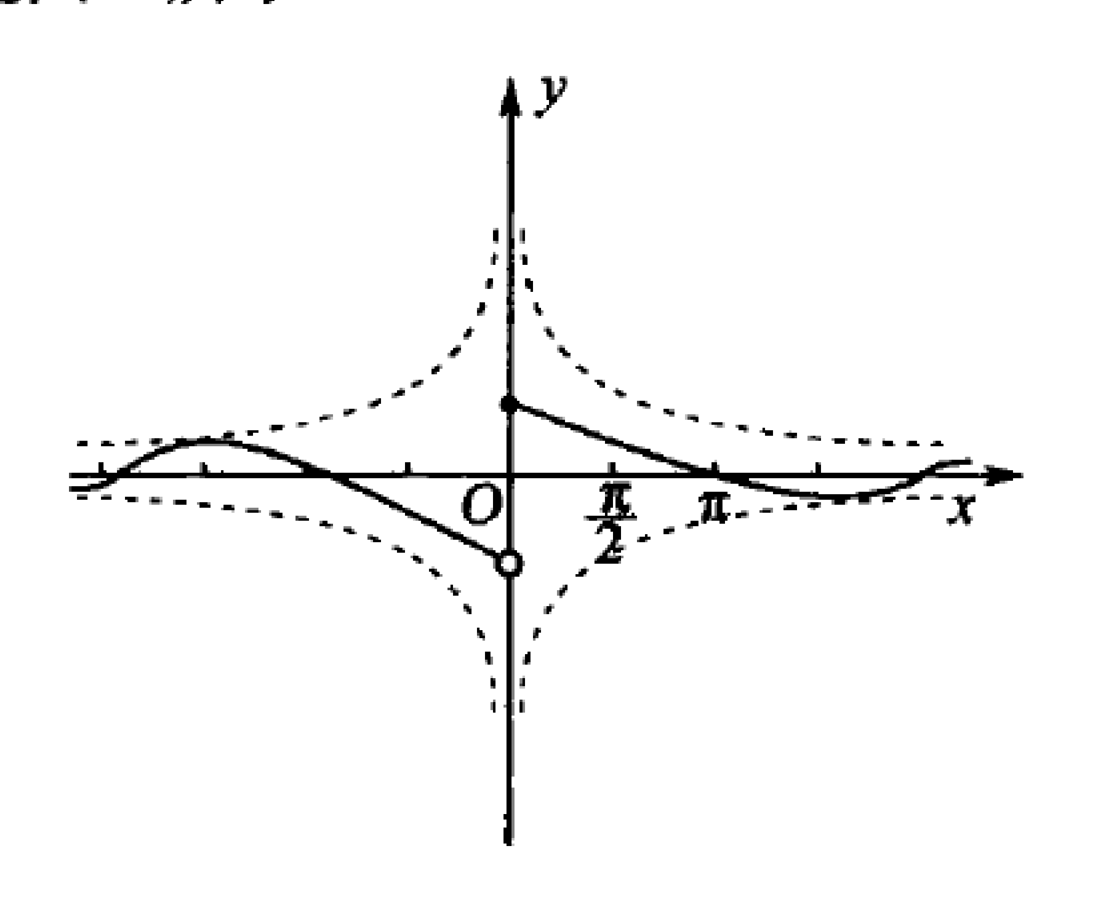
(2) 因为$\lim\limits_{x\to +0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

$$\lim_{x\to -0}f_2(x)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{-x}=-1,$$



678 题图 1

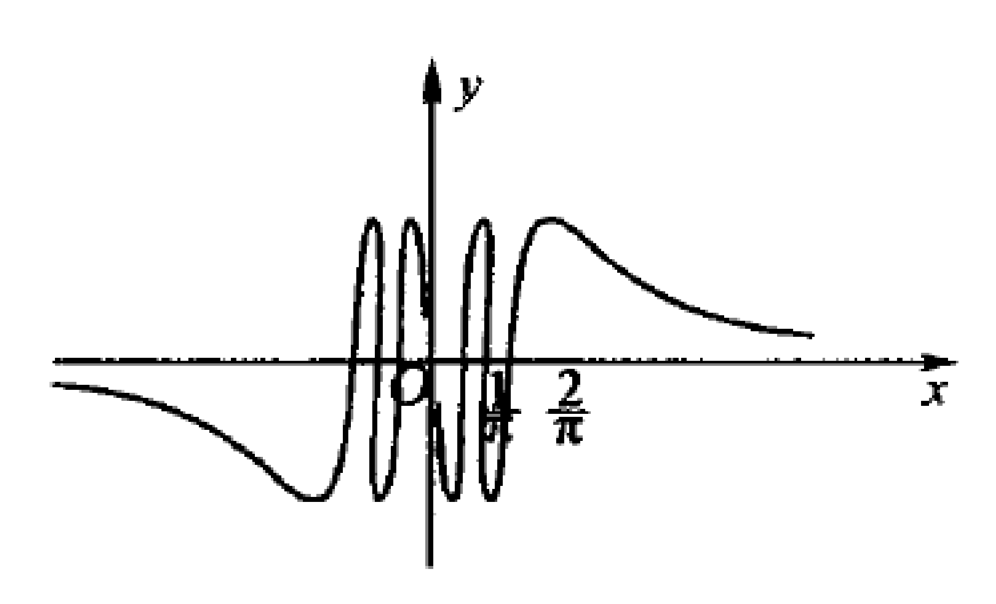
所以$\lim\limits_{x\to 0}f_2(x)$不存在. 因此 $f_2(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,其余各点均连续. 如 678 题图 2 所示.



678 题图 2

【679】 若 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,而 $f(0)$ 是任意的.

解 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 连续,而在点 $x=0$ 处,$f(x)$ 不连续(因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称. 如 679 题图所示.

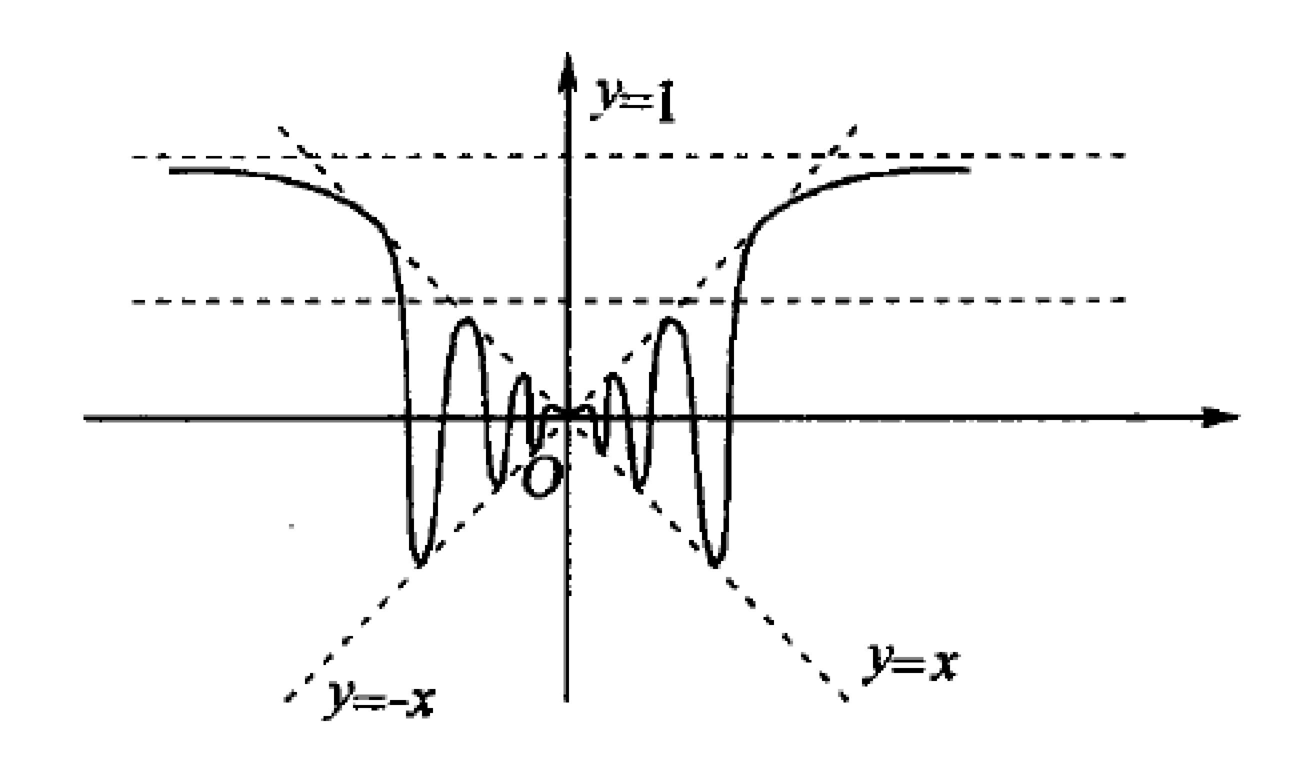


679 题图

【680】　若 $x \neq 0$ 时 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$，而 $f(0) = 0$.

解　$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 图形关于 Oy 轴对称. 如 680 题图所示.

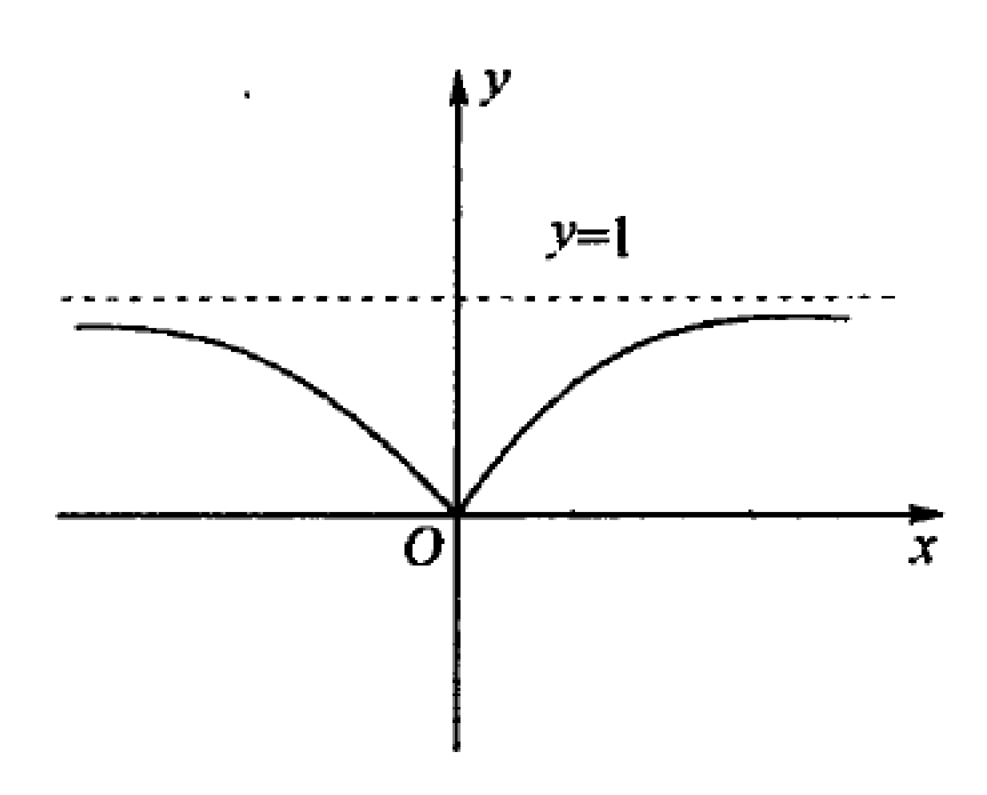


680 题图

【681】　若 $x \neq 0$ 时 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$，而 $f(0) = 0$.

解　$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 如 681 题图所示，图形关于 Oy 轴对称.



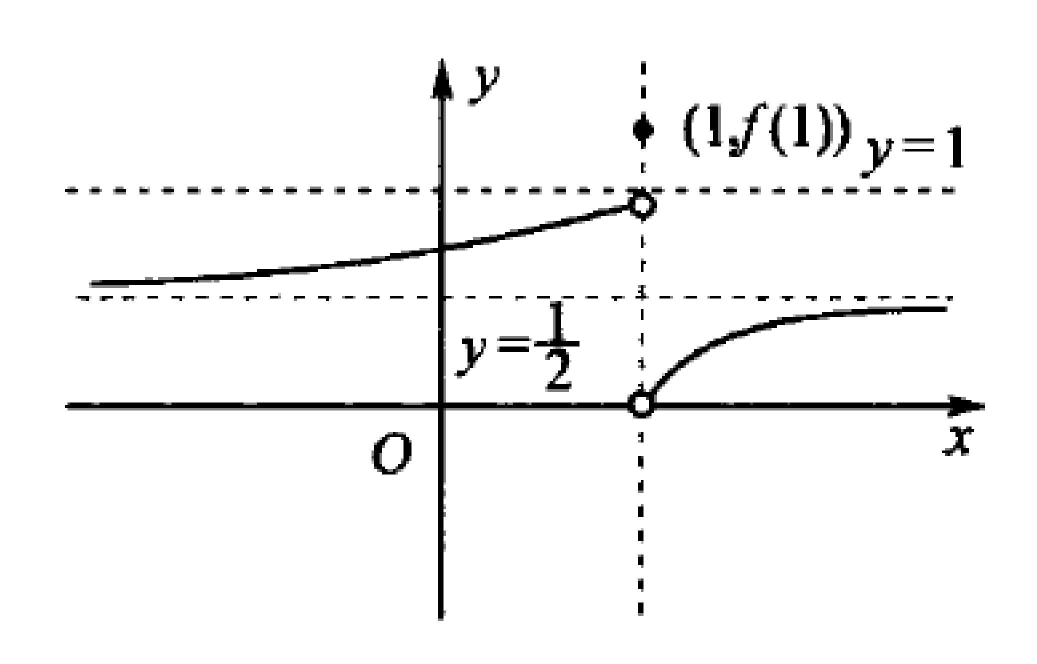
681 题图

【682】　若 $x \neq 1$ 时 $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$，而 $f(1)$ 是任意的.

解　因为

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1-0} f(x)=1,$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续，在 $x\neq 1$ 处，$f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$，如 682 题图所示.



682 题图

【683】 若：$x\neq 0$ 时 $f(x)=x\ln x^2$，而 $f(0)=a$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2=0$，

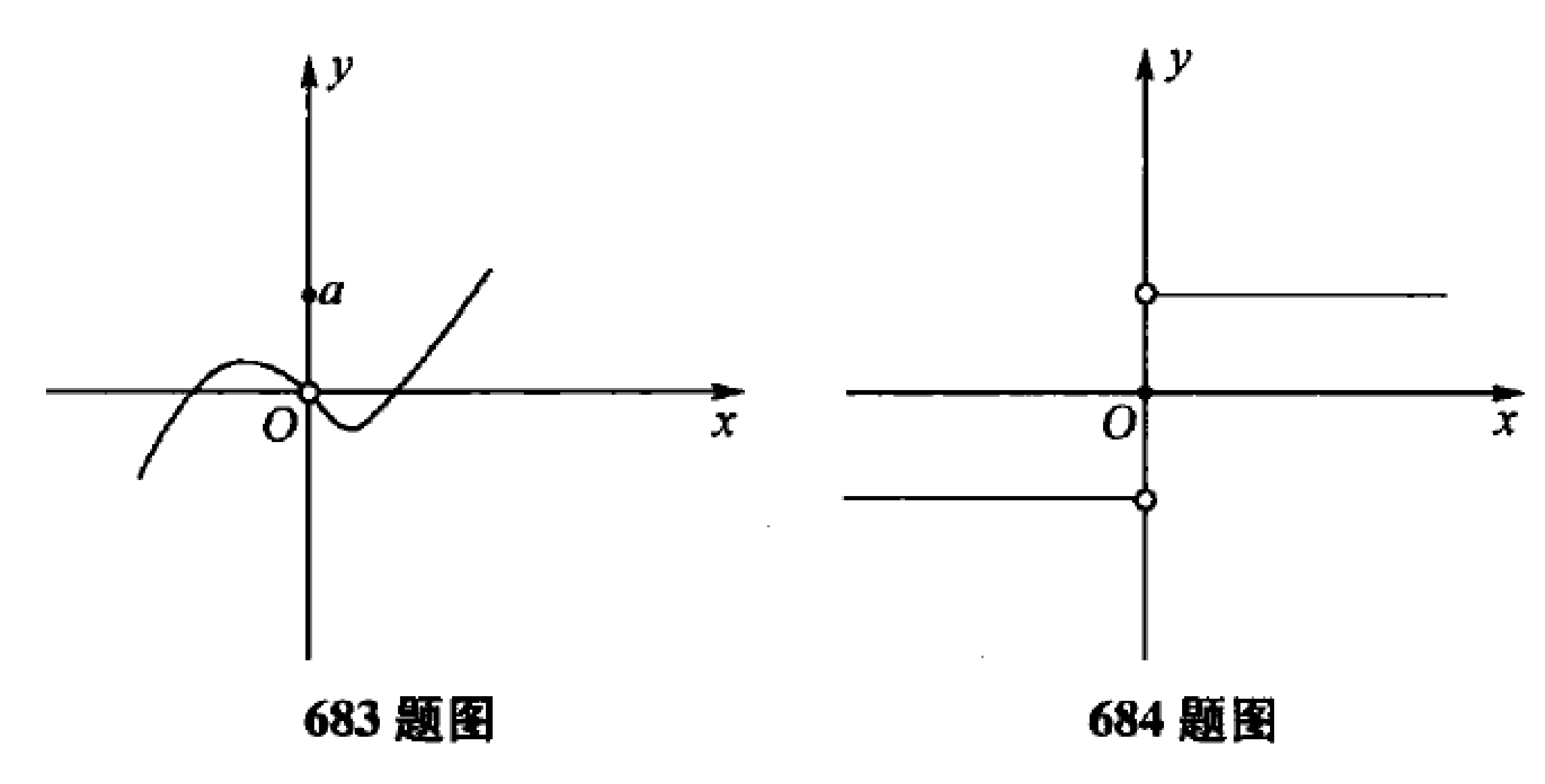
当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续；

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 在其他点连续. 如 683 题图所示.

【684】 $f(x)=\operatorname{sgn}x$.

解 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 而在其他点均连续. 如 684 题图所示.

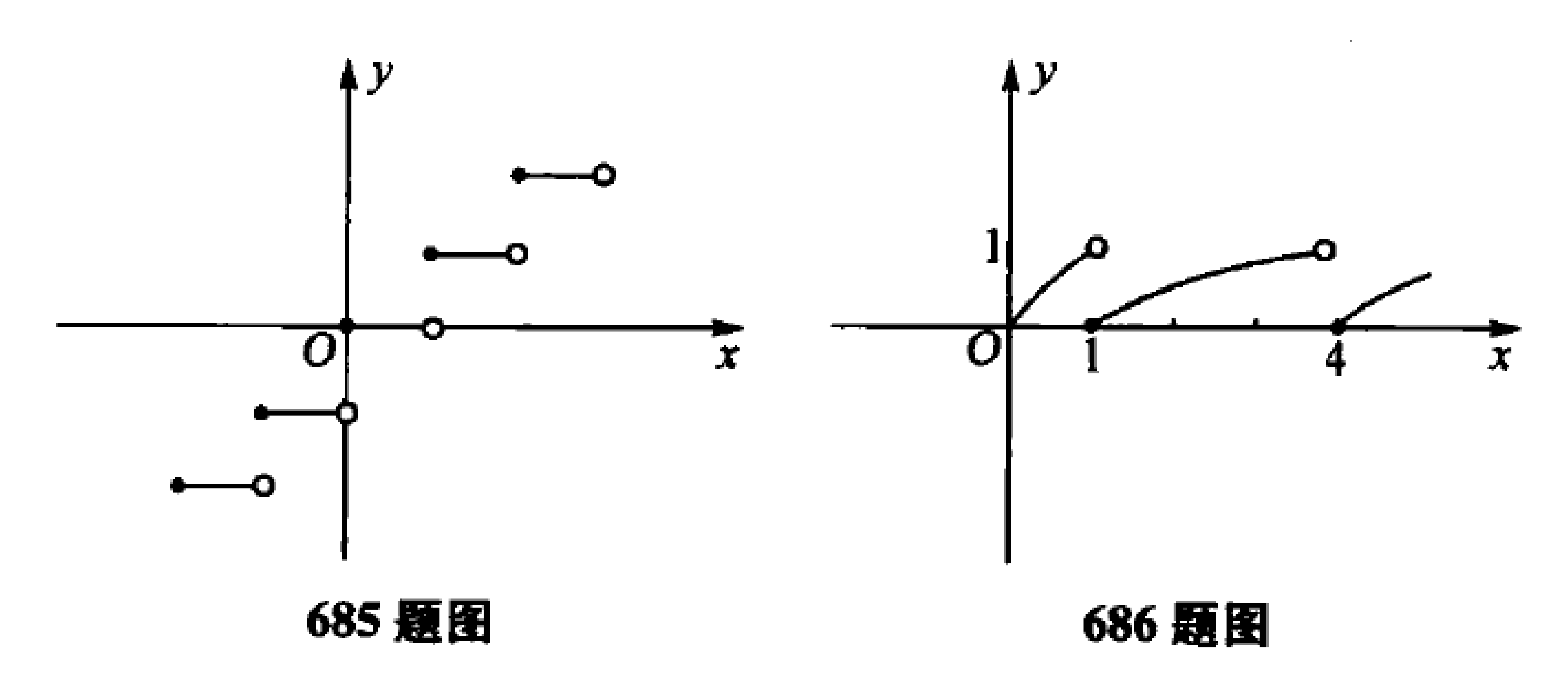


683 题图　　　　684 题图

【685】 $f(x)=[x]$.

解　当 $x=k$(k 为整数时),$f(x)$ 不连续而在其它点,$f(x)$ 均连续.

如 685 题图所示.



685 题图　　686 题图

【686】 $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

解　当 $k^2\leqslant x<(k+1)^2$ 时,

$$f(x)=\sqrt{x}-k,$$

$$\lim_{x\to(k+1)-0}f(x)=1.$$

而
$$f[(k+1)^2]=0,$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=(k+1)^2$ 处不连续($k=0,1,2,\cdots$). 而在$[0,+\infty)$ 内的其它点均连续. 如 686 题图所示.

确定下列函数的不连续点,并研究这些点的性质(687 ~ 700).

【687】 $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

解　$x=-1$ 为无穷型不连续点.

【688】 $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$,

故 $x=-1$ 为"可去"的不连续点也称"无变化的"不连续点.

【689】 $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

解 $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$,

$x=1$ 及 $x=-2$ 均为无穷型不连续点.

【690】 $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$; $\lim\limits_{x\to0}y=-1$; $\lim\limits_{x\to1}y=0$,

所以 $x=-1$ 为无穷型不连续点,而 $x=0$ 及 $x=1$ 为“可去”的不连续点.

【691】 $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\sin x}=\infty$($k$ 为不等零的整数),所以 $x=0$ 为可去的不连续点,而 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点.

【692】 $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

解 $$\lim_{x\to2}y=\lim_{x\to2}\sqrt{\frac{2\pi\sin^2\frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x)\cdot2(2+x)}}=0,$$

同理 $\lim\limits_{x\to-2}y=0$. 所以 $x=2$ 及 $x=-2$ 为可去的不连续点.

【693】 $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+0}y$ 及 $\lim\limits_{x\to-0}y$ 均不存在,故 $x=0$ 为第二类不连续点.

【694】 $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点. 而

$$\lim_{x\to\frac{1}{k}-0}y=(-1)^k,\ \lim_{x\to\frac{1}{k}+0}y=(-1)^{k+1},$$

故 $x=\frac{1}{k}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

【695】 $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

解 $x=\frac{2}{2k+1}\qquad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,

为可去的不连续点.

【696】 $y=\arctan\frac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to-0}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$,

故 $x=0$ 为第一类不连续点.

【697】 $y=\sqrt{x}\arctan\frac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\arctan\frac{1}{x}=0$,故 $x=0$ 为可去的不连续点.

【698】 $y=e^{\frac{x+1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{x+1}{x}}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{x+1}{x}}=0$,

所以,$x=0$ 为第二类不连续点.

【699】 $y=\frac{1}{\ln x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}=0$,

$\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1}{\ln x}=+\infty,\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{\ln x}=-\infty$,

所以 $x=0$ 为可去的不连续点,$x=1$ 为无穷型不连续点.

【700】 $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$，

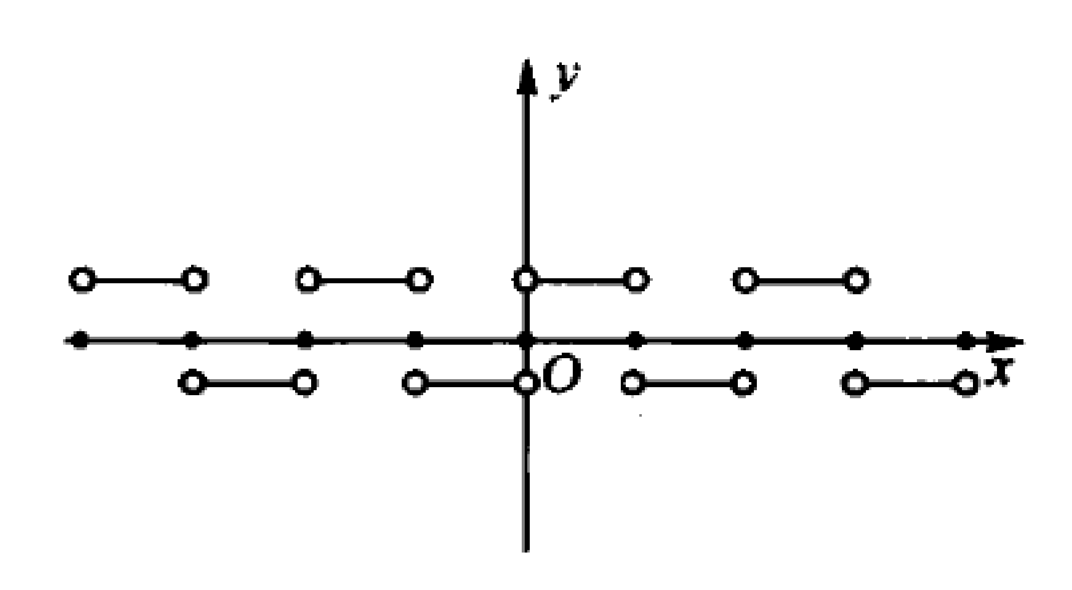
$\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-0}y=+\infty$，

故 $x=1$ 为第一类不连续点，而 $x=0$ 为无穷型不连续点.

研究以下函数的连续性，并画出其略图(701 ～ 719).

【701】 $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

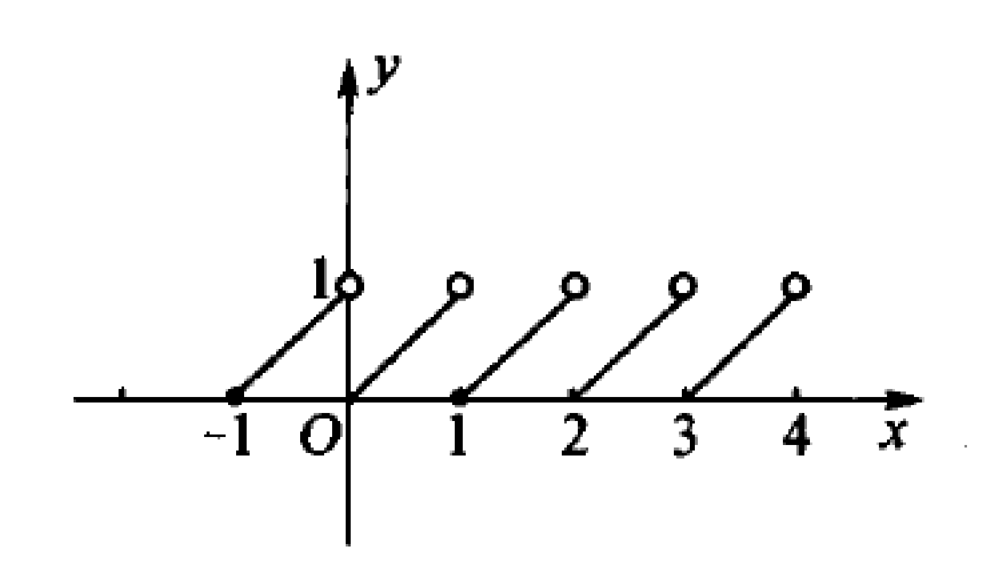
解 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点，如 701 题图所示.



701 题图

【702】 $y=x-[x]$.

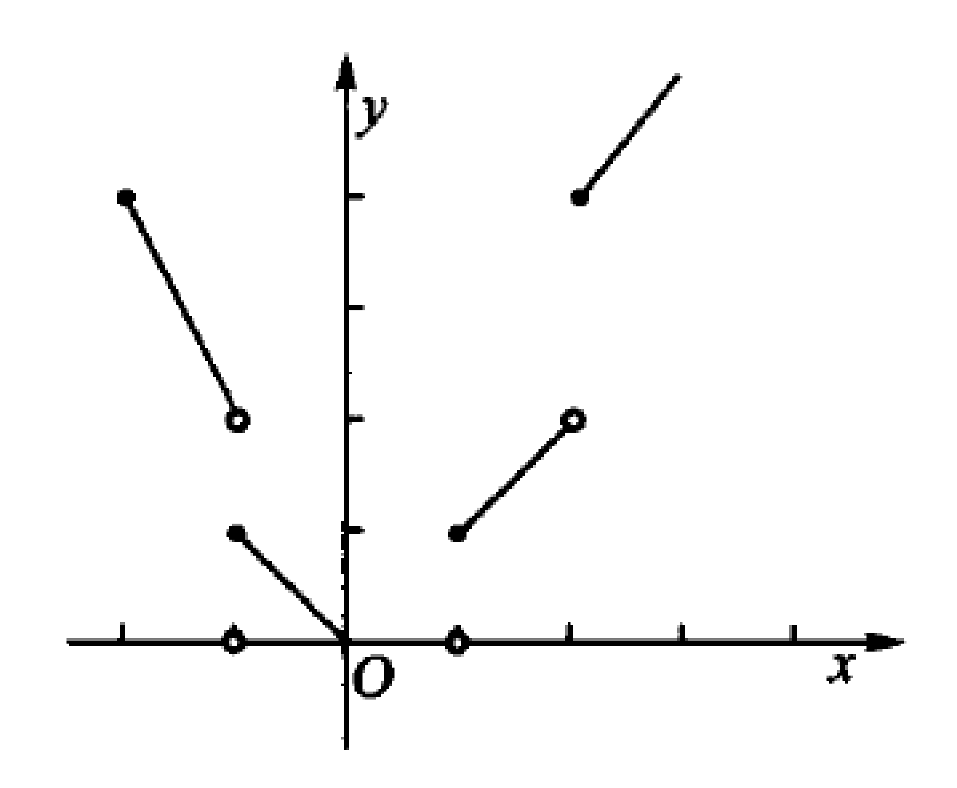
解 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点，如 702 题图所示.



702 题图

【703】 $y=x[x]$.

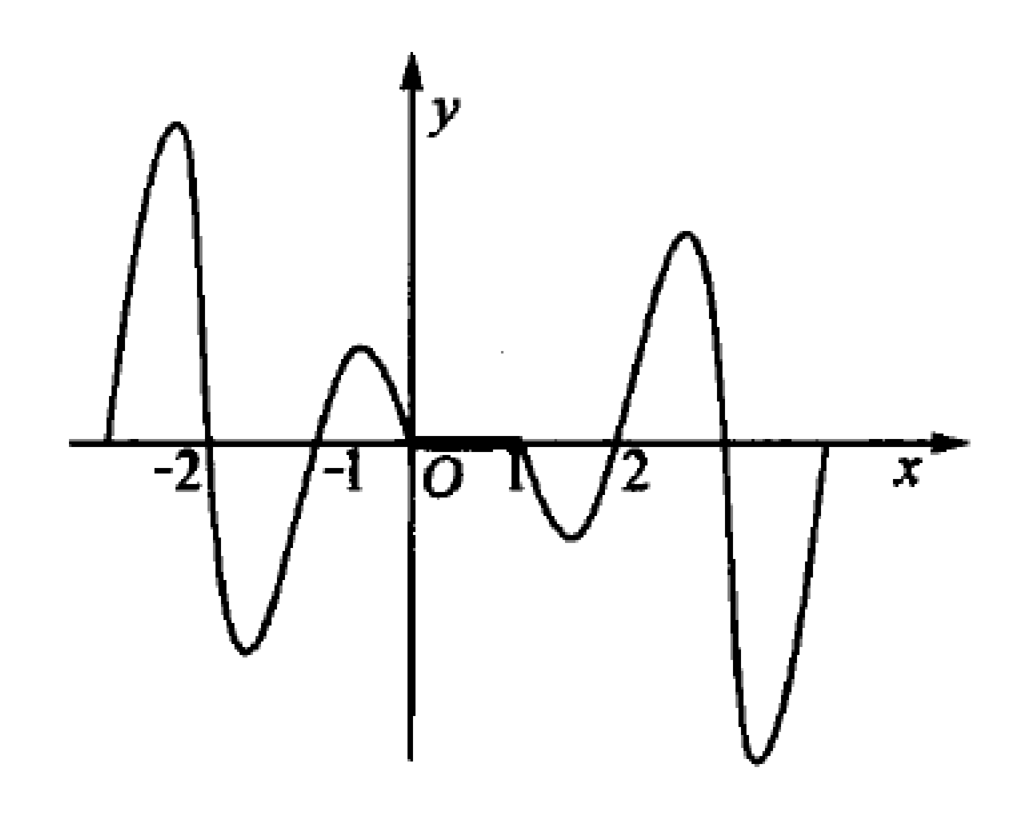
解 $x=k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点，如 703 题图所示.



703 题图

【704】 $y=[x]\sin\pi x$.

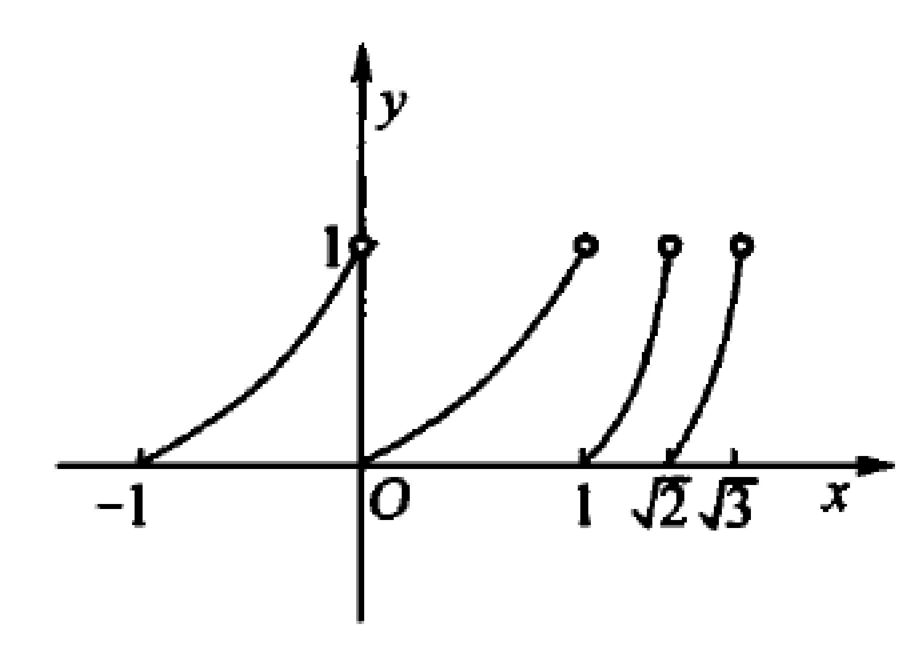
解　在$(-\infty,+\infty)$内处处连续，如704题图所示.



704 题图

【705】 $y=x^2-[x^2]$.

解　$x=\pm\sqrt{k}(k=1,2,\cdots)$为第一类不连续点，如705题图所示.



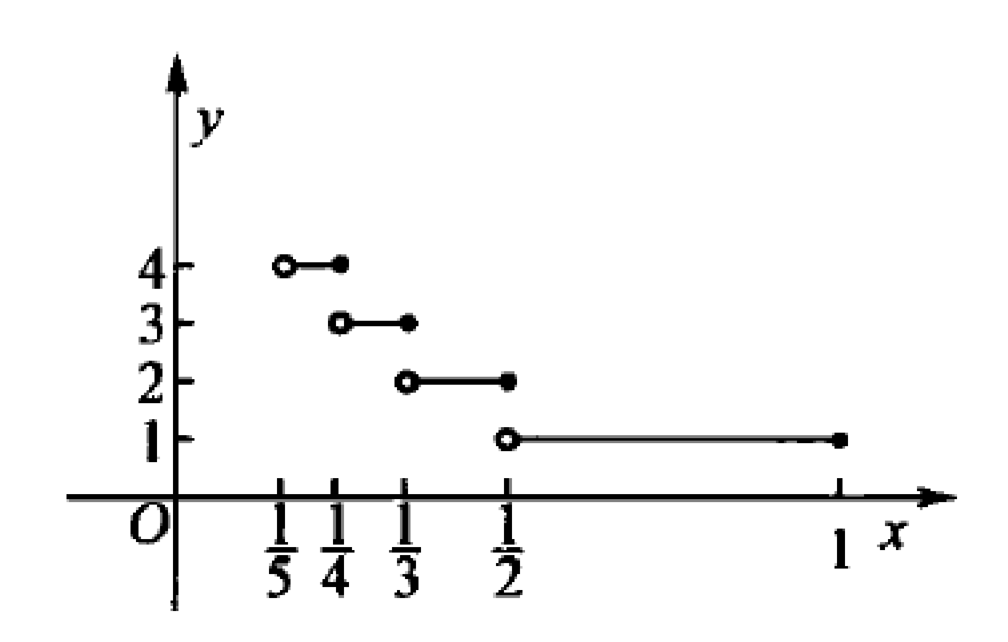
705 题图

【706】 $x=\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 $x=0$ 为无穷型不连续点.

$$x=\frac{1}{k}\qquad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

为第一类不连续点，如 706 题图所示(图中仅画了 $x>0$ 的部分，且在图形中两轴比例不一致).



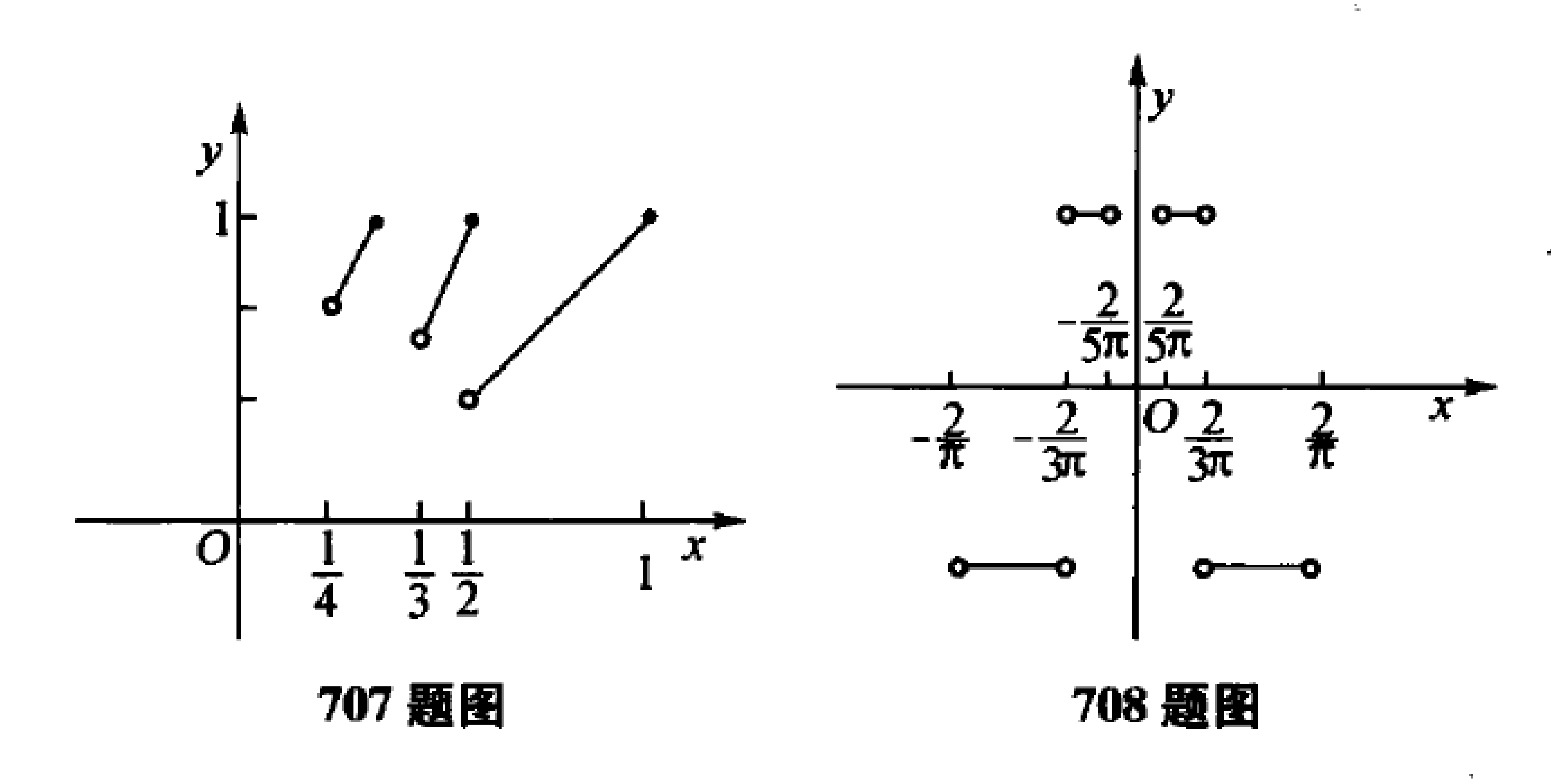
706 题图

【707】 $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=1$，所以 $x=0$ 为可去的不连续点.

$$x=\frac{1}{k}\qquad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

为第一类不连续点. 707 题图仅画了 $x>0$ 的部分.



707 题图 708 题图

【708】 $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

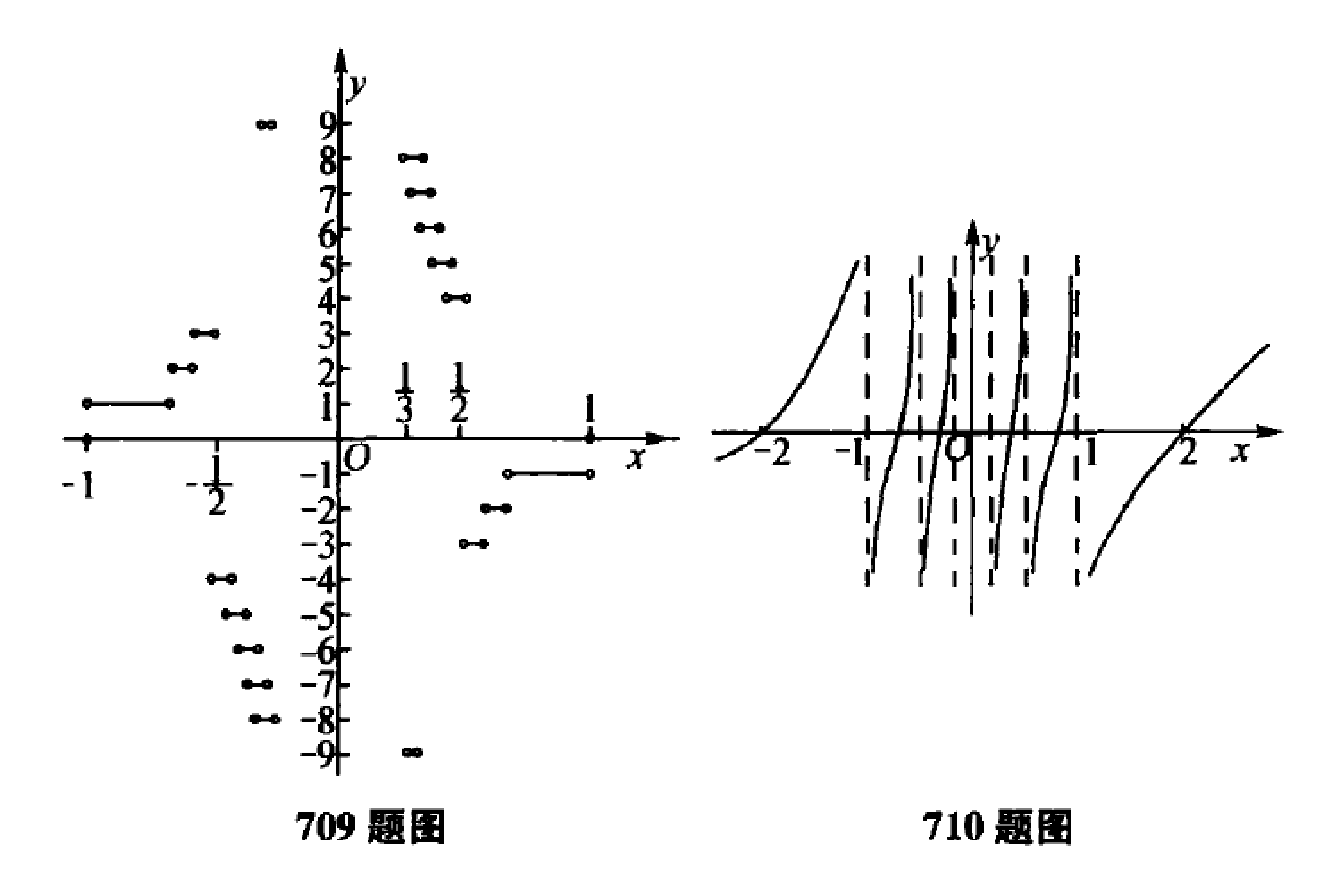
解 $x=0$ 为第二类不连续点，

$$x=\frac{2}{(2k+1)\pi}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

为第一类不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 708 题图所示(图中仅画了 $k=0,\pm1,\pm2,-3$ 时的情形.

【709】 $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点，$x=\pm\frac{1}{k}$ 及 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}(k=1,2,\cdots)$ 为第一类不连续点，如 709 题图所示(图中两轴单位不同).



709 题图　　710 题图

【710】 $y=\cot\frac{\pi}{x}$.

解 $x=\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点. $x=0$ 为第二类不连续点，图形关于原点对称，如 710 题图.

【711】 $y=\sec^2\frac{1}{x}$.

解 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

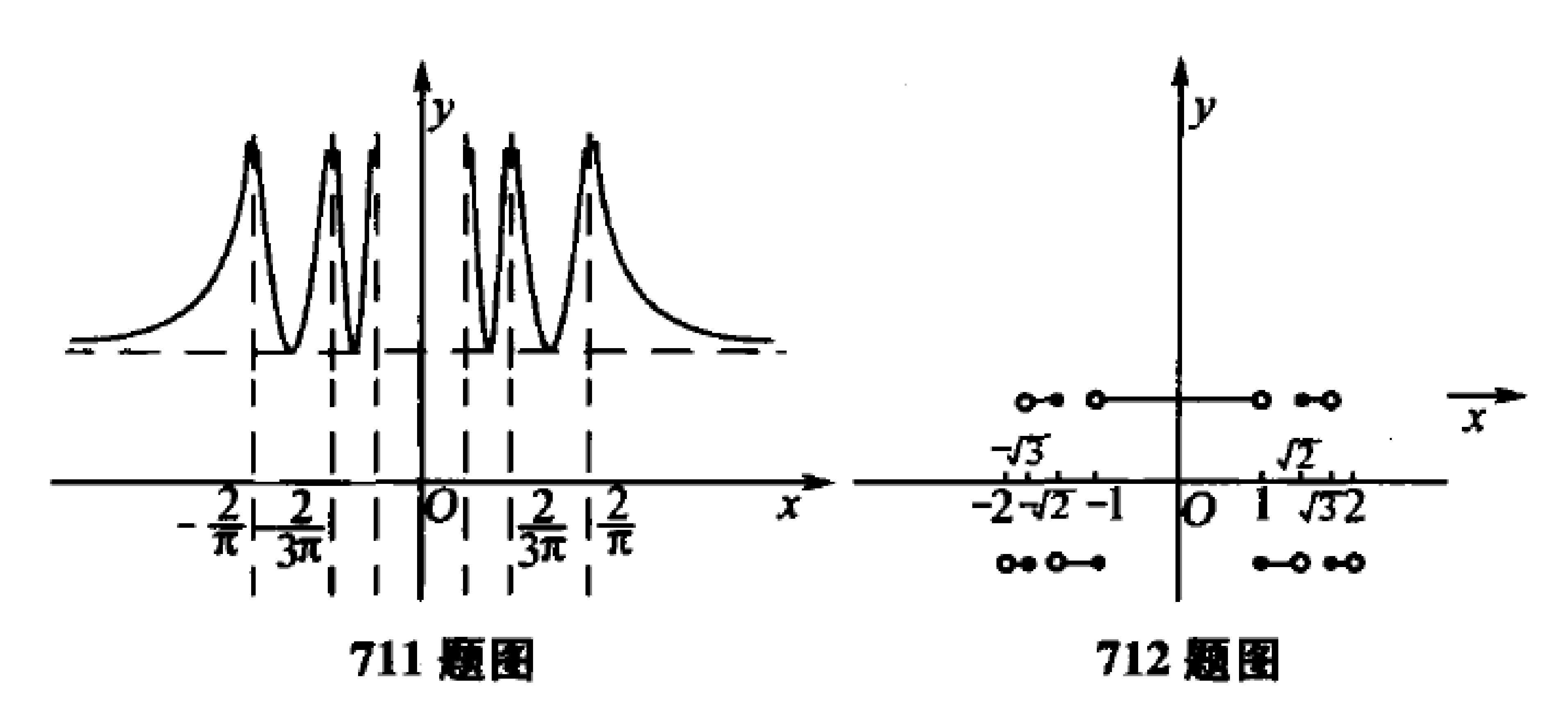
为无穷型不连续点. $x=0$ 为第二类不连续点. 当 $x\to\infty$ 时, $y\to 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

【712】 $y=(-1)^{[x^2]}$.

解 因为

$$\lim_{x\to\sqrt{n}-0}y=(-1)^{n-1},\ \lim_{x\to\sqrt{n}+0}y=(-1)^n,$$

$x=\pm\sqrt{n}(n=1,2,\cdots)$ 为第一类不连续点.



711 题图　　712 题图

【713】 $y=\arctan\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$.

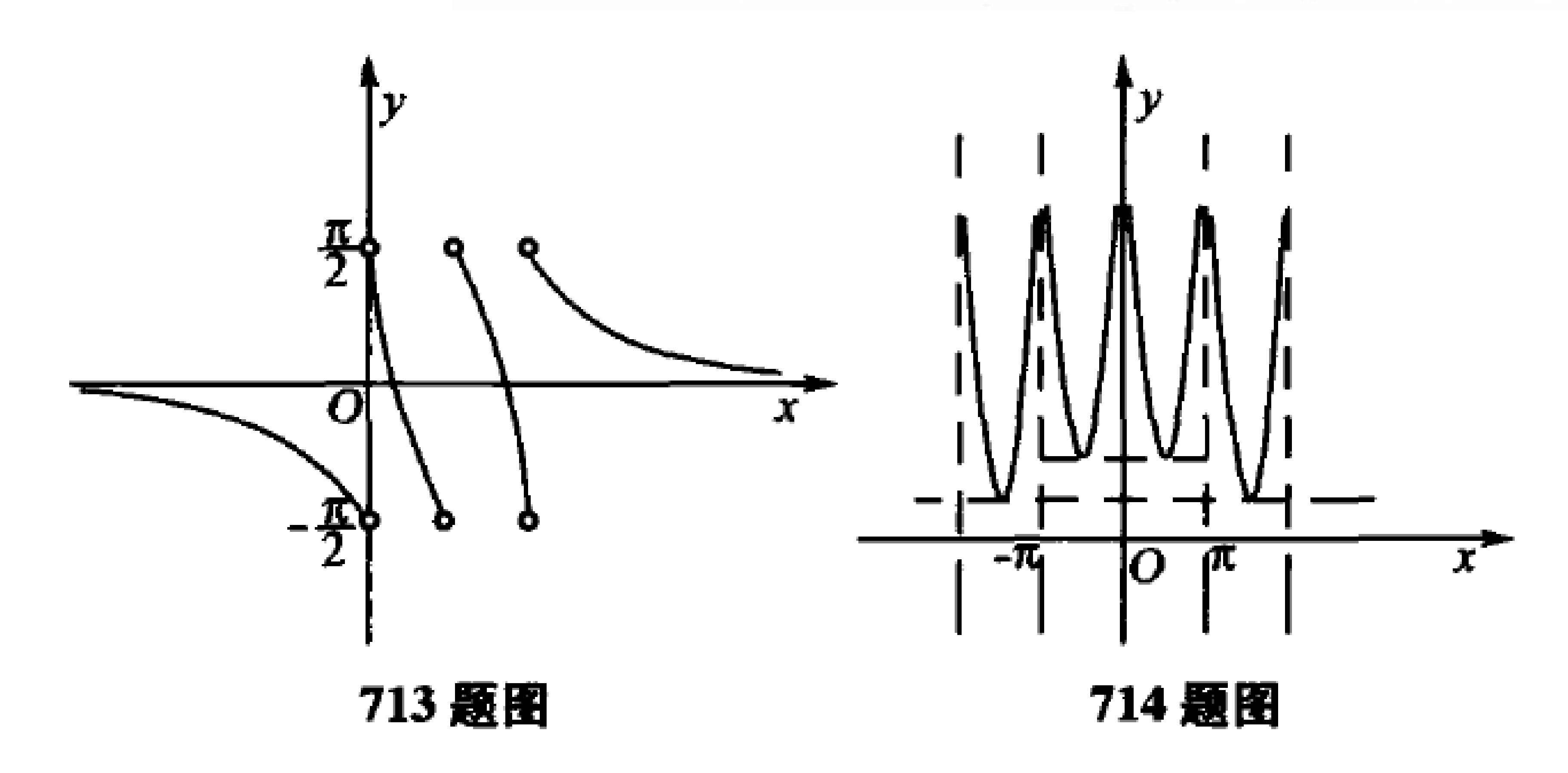
解 $\lim\limits_{x\to-0}y=\lim\limits_{x\to1-0}y=\lim\limits_{x\to2-0}y=-\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to+0}y=\lim\limits_{x\to1+0}y=\lim\limits_{x\to2+0}y=\frac{\pi}{2}$,

$x=0,x=1$ 及 $x=2$ 为第一类不连续点, $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$, 如 713 题图所示.

【714】 $y=\frac{1}{x^3\sin^2x}$.

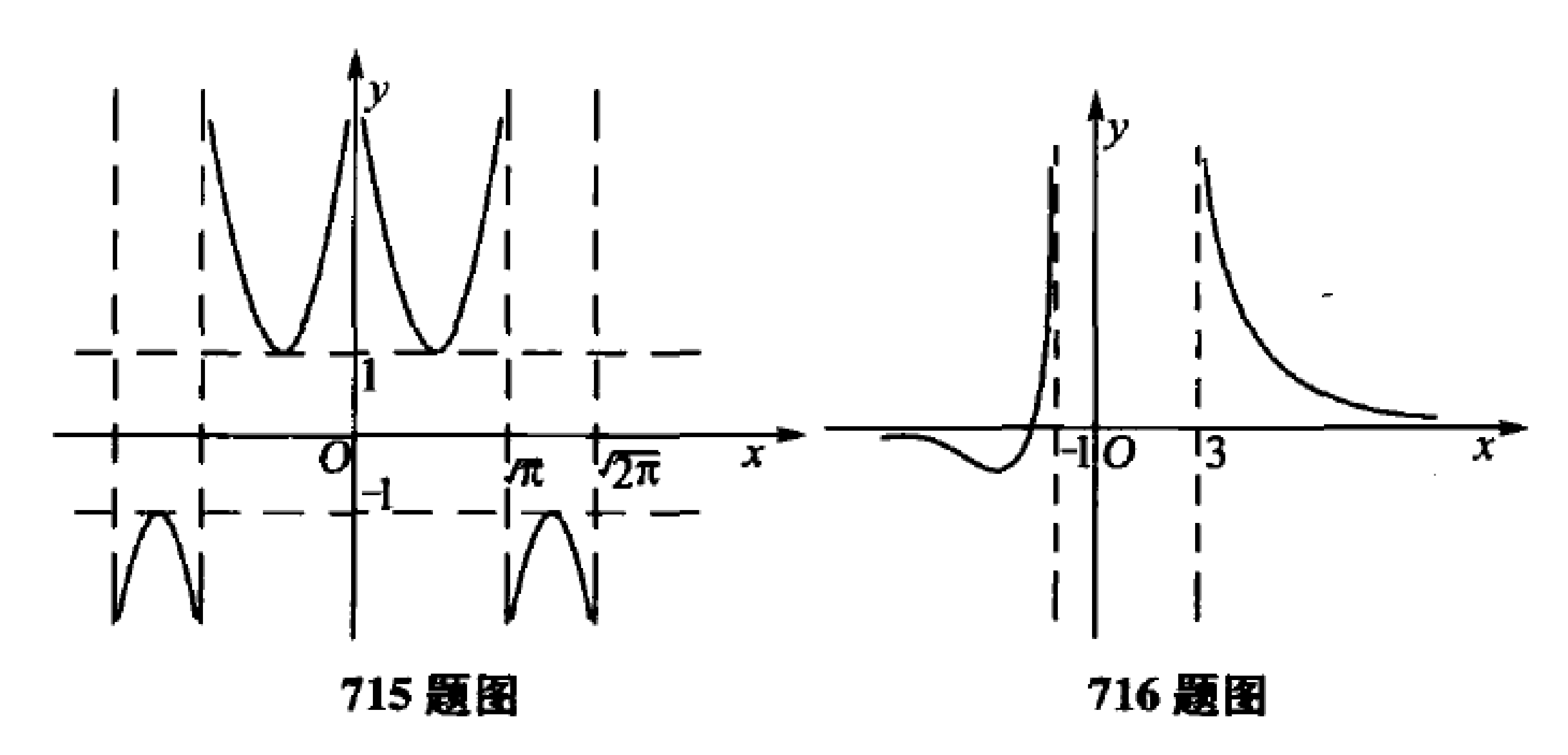
解 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 714 题图.



713 题图　　714 题图

【715】 $y=\dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

解 $x=\pm\sqrt{k\pi}(k=0,1,2,\cdots)$ 为无穷型不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 715 题图.



715 题图　　716 题图

【716】 $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

解 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$, $x=-1$ 和 $x=3$ 为无穷型不连续点.

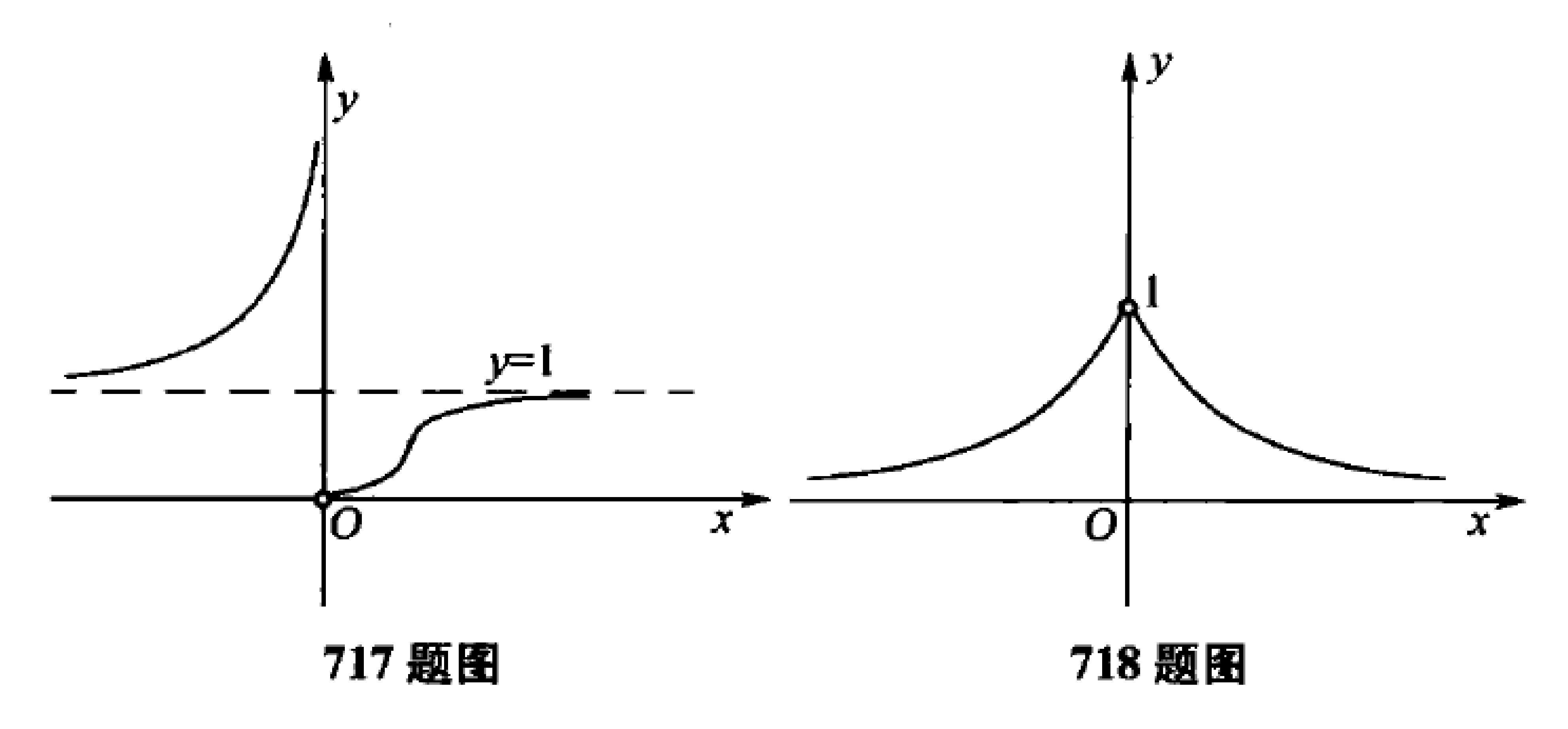
当 $x<-\dfrac{3}{2}$ 时, $0<\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}<1$, 故

$$\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}<0;$$

当 $x>-\dfrac{3}{2}$ 时, $\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}>1$, 故

$$\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}>0,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}=0$$

如 716 题图所示.



717 题图　　　　718 题图

【717】 $y=e^{\frac{-1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x}}=0,\lim\limits_{x\to-0}e^{-\frac{1}{x}}=\infty,x=0$ 为第二类不连续点.

$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$,如 717 题图所示.

【718】 $y=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}y=1$,故 $x=0$ 为可去的不连续点. 图形关 Oy 轴对称. 如 718 题图所示.

【719】 $y=\text{th}\,\frac{2x}{1-x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to1-0}y=\lim\limits_{x\to-1-0}y=1,$

$\lim\limits_{x\to1+0}y=\lim\limits_{x\to-1+0}y=-1,$

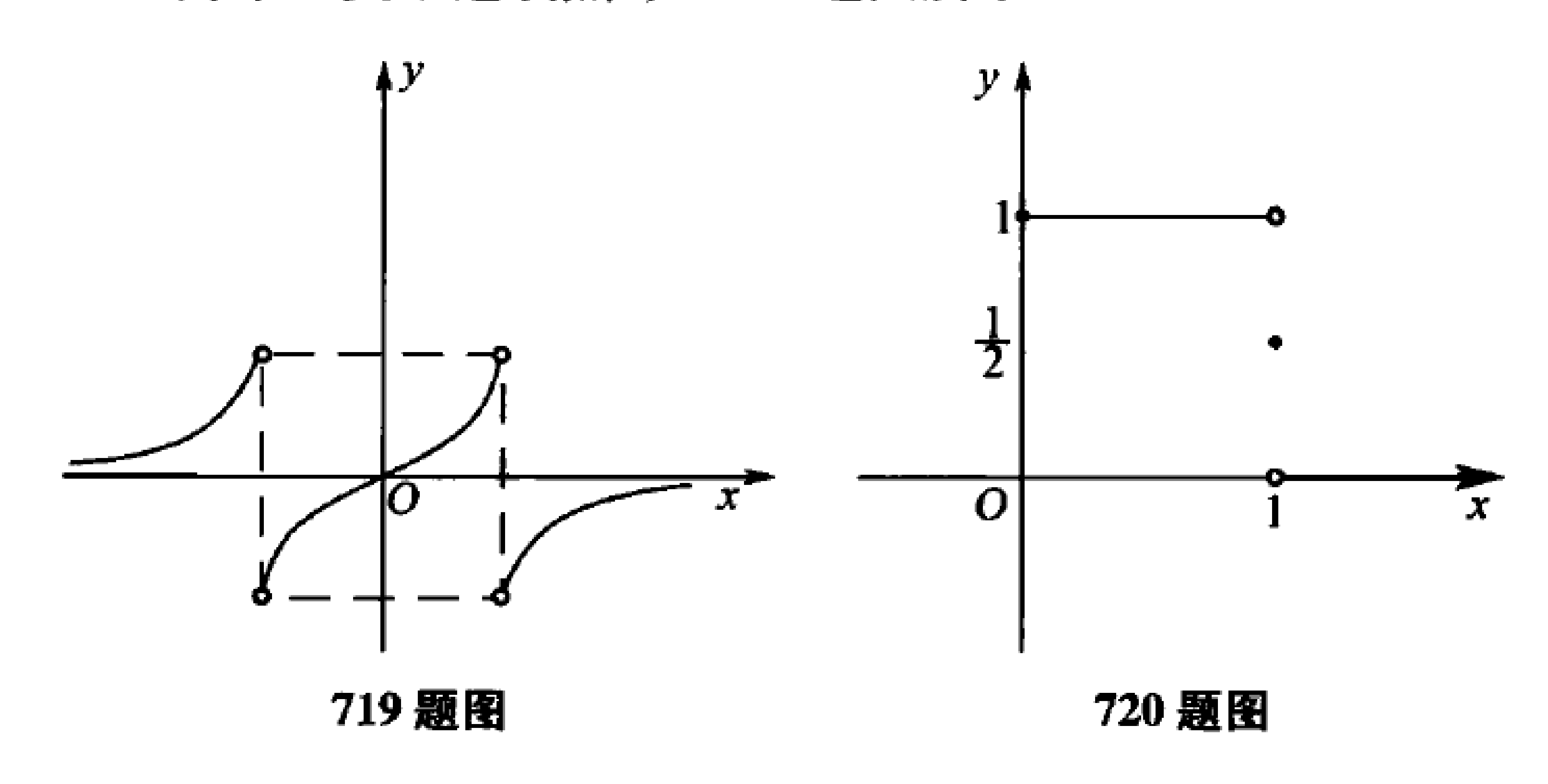
$x=\pm1$ 为第一类不连续点. 图形关于原点对称,如 719 题图所示.

研究下列函数的连续性,并作出其图形(720 ～ 728).

【720】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}(x\geqslant0)$.

解　$$y=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x>1 \text{ 时},\end{cases}$$

$x=1$ 为第一类不连续点，如 720 题图所示.



719 题图　　720 题图

【721】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

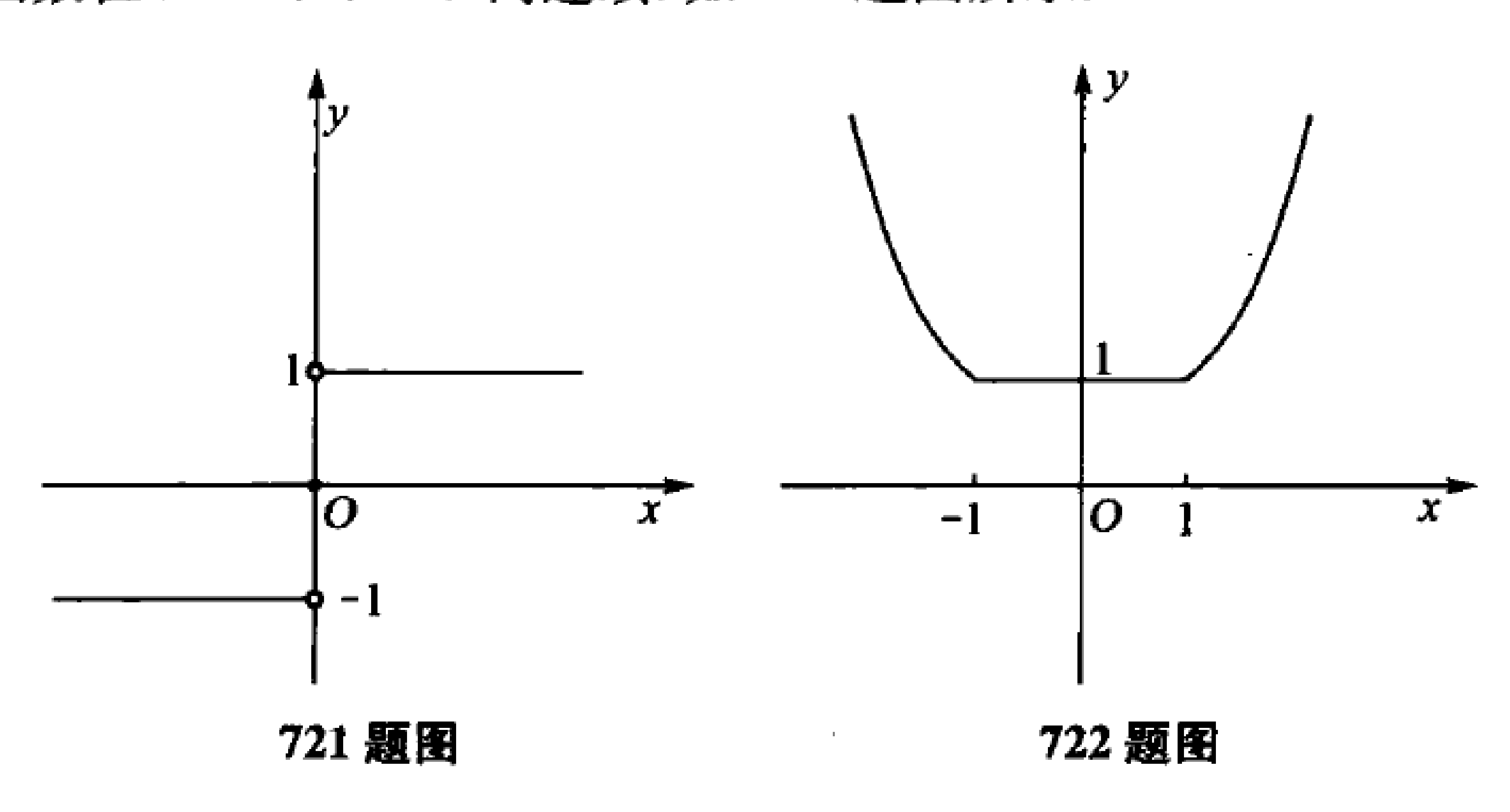
解 $y=\begin{cases}1, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x=0,\\ -1, & 若\ x<0,\end{cases}$

$x=0$ 为第一类不连续点. 如 721 题图所示.

【722】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

解 $y=\begin{cases}1, & 当\ |\ x\ |\leqslant 1\ 时,\\ x^2, & 当\ |\ x\ |>1\ 时,\end{cases}$

函数在$(-\infty,+\infty)$内连续. 如 722 题图所示.



721 题图　　722 题图

【723】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

解 $y=\begin{cases}1, & \text{当 } x=k\pi \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\neq k\pi \text{ 时},\end{cases}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

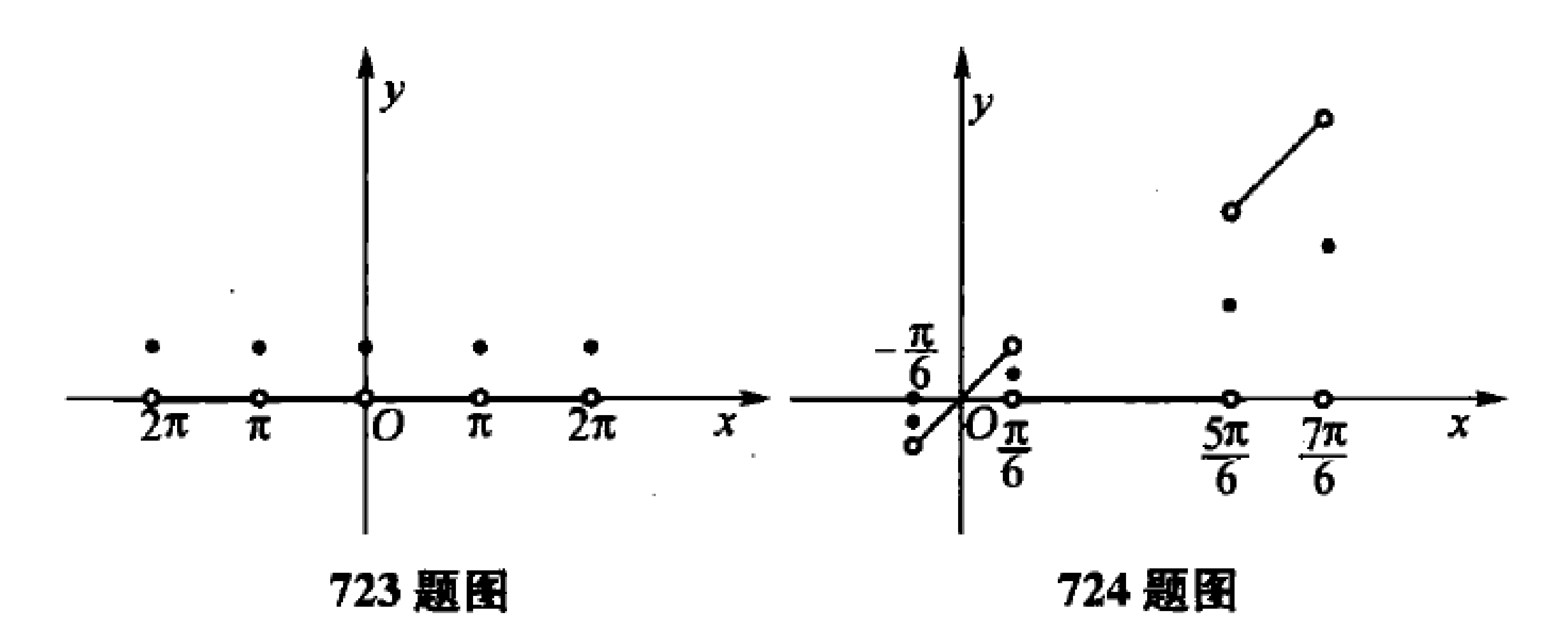
$x=k\pi$ 为第一类不连续点,如 723 题图所示.

【724】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

解 $y=\begin{cases}x, & \text{当 } |x-k\pi|<\dfrac{\pi}{6} \text{ 时},\\ \dfrac{x}{2}, & \text{当 } x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6} \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \dfrac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\dfrac{5\pi}{6} \text{ 时},\end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$ 为第一类不连续点,如 724 题图所示.



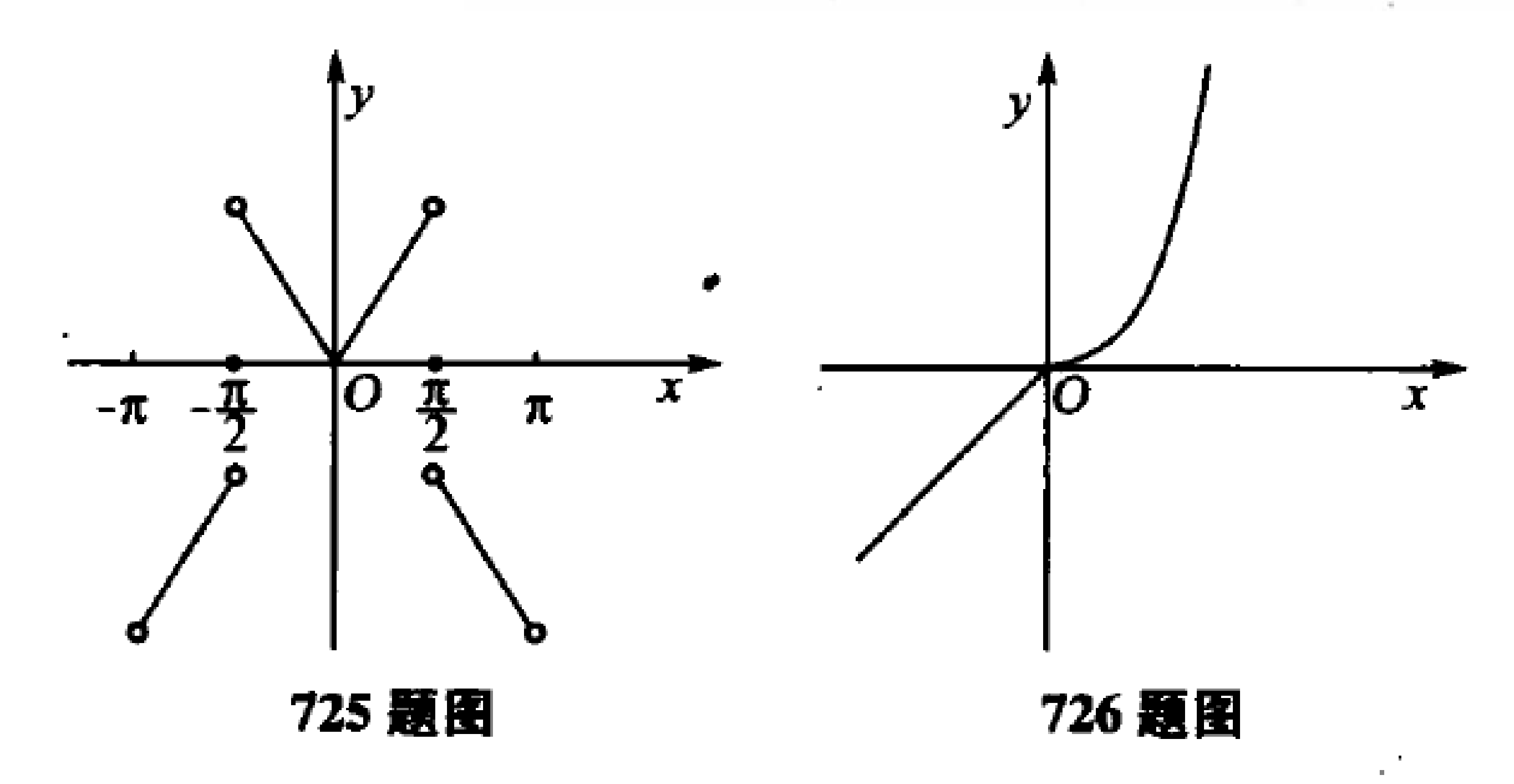
723 题图　　　724 题图

【725】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\arctan(n\cot x)]$.

解 $y=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ -\dfrac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi,\\ 0, & \text{当 } x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$x=\dfrac{k\pi}{2}(k\neq0)$ 为第一类不连续点. 如 725 题图所示.



725 题图　　726 题图

【726】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

解 $y=\begin{cases}x, & 当 x\leqslant 0 时,\\ x^2, & 当 x>0 时,\end{cases}$

函数在$(-\infty,+\infty)$内连续，如 726 题图所示.

【727】 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

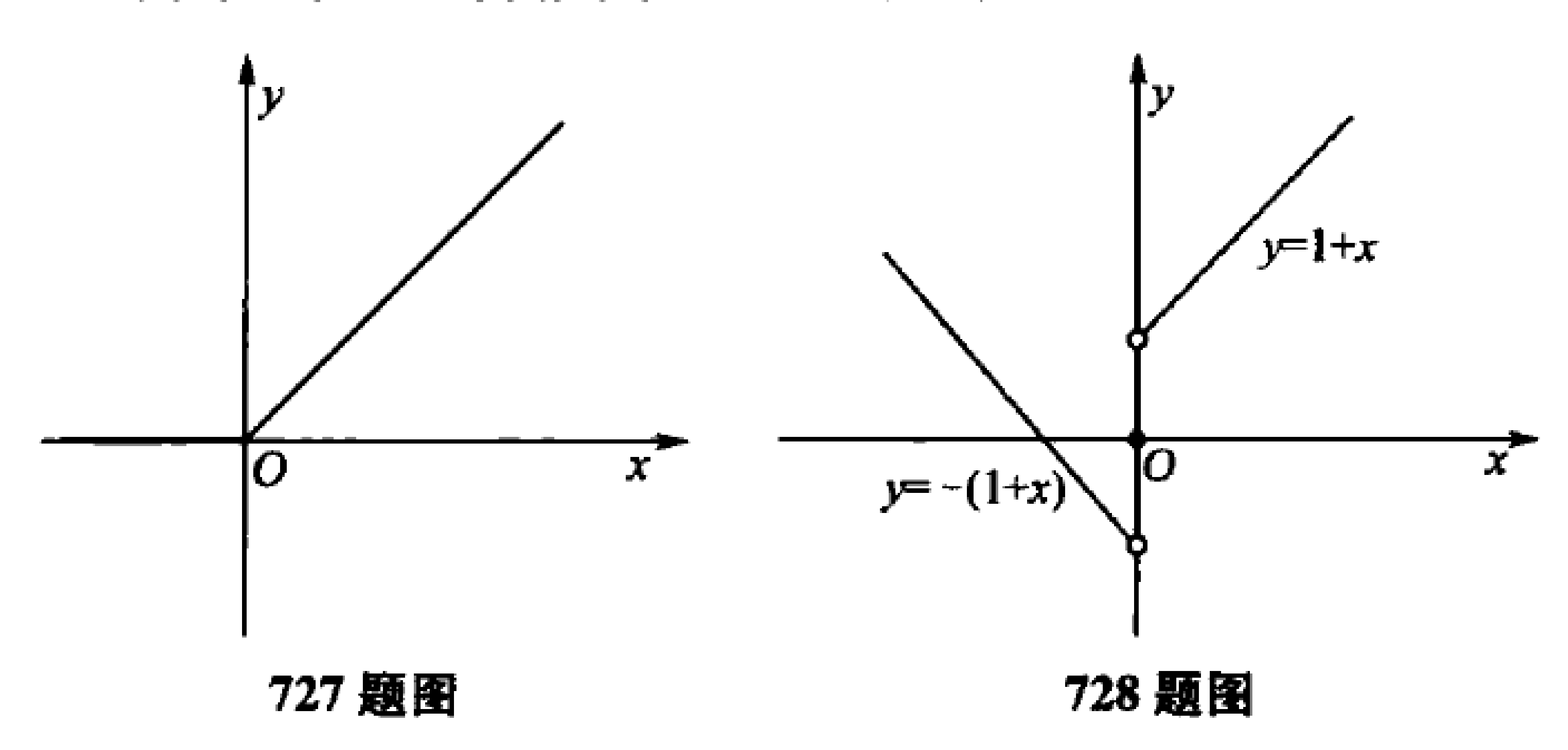
解 $y=\begin{cases}0, & 当 x\leqslant 0 时,\\ x, & 当 x>0 时,\end{cases}$

函数在$(-\infty,+\infty)$内连续，如 727 题图所示.

【728】 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\text{th}tx$.

解 $y=\begin{cases}-(1+x), & 当 x<0 时,\\ 0, & 当 x=0 时,\\ (1+x), & 当 x>0 时,\end{cases}$

$x=0$ 为第一类不连续点. 如 728 题图所示.



727 题图　　728 题图

【729】 函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{若 } 1<x\leqslant 2;\end{cases}$$

是否连续?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=1$

故 $x=1$ 为第一类不连续点. 在$[0,2]$上 $f(x)$ 不是连续函数. 如 729 题图所示.

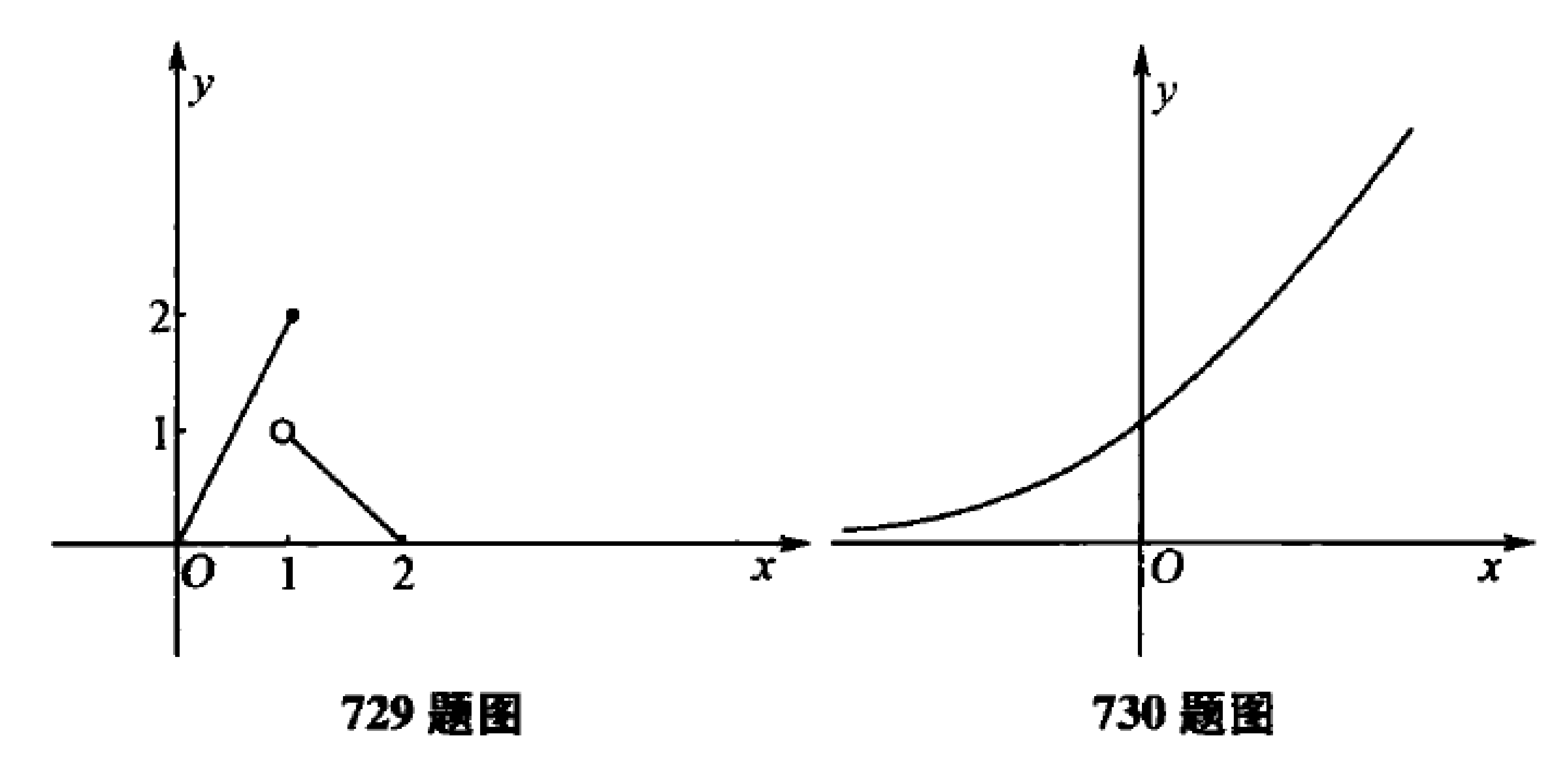
【730】 令 $f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{若 } x<0,\\ a+x, & \text{若 } x\geqslant 0;\end{cases}$

怎样选择数 a,函数 $f(x)$ 才是连续的?

解 因为

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(a+x)=a,$$
$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}e^x=1,$$

而且 $f(0)=a$,故当 $a=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因而在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. 如 730 题图所示,当选取 $a=1$ 时,$f(x)$ 在整个数轴上连续.



729 题图　　730 题图

【731】 研究以下函数的连续性并说明不连续点的性质. 设:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{当 } 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } |x|\leqslant 1,\\ 1, & \text{当 } |x|>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & 当\ |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & 当\ |x|>1;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}\cot^2\pi x, & 当\ x\ 为非整数,\\ 0, & 当\ x\ 为整数;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & 当\ x\ 为有理数,\\ 0, & 当\ x\ 为无理数.\end{cases}$

解　(1) 当 $x\neq 1$ 时，$f(x)$ 显然连续而

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=1=f(1),$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 因而 $f(x)$ 在$[0,2]$上为连续函数.

(2) $x=-1$ 为第一类不连续点.

(3) $\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}|x-1|=2,$

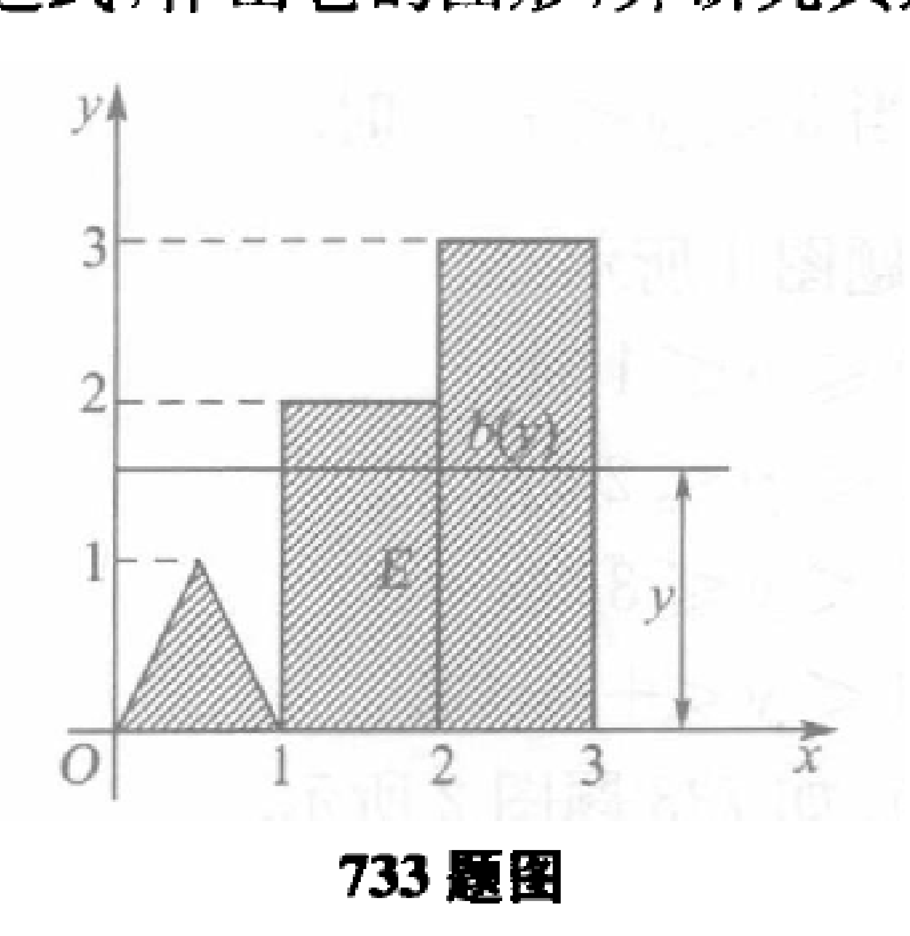
$$\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

故 $x=-1$ 为第一类不连续点.

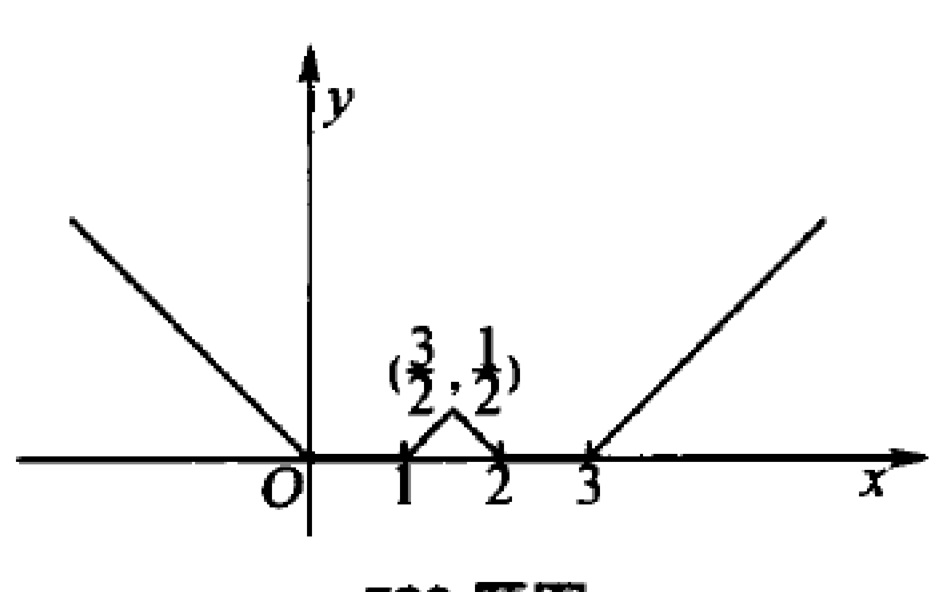
(4) $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点.

(5) $x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类不连续点.

【732】　函数 $d=d(x)$ 是数轴 Ox 上点 x 与由线段 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $2\leqslant x\leqslant 3$ 所构成的点集之间的最短距离. 求函数 d 的解析表达式，作出它的图形，并研究其连续性.



733 题图



732 题图

$$\textbf{解}\quad d(x)=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant \dfrac{3}{2},\\ 2-x, & \dfrac{3}{2}<x<2,\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ x-3, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

$d(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续,如 732 题图所示.

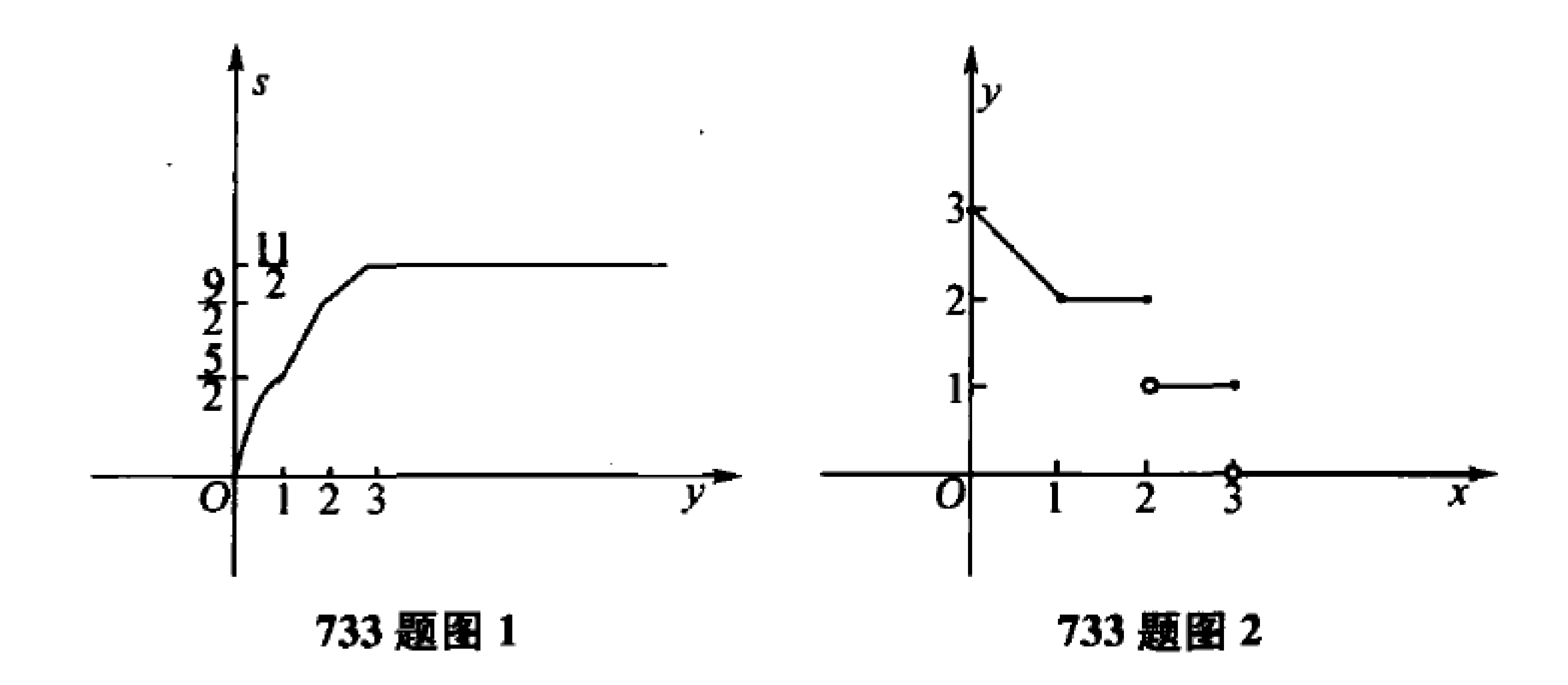
【733】 图形 E 是由底为 1,高为 1 的等腰三角形和两个底均为 1,高分别为 2 和 3 的矩形所构成的(733 题图),函数 $S=S(y)(0\leqslant y<+\infty)$ 是图形 E 由平行线 $Y=0$ 和 $Y=y$ 所界定的那部分面积,而函数 $b=b(y)(0\leqslant y<+\infty)$ 是用平行线 $Y=y$ 去截图形 E 的截线长度. 求出函数 S 和 b 的解析表达式,绘制它们的图形,并研究其连续性.

$$\textbf{解}\quad S(y)=\begin{cases}3y-\dfrac{y^2}{2}, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{2}+2y, & \text{当 } 1<y\leqslant 2 \text{ 时},\\ \dfrac{5}{2}+y, & \text{当 } 2<y\leqslant 3 \text{ 时},\\ \dfrac{11}{2}, & \text{当 } 3<y<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

$S(y)$ 在$[0,+\infty)$ 内连续,如 733 题图 1 所示.

$$b(y)=\begin{cases}3-y, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } 1<y\leqslant 2 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } 2<y\leqslant 3 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } 3<y<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点. 如 733 题图 2 所示.



733 题图 1　　733 题图 2

【734】 证明：狄利克雷函数

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m\,!x)\},$$

对任意的 x 都是不连续的.

证 设

$$f(m,n)=\cos^n(\pi m!x),$$

当 x 为有理数时，设 $x=\frac{q}{p}$(p,q 为互质的整数，且 $p>0$)，则当 $m>p$ 时，$f(m,n)=1$ 故 $\chi(x)=1$. .

当 x 为无理数时，则对任一固定的 m 而言，$|\cos(\pi m!x)|<1$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0,$$

故 $\chi(x)=0$,

总之 $$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

由实数的稠密性可知，对于任意值 x_0 存在无理数列 $\{x_n\}$ 及有理数列 $\{r_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$.

而 $\chi(x_n)=0$，$\chi(r_n)=1$,

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\chi(x)$ 不存在，

即在任意点 x，$\chi(x)$ 都是不连续的.

【735】 研究函数 $f(x)=x\chi(x)$ 的连续性，其中 $\chi(x)$ 为狄

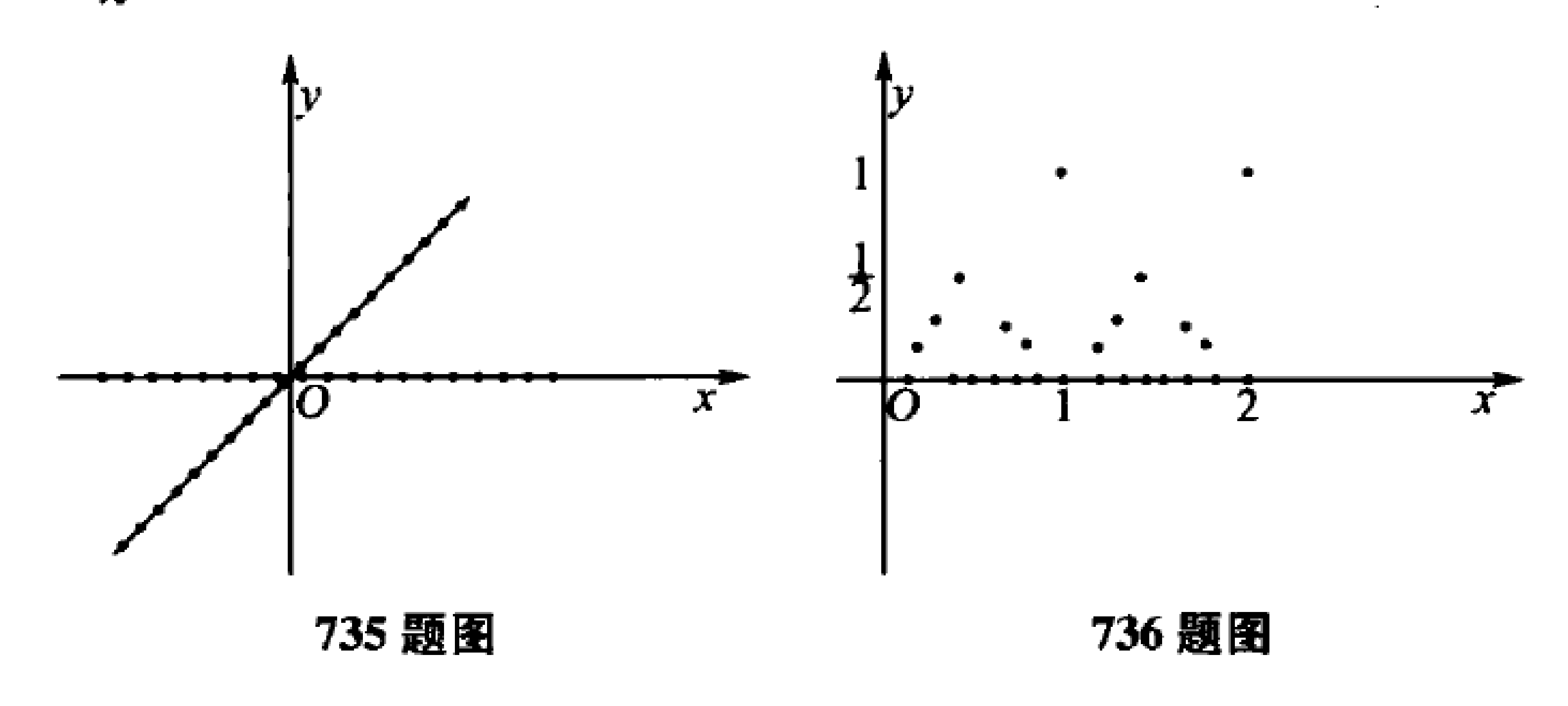
里克雷函数(参阅前题),作出此函数的略图.

解 $x\chi(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$

当 $x_0\neq 0$ 时,如果 x 取有理数趋近于 x_0 时 $x\chi(x)$ 的极限为 x_0,如 x 取无理数趋近于 x_0 时 $x\chi(x)$ 的极限为 0,所以 $x\chi(x)$ 在点 $x_0\neq 0$ 处不连续. 又

$$\lim_{x\to 0}x\chi(x)=0,$$

故 $x\chi(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 如 735 题图所示.



735 题图　　736 题图

【736】 证明:黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{若 } x=\dfrac{m}{n},\text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互素整数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的,当 x 取任一个无理值时是连续的,作出此函数的略图.

证 不失一般,我们仅讨论区间 $[0,1]$,设 $x_0\in[0,1]$,对于任给的 $\varepsilon>0$,满足不等式 $n<\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限多个,即在 $[0,1]$ 中至多只有有限个有理数 $\dfrac{m}{n}$,使得 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\geqslant\varepsilon$. 因而我们可取 $\delta>0$,使得在 x_0 的去心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内不含这样的有理数. 因此,在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内,不论 x 是否为有理数,均有 $|f(x)|<\varepsilon$. 因此

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

若 x_0 为无理数，则 $f(x_0) = 0$，可见 $f(x)$ 在 x_0 连续. 若 x_0 为有理数，则 $f(x_0) \neq 0$. $f(x)$ 在 x_0 点有可去间断点.

736 题图为 $f(x)$ 在[0,2] 上的略图.

【737】 研究由以下形式给定的函数 $f(x)$ 的连续性：

若 x 为不可约有理分数$\frac{m}{n}(n \geqslant 1)$ 时，$f(x) = \frac{nx}{n+1}$；若 x 为无理数时，$f(x) = |x|$.

并作出这个函数的简略图.

解　当 $x < 0$ 时，$f(x)$ 显然不连续. 而对于正有理数 $\xi = \frac{m}{n}$，

$f(\xi) = \frac{m}{n+1}$ 取一列无理数列 $\{x_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \xi$，

则
$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} x_k = \xi = \frac{m}{n} \neq f(\xi) = \frac{m}{n+1},$$

故 $f(x)$ 在正有理数点也不连续.

若 x_0 为正无理数，则对任意的 $\varepsilon > 0$，满足$\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ 的自然数 n 至多只有限多个. 故取 $0 < \delta \leqslant \min\{\frac{\varepsilon}{2}, x_0\}$，使得在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内不含有理数$\frac{m}{n}$，其中$\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$，即若 $x = \frac{q}{p} \in (x_0 - \delta, x_0 = \delta)$($p,q$ 为互质的整数，$p > 0$) 则$\frac{1}{p+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. 因此，对于 $| x - x_0 | < \delta$ 内任何 x，若 x 为无理数，则有

$$| f(x) - f(x_0) | = | x - x_0 | < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

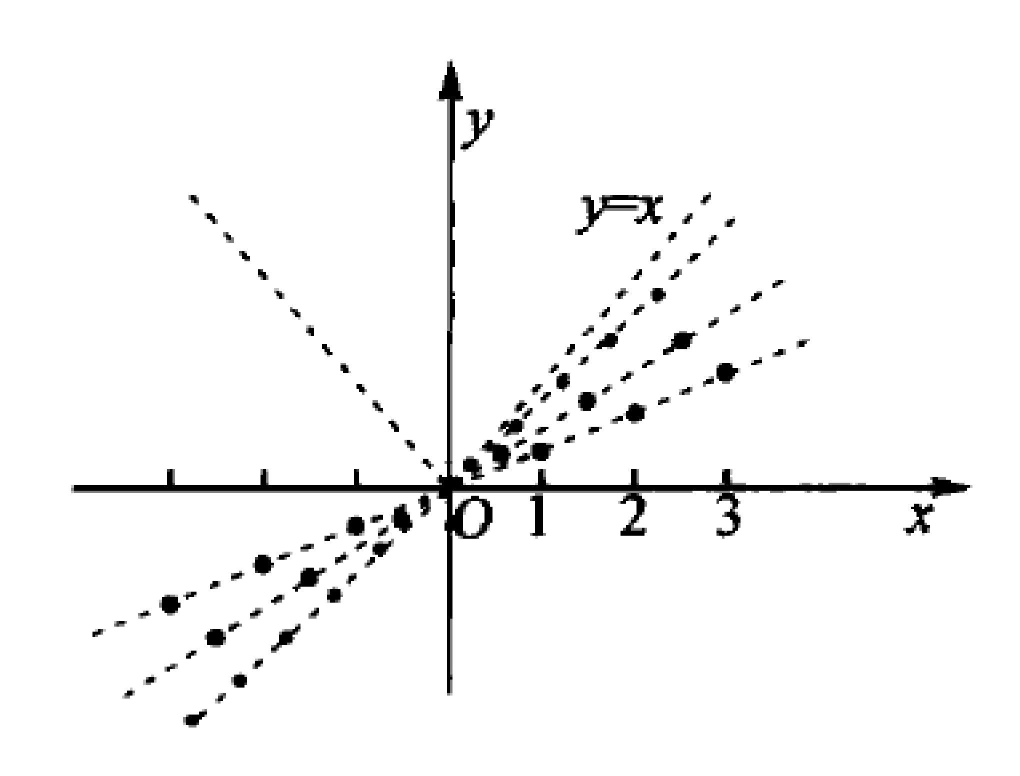
若 x 为有理数，设 $x = \frac{q}{p}$，则有

$$| f(x) - f(x_0) | = \left| \frac{q}{p+1} - x_0 \right|$$
$$\leqslant \left| \frac{q}{p+1} - \frac{q}{p} \right| + | x - x_0 |$$

$$=\frac{1}{p+1}+(x-x_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即 $f(x)$ 在正无理数点 x_0 处连续.

如 737 题图所示.



737 题图

【738】 函数

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2},$$

除 $x=0$ 外，对于自变数 x 的所有值都有定义，为了使得此函数在 $x=0$ 时是连续的，则在 $x=0$ 这个点上函数 $f(x)$ 应该补充什么样的值?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,

所以当取 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【739】 证明:无论怎样选取数 $f(1)$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=1$，都是不连续的.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=+\infty$,

所以，$x=1$ 为无穷型间断点，无论选取怎样的 $f(1)$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处均不连续.

【740】 当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 失去意义，定义 $f(0)$ 的数值，

使 $f(x)$ 在 $x=0$ 是连续的,若:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; (2) $f(x)=\dfrac{\tan 2x}{x}$;

(3) $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$; (4) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$; (6) $f(x)=x^x \quad (x>0)$;

(7) $f(x)=x\ln^2 x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{3}{2},$$

故定义 $f(0)=\dfrac{3}{2}$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}=2$,

故定义 $f(0)=2$ 即可.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$,取 $f(0)=0$.

(4) 因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,故定义 $f(0)=e$.

(5) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$,故定义 $f(0)=0$.

(6) 因为$\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln x}=e^0=1$,故定义 $f(0)=1$.

(7) 因为$\lim\limits_{x\to 0}x\ln^2 x=0$,故定义 $f(0)=0$.

【741】 (1) 当 $x=x_0$ 时,函数 $f(x)$ 是连续的,而函数 $g(x)$ 是不连续的;(2) 在 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不连续,问这两个函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否一定不连续?举出适当的例子说明.

解 (1) $f(x)+g(x)$ 必不连续.

事实上,设 $F(x)=f(x)+g(x)$,若 $F(x)$ 在 x_0 连续,则由

$f(x)$ 在 x_0 的连续性有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} g(x) &= \lim_{x\to x_0}(F(x)-f(x)) \\ &= \lim_{x\to x_0}F(x)-\lim_{x\to x_0}f(x) \\ &= F(x_0)-f(x_0)=g(x_0),\end{aligned}$$

这与假设矛盾. 因此,$F(x)$ 在 x_0 必不连续.

(2) 不一定. 例如

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$g_1(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $f_1(x)$,$g_1(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,但其和 $f_1(x)+g_1(x)=0$ 却处处连续. 又如

$$f_2(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ x_2, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$g_2(x)=\begin{cases}2, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $f_2(x)$,$g_2(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 其和 $f_2(x)+g_2(x)$ 也在 $x=0$ 处不连续.

【742】 设:(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 上是连续的,而函数 $g(x)$ 在点 x_0 上是不连续的;(2) 在 $x=x_0$ 时,两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不连续,问这两个函数的积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否一定不连续?举出适当的例子说明.

解 (1) 不,例如

$$f(x)=0, g(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

$f(x)$ 处处连续,$g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续,但 $f(x)\cdot g(x)=0$ 处处连续.

(2) 不,例如

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -(x+1), & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

它们均在 $x=0$ 处不连续，但 $f(x)\cdot g(x)=(x+1)^2$ 却处处连续.

【743】 能否断定不连续函数的平方也是不连续函数?举出处处不连续的函数而它的平方是连续函数的例子.

解 不能，例如

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}.\end{cases}$$

$f(x)$ 处处不连续，但 $f^2(x)=1$ 却处处连续.

【744】 研究函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的连续性，若：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 和 $g(x)=1+x^2$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 和 $g(x)=x(1-x^2)$；

(3) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 和 $g(x)=1+x-[x]$.

解 (1) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续.

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

$x=0$ 为 $g[f(x)]$ 的可去间断点.

(2) 当 $x=0,\pm 1$ 时，$g(x)=0$，

当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$，

当 $x>1$ 或 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，

故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & \text{当 } x<-1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=-1 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } -1<x<0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } 0<x<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=1 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

在 $x=-1,0,1$，处不连续.

而

$$g[f(x)]=0 \text{ 处处连续}.$$

(3) $f[g(x)]=1$,处处连续

$g[f(x)]=1$ 也处处连续.

【745】 如果

$$f(u)=\begin{cases}u, & \text{当 } 0<u\leqslant 1 \text{ 时},\\ 2-u, & \text{当 } 1<u<2 \text{ 时};\end{cases}$$

且

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 2-x, & \text{当 } x \text{ 为无理数};\end{cases}\quad (0<x<1)$$

研究复合函数 $y=f(u)$ 的连续性,式中 $u=\varphi(x)$.

解 当 $x(0<x<1)$ 为有理数时,$u=\varphi(x)=x$,

则 $0<u<1$,

故 $f(u)=x$.

当 x 为无理数时,$u=2-x$

则 $1<u<2$,

故 $f(u)=2-u=x$.

从而 $f[\varphi(x)]\equiv x$ 处处连续.

【746】 证明:若 $f(x)$ 为连续函数,则函数 $F(x)=|f(x)|$ 也是连续的.

证 设 x_0 为 $f(x)$ 的连续点,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

由于
$$|F(x)-F(x_0)|=||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|,$$

从而 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$,

故 $F(x)$ 在 x_0 处连续.

【747】 证明:若函数 $f(x)$ 是连续的,则函数

$$f_C(x)=\begin{cases}-C, & \text{若 } f(x)<-C;\\ f(x), & \text{若 } |f(x)|\leqslant C;\\ C, & \text{若 } f(x)>C.\end{cases}$$

(式中 C 为任意正数),也是连续函数.

证 容易验证

$$f_C(x)=\frac{1}{2}(|C+f(x)|-|C-f(x)|).$$

而 $C+f(x)$ 及 $C-f(x)$ 均为连续函数.

由 746 题结果知 $f_C(x)$ 是连续函数.

【748】 证明:若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$内是连续的,则函数 $m(x)=\inf\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$ 和 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$ 在$[a,b]$上也是连续的.

证 我们只证 $M(x)$ 在$[a,b]$上连续. $m(x)$ 的连续性之证明完全类似.

设 $x_0\in[a,b]$. 先证 $M(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon>0$,由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续,故存在 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

于是,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon\leqslant M(x_0)+\varepsilon,$$

而当 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 时,

$$f(x)\leqslant M(x_0)<M(x_0)+\varepsilon.$$

由此可知当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,

$$M(x)\leqslant M(x_0)+\varepsilon_0,$$

又因 $M(x)$ 是递增的,故

$$M(x_0)\leqslant M(x)\leqslant M(x_0)+\varepsilon \qquad (x_0<x<x_0+\delta),$$

因此 $$\lim_{x\to x_0+0}M(x)=M(x_0).$$

即 $M(x)$ 在 x_0 右连续.

下证 $M(x)$ 的左连续性. 不妨设 $f(x)$ 在$[a,x_0]$的最大值在点 x_0 达到,即 $M(x_0)=f(x_0)$(否则,若 $M(x_0)=f(x_1)$,$a\leqslant x_1<x_0$,则显然知,当 $x_1<x<x_0$ 时,$M(x)\equiv M(x_0)$,从而 $M(x)$ 在 x_0 左连续.)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon=M(x_0)-\varepsilon$.

因此 $$M(x)>M(x_0)-\varepsilon.$$

从而 $M(x_0) > M(x) > M(x_0) - \varepsilon$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0-0} M(x) = M(x_0)$.

即 $M(x)$ 在 x_0 左连续,证毕.

【749】 证明:如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的,则函数

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$$

和 $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$

也是连续的.

证 因为 $f(x)$,$g(x)$ 为连续函数,所以 $f(x)+g(x)$、$f(x)-g(x)$ 及 $|f(x)-g(x)|$ 均为连续函数. 而

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\{[f(x)+g(x)] - |f(x)-g(x)|\},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\{[f(x)+g(x)] + |f(x)-g(x)|\},$$

所以 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 为连续函数.

【750】 令函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义并有界,证明函数 $m(x) = \inf\limits_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$ 和 $M(x) = \sup\limits_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 左连续.

证 设 $x_0 \in (a,b]$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 故 $M(x)$ 为有限值. 任给 $\varepsilon > 0$,必存在 $\xi_0 \in [a, x_0)$,使得

$$f(\xi_0) > M(x_0) - \varepsilon.$$

于是,当 $\xi < x < x_0$ 时,必有

$$M(x_0) > M(x) > f(\xi_0) > M(x_0) - \varepsilon_0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0-0} M(x) = M(x_0)$.

即 $M(x)$ 在 x_0 点左连续.

【751】 证明:如果函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x < +\infty$ 上连续,且存在有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,则此函数在该区间有界.

证 设 $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,取 $\varepsilon = 1$,则存在 $R > a$,使得当 $x > R$ 时,有 $|f(x) - A| < 1$.

从而 $|f(x)| < |A| + 1$,

又 $f(x)$ 在闭区间$[a,R]$上连续,因而有界,即存在 $M_1>0$,使得当 $a\leqslant x\leqslant R$ 时,$|f(x)|\leqslant M_1$.

取 $$M=\max\{M_1,|A|+1\},$$

对当 $x\in[a,+\infty)$ 时,恒有 $|f(x)|<M$.

【752】 假设函数 $f(x)$ 在区间$(x_0,+\infty)$ 是连续的并且有界,证明对于任何一个数 T,能求得序列 $x_n\to+\infty$,使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证 法一:不妨设 $T>0$,事实上如果存在一无穷序列$\{x_n\}(x_n\to+\infty)$ 使得

$$f(x_n+T)-f(x_n)=0.$$

则结论已成立,故我们不妨假设存在实数 $X_0>0$,使得当 $x>x_0$ 时 $f(x+T)-f(x)>0$,

因此 $$\varliminf_{x\to\infty}[f(x+T)-f(x)]\geqslant 0,$$

故我们只需证明 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=0$.

反设 $$\varliminf_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=A>0\qquad(A\text{ 可为}+\infty),$$

则由定义对于数 $M>0$(若 $A<+\infty$,则取 $M=\dfrac{A}{2}$,若 $A=+\infty$,则 M 可取为任一固定的正数),存在 $R>x_0$,使得当 $x\geqslant R$ 时,

$$f(x+T)-f(x)>M.$$

更重要的有

$$f(T+R)-f(R)>M,$$
$$f(2T+R)-f(T+R)>M,$$
$$\cdots,$$
$$f(nT+R)-f[(n-1)T+R]>M.$$

从而 $$f(nT+R)>(n-1)M+f(R).$$

这与 $f(x)$ 在$(x_0,+\infty)$ 上有界相矛盾. 因此

$$\varliminf_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=0,$$

故存在序列 $x_n\to+\infty$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_n+T)-f(x_n)=0.$$

法二:记

$$g(y)=f(x_0+(y+1)T)-f(x_0+yT) \qquad y\geqslant 1,$$

取一正数序列$\{\varepsilon_n\}(n=1,2,\cdots)$使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$. 易见$g(y)$在$[1,+\infty)$上连续,且有界. 现按下法取$k_1$,使$|g(k_1)|<\varepsilon_1$. 如果$g(1)$,$g(2)$异号,则由连续函数介值定理,存在$k_1$,且$1<k_1<2$,使得$|g(k_1)|=0<\varepsilon_1$. 若$g(1)$与$g(2)$同号,且$g(1)$,$g(2)$,$g(3)$,$g(4)$,$\cdots$都是同号的,不妨设它们均大于0,那么我们可以证明,必存在$k_1\geqslant 1$,使$0<g(k_1)<\varepsilon_1$. 因为,若对一切自然数n,均有$g(n)\geqslant\varepsilon_1$,则由$g(y)$的定义,

$$f(x_0+2T)-f(x_0+T)\geqslant\varepsilon_1,$$
$$f(x_0+3T)-f(x_0+2T)\geqslant\varepsilon_1,$$
$$\cdots,$$
$$f(x_0+nT)-f[x_0+(n-1)T]\geqslant\varepsilon_1.$$

从而

$$f(x_0+nT)\geqslant(n-1)\varepsilon+f(x_0+T),$$

这与$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内有界相矛盾. 故必存在自然数k_1,使得

$$|g(k_1)|<\varepsilon_1.$$

取 $$x_1=x_0+k_1T,$$

则 $$|f(x_1+T)-f(x_1)|<\varepsilon_1,$$

然后,取自然数$p_2>k_1+1$. 通过考虑$g(p_2)$,$g(p_2+1)$,$\cdots$,仿照上面的证明,可得$k_2>k_1+1$.

使得 $$|g(k_2)|<\varepsilon_2,$$

取 $$x_2=x_0+R_2T,$$

则 $$|f(x_2+T)-f(x_2)|<\varepsilon_2.$$

依此类推,可得$\{x_n\}$,使得$x_n\to+\infty(n\to\infty)$,

且 $$|f(x_n+T)-f(x_n)|<\varepsilon_n,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0.$$

【753】 设$\varphi(x)$和$\psi(x)$都是在$-\infty<x<+\infty$的连续周

期函数,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$,证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 有相同的周期. 设 $\varphi(x)$ 的周期为 p,则 $\varphi(x+p)=\varphi(x)$.

而 $$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x+p)-\psi(x+p)]=0,$$

得 $$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]-\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]$$
$$=0.$$

反设 $\psi(x)$ 的周期为 $q\neq p$,则至少存在一个 x_0,使得

$$\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p).$$

设 $$x_n=x_0+nq\quad(n\text{ 为正整数}),$$

又 $$\alpha=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|>0,$$

则 $$|\psi(x_n)-\psi(x_n+p)|=\alpha,$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]=0$ 相矛盾.

最后证明,$\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 反设结论不成立,则至少存在一个 x_0^*,使 $\psi(x_0^*)\neq\psi(x_0^*)$

记 $$\beta=|\varphi(x_0^*)-\psi(x_0^*)|>0,x_n^*=x_0^*+np$$

$(n$ 为正整数$)$

则 $$|\varphi(x_n^*)-\psi(x_n^*)|=\beta,$$

这与 $\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$ 相矛盾.

因此 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

【754】 证明:单调有界函数的所有不连续点都是第一类不连续点.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增加的函数,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,设 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点. 由单调函数的极限定理知

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),$$

及 $$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\text{ 存在},$$

且 $$m\leqslant f(x_0-0)\leqslant f(x_0+0)\leqslant M.$$

故 x_0 为第一类间断点.

【755】 证明:如果函数 $f(x)$ 具有以下性质:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义而且单调,

(2) $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数取作其函数值,

则这个函数在 $[a,b]$ 上是连续的.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增加的,反设 $f(x)$ 在 x_0 间断($x_0 \in [a,b]$),由于 $f(x)$ 在 x_0 有定义,即 $f(x_0)$ 存在. 由 $f(x)$ 的单调增加性知,当 $x < x_0$ 时,$f(x) \leqslant f(x_0)$. 所以

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0).$$

同理 $$f(x_0 + 0) \geqslant f(x_0).$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 间断.

所以 $$f(x_0) - f(x_0 - 0),$$

及 $$f(x_0 + 0) - f(x_0)$$

中至少有一个大于零.

例如 $$f(x_0) - f(x_0 - 0) > 0.$$

由 $f(x)$ 的单调性知 $f(x)$ 不能取到区间 $(f(x_0 - 0), f(x_0))$ 内的值.

这与题设相矛盾. 因此,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

【756】 证明:如果函数

$$f(x) = \sin\frac{1}{x-a} \quad (x \neq a),\text{且 } f(a) = 0,$$

在任意闭区间 $[a,b]$ 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的所有中间值,但是在 $[a,b]$ 上不是连续的.

证 事实上,$f(x)$ 在 $\left[a + \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, a + \dfrac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}\right]$ 上(n 为自然数)取 $[-1,1]$ 之间的一切值. 而当 n 充分大时,

$$\left[a + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, a + \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}\right] \subset [a,b],$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取 $[-1,1]$ 上的一切值,当然更取 $f(a) = 0$

与 $f(b)(|f(b)|\leqslant 1)$ 之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

【757】 证明:如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是连续的,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为此区间内的任意值,则在它们之间能找到一数值 ξ,使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

证 不妨设

$$a<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<b,$$

若 $x_1=x_n$,则结论显然成立. 故设 $x_1<x_n$. 由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续,于是,$f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上取得最大值 M 和最小值 m,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in[x_1,x_n]$,

从而有 $m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant M.$

由连续函数的性质,存在 $\xi\in[x_1,x_n]$,使 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$.

【758】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 连续,且

$$l=\varliminf_{x\to a+0}f(x) \text{ 及 } L=\varlimsup_{x\to a+0}f(x).$$

证明:对于任意数 λ,其中 $l\leqslant\lambda\leqslant L$,存在序列 $x_n\to a+0(n=1,2,\cdots)$,使得 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$.

证 当 $\lambda=l$ 或 $\lambda=L$ 时,结论显然成立. 因此,设

$$l<\lambda<L.$$

因为 $\varliminf_{x\to a+0}f(x)=l, \varlimsup_{x\to a+0}f(x)=L,$

故存在序列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$,使得 $a_n\to a+0, b_n\to a+0$,

且 $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=l, \lim_{n\to\infty}f(b_n)=L.$

于是,存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时,$f(a_n)<\lambda<f(b_n)$.

由 $f(x)$ 的连续性知,在 a_n,b_n 之间存在 x_n,使

$$f(x_n)=\lambda \quad (n>N).$$

由于 $a_n\to a+0, b_n\to a+0,$

故 $x_n\to a+0,$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda.$

§8. 反函数

用参数表示的函数

1. 反函数的存在和连续性

如果函数 $y = f(x)$ 具有以下性质:(1) 在区间(a,b) 内有定义且是连续的;(2) 在严格意义上讲,在此区间上是单调的. 则存在单值反函数 $x = f^{-1}(y)$,此函数在区间(A,B) 上有定义且是连续的,在严格意义上讲是相应地单调的.

其中$A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 和 $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

在其最大存在域定义并且在这个域内满足方程式 $f[(g(y))] = y$ 的任何单值连续函数 $x = g(y)$,则被理解为已知连续函数 $y = f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝.

2. 用参数表示的函数的连续性

如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间(α,β) 内有定义而且是连续的,且函数 $\varphi(t)$ 在这个区间上严格单调,则方程组

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

在区间(a,b) 内将 y 定义成 x 的单值连续函数:$y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$,其中:$a = \lim\limits_{t\to\alpha+0} \varphi(t)$ 和 $b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$.

【759】 求线性分式函数的反函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

问在什么情况下,反函数与已知函数相同?

解 由 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,

解之得反函数为 $x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$,

或写成 $y = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

反函数与已知函数相同，当且仅当

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

解之得 $a+d=0$，

或 $b=c=0, a=d\neq 0$ （此时函数为 $y=x$）.

【760】 设 $y=x+[x]$，求反函数 $x=x(y)$.

解 当 $k\leqslant x<k+1$，时

$$2k\leqslant y<2k+1.$$

且 $[x]=k \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，

所以，此时 $y=x+k$，

故反函数为 $x=y-k \quad (2k\leqslant y<2k+1)$.

即 $x=y-\left[\frac{y}{2}\right], y\in\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}[2k,2k+1)$.

【761】 证明：存在唯一的连续函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$. 满足克卜勒方程

$$y-\varepsilon\sin y=x \quad (0\leqslant\varepsilon<1),$$

证 640 题知序列

$$y_0=x, y_n=x+\varepsilon\sin y_{n-1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

的极限 $y(x)$ 为克卜勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 的唯一的根.

现在证明 $y=y(x)$ 是连续的. 事实上，对任意 x_0，我们有

$$\begin{aligned}&|y_n(x)-y_n(x_0)|\\&=|(x-x_0)+\varepsilon[\sin y_{n-1}(x)-\sin y_{n-1}(x_0)]|\\&\leqslant|x-x_0|+\varepsilon|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|.\end{aligned}$$

逐次应用此不等式，即得

$$\begin{aligned}&|y_n(x)-y_n(x_0)|\\&\leqslant|x-x_0|(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^n)\\&=|x-x_0|\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，便有

$$|y(x)-y(x_0)|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0| \quad (0\leqslant\varepsilon<1).$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y(x_0)$,

即 $y(x)$ 在 x_0 连续.由 x_0 的任意性,知 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

【762】 证明:方程 $\cot x = kx$ 对于每个实数 $k(-\infty < k < +\infty)$ 在区间 $0 < x < \pi$ 内具有唯一连续的根 $x = x(k)$.

证 设 $f(x) = \dfrac{\cot x}{x}$

显然在 $(0,\pi)$ 上 $\cot x$ 和 $\dfrac{1}{x}$ 都是连续的严格单调减函数并且

$$\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to\pi-0} f(x) = -\infty$$

因此,对每一实数 $k(-\infty < k < +\infty)$ 有唯一的 $x \in (0,\pi)$ 使 $f(x) = k$,即 $\cot x = kx$.

另外,由于 $f(x) = \dfrac{\cot x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是连续的严格减函数,故 $k = f(x)$ 的反函数 $x = x(k) = f^{-1}(k)$ 存在而且是 $-\infty < k < +\infty$ 上的连续的单调减函数.此 $x = x(k)$ 即方程 $\cot x = kx$ 的根.

综上所述知:对任何 $k(-\infty < k < +\infty)$,方程 $\cot x = kx$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一的根 $x = x(k)$,并且 $x(k)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

【763】 非单调函数 $y = f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 能否有单值的反函数?

研究下例:$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

解 可以,例如函数

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单值函数,但不是单调的函数,而其反函数为此函数本身.

【764】 在什么情况下函数 $y = f(x)$ 和反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是同一函数?

解 为统一坐标起见，记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$. 故函数 $y=f(x)$ 与反函数为同一函数，当且仅当

$$f^{-1}(x)=f(x),$$

即 $x=f(f(x))$.

【765】 证明：不连续函数 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数是连续函数.

解 原函数为

$$y=\begin{cases}1+x^2, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -(1+x^2), & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$$

显然在 $x=0$ 处不连续. 其反函数在 $|y|\geqslant 1$ 及 $y=0$ 有定义. 其反函数为

$$x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & \text{当 } y\geqslant 1 \text{ 时},\\ -\sqrt{-y-1}, & \text{当 } y\leqslant -1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

易见，上述函数在其定义域内连续.

【766】 证明：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且严格单调，以及 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)\,(a\leqslant x_n\leqslant b)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加. 如果结论不真，则在 (a,b) 内总存在一个实数 a_1 及序列 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}>a_1$.

由于 $f(x)$ 严格单调增加，故有

$$f(x_{n_k})>f(a_1)>f(a).$$

于是 $$f(a)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\geqslant f(a_1),$$

矛盾，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

确定以下函数的反函数的单值连续分支(767 ～ 772).

【767】 $y=x^2$.

解 反函数的单值连续分支为

$$x=\sqrt{y}\qquad(0\leqslant y<+\infty),$$

及 $$x=-\sqrt{y} \quad (0\leqslant y<+\infty).$$

【768】 $y=2x-x^2$.

解 由 $x^2-2x+y=0$,

得 $$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4y}}{2}=1\pm\sqrt{1-y}.$$

于是单值连续分支为

$$x=1-\sqrt{1-y},$$

及 $$x=1+\sqrt{1-y} \quad (-\infty<y\leqslant 1).$$

【769】 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 由于

$$x^2y-2x+y=0,$$

故

$$x=\begin{cases}\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, & \text{当 } y\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

又由于 $$\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty.$$

故反函数的连续分支为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \quad (-1\leqslant y\leqslant 1),$$

及 $$x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \quad (0<|y|\leqslant 1).$$

【770】 $y=\sin x$.

解 单值连续分支为

$$x=(-1)^k\arcsin y+k\pi$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \quad (|y|\leqslant 1).$$

【771】 $y=\cos x$.

解　单值连续分支为

$$x=2k\pi\pm\arccos y$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad(|y|\leqslant1).$$

【772】 $y=\tan x$.

解　单值连续分支为

$$x=\arctan y+k\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad(-\infty<y<+\infty).$$

【773】 证明：连续函数 $y=1+\sin x$ 对应于区间 $0<x<2\pi$ 的值域是一线段.

证　因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$.

从而　$0\leqslant1+\sin x\leqslant2$,

而　$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=2, y|_{x=\frac{3\pi}{2}}=0$,

且　$y=1+\sin x$,

是 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的连续函数，由连续函数的介值定理知当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变 $\frac{3\pi}{2}$ 时，y 取 0 到 2 之间的一切值. 因此当 $0<x<2\pi$ 时，y 值的集合就是线段 $[0,2]$.

【774】 证明：等式 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

证　令 $\varphi=\arcsin x$,

则　$x=\sin\varphi$.

从而　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=x$.

又因为　$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,

故　$0\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\pi$.

因此　$\frac{\pi}{2}-\varphi=\arccos x$.

即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

【775】 证明:等式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x(x\neq 0)$.

证 当 $x>0$ 时,令 $\varphi=\arctan x$,

则得 $\tan\varphi=x$,

且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

又 $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x$,

故 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}$,

且 $0<\frac{\pi}{2}-\varphi<\frac{\pi}{2}$,

故 $\frac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\frac{1}{x}$.

即 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\qquad(x>0)$.

当 $x<0$ 时,令 $\psi=\arctan x$,

则 $x=\tan\psi$,

且 $-\frac{\pi}{2}<\psi<0$,

又 $\cot\left(-\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\tan\psi=x$,

即 $\tan\left(-\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\frac{1}{x}$,

并且 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}-\psi<0$,

故 $-\frac{\pi}{2}-\psi=\arctan\frac{1}{x}$,

即 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\qquad(x<0)$.

总之，当 $x \neq 0$ 时，$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$.

【776】 证明反正切相加定理：

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon = \varepsilon(x,y)$ 是取值 0,1,−1 三者之一的函数.

在已知 x 的值中，什么样的 y 值能使函数 ε 可能不连续？在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的对应域并求出此函数在所求得的域内的数值.

证　设 $\varphi = \arctan x, \quad \psi = \arctan y$

则　$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},$

故有　$-\pi < \varphi + \psi < \pi.$

若 $xy \leqslant 0$，则 $-\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi < \frac{\pi}{2}$.

若 $x > 0, y > 0$，则 $0 < \varphi + \psi < \pi$.

再讨论 $\varphi + \psi$ 位于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 还是 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

由　$0 < \varphi + \psi < \frac{\pi}{2},$

得　$0 < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2},$

即　$0 < \arctan x < \frac{\pi}{2} - \arctan y,$

亦即　$x < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan y\right) = \cot(\arctan y) = \frac{1}{y}.$

故　$xy < 1,$

因此，当 $x > 0, y > 0, xy < 1$ 时，

$$\varphi + \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

同理，当 $x > 0, y > 0, xy > 1$ 时，$\varphi + \psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

同法可证,当 $x<0,y<0,xy<1$ 时,$\varphi+\psi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

当 $x<0,y<0,xy>1$ 时,$\varphi+\psi\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

总之,若 $xy<1$,则 $\varphi+\psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

若 $x>0,xy>1$,则 $\varphi+\psi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

若 $x<0,xy>1$,则 $\varphi+\psi\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

设 $u=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$,

则 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$.

由和角公式,有 $\tan(\varphi+\psi)=\frac{x+y}{1-xy}=\tan u$.

因此当 $-\frac{\pi}{2}<\varphi+\psi<\frac{\pi}{2}$ 时,$\varphi+\psi=u$.

当 $\frac{\pi}{2}<\varphi+\psi<\pi$ 时,$\varphi+\psi=u+\pi$.

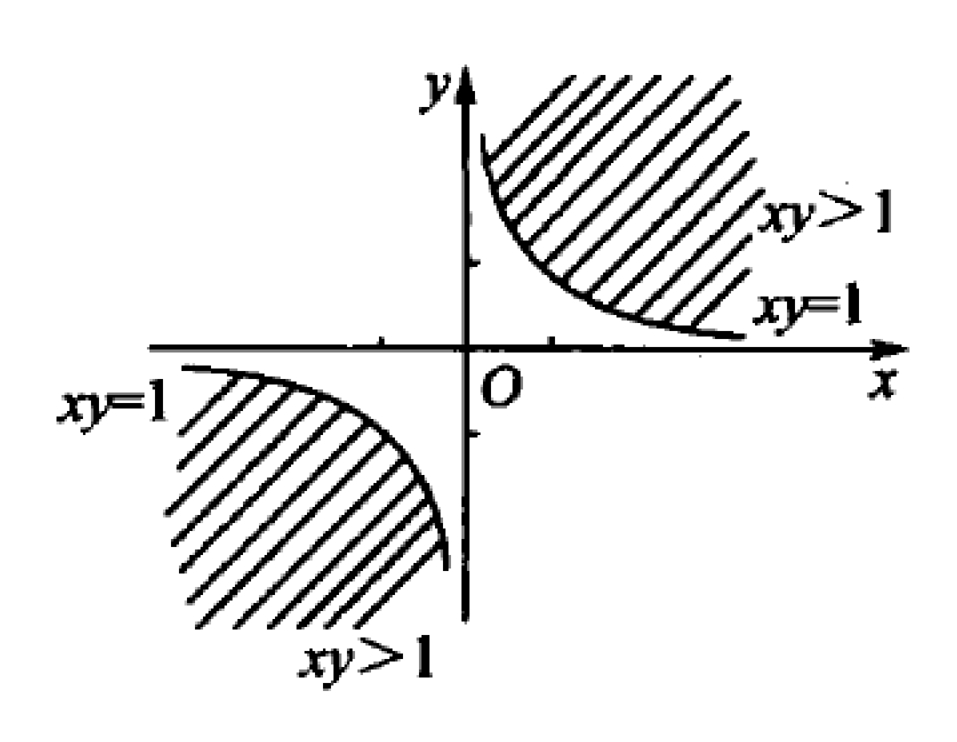
当 $-\pi<\varphi+\psi<-\frac{\pi}{2}$ 时,$\varphi+\psi=u-\pi$.

因此

$$\arctan x+\arctan y=\begin{cases}\arctan\frac{x+y}{1-xy}, & 若\ xy<1,\\ \pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}, & 若\ x>0,xy>1,\\ -\pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy} & 若\ x<0,xy>1.\end{cases}$$

当 x 固定时,若 $y=\frac{1}{x}$,则 ε 不连续.因为此时(例如设 $x>0$),当 $y>\frac{1}{x}$ 时,$\varepsilon\equiv1$,而当 $y<\frac{1}{x}$ 时,$\varepsilon\equiv0$.如 776 题图所示,曲线 xy

$=1$ 为函数 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 的不连续域.



776 题图

【777】 证明反正弦相加定理:

$$\arcsin x+\arcsin y$$
$$=(-1)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi$$
$$(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1).$$

其中 $\varepsilon=\begin{cases}0, & 若\ xy\leqslant 0\ 或\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ \operatorname{sgn}x, & 若\ xy>0\ 且\ x^2+y^2>1.\end{cases}$

证 令

$$u=\arcsin x+\arcsin y\qquad(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1)$$

因为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以 $\quad -\pi\leqslant u\leqslant\pi.$

令 $\quad v=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$,

则 $\quad -\dfrac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

并且 $\quad \sin u=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin v.$

u 有三种可能的情形.

情形 Ⅰ

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2},$$

若 $xy \leqslant 0$，则或者 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 及 $-1 \leqslant y \leqslant 0$，或者 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 及 $0 \leqslant y \leqslant 1$，因而 $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$，

及 $$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant 0,$$

或 $$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant 0,$$

及 $$0 \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

故 $$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0, y > 0$，显然 $u \geqslant 0$，要使 $u \leqslant \frac{\pi}{2}$，即

$$\arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

从而 $$0 < \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y < \frac{\pi}{2}.$$

由于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内，正弦函数是增函数. 故

$$\sin(\arcsin x) \leqslant \sin(\arccos y),$$

即 $$x \leqslant \sqrt{1-y^2},$$

亦即 $$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

同法可证，若 $x < 0, y < 0$，则 $-\frac{\pi}{2} \leqslant u < 0$，

相当于 $$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

因此，当 $xy \leqslant 0$ 或 $x^2 + y^2 \leqslant 1$，时 $u = v$.

情形 Ⅱ

$$\frac{\pi}{2} < u \leqslant \pi,$$

当 $$\frac{\pi}{2} < u \leqslant \pi$$

时，必有 $x > 0, y > 0$.

条件$\frac{\pi}{2}<\arcsin x+\arcsin y\leqslant\pi$,

即 $$\frac{\pi}{2}>\arcsin x>\frac{\pi}{2}-\arcsin y>0.$$

从而 $$x>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin y\right)=\sqrt{1-y^2},$$

即 $$x^2+y^2>1,$$

因此,当 $x>0,y>0$ 且 $x^2+y^2>1$ 时,$u=\pi-v$.

情形 Ⅲ

$$-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2},$$

此时,必有 $x<0,y<0$. 且 $-\pi\leqslant\arcsin x+\arcsin y<-\frac{\pi}{2}$,

即 $$\frac{\pi}{2}<\arcsin(-x)+\arcsin(-y)<\pi,$$

由情形 Ⅱ 的讨论知,有

$$x^2+y^2>1,$$

因此,当 $x<0,y<0$, $x^2+y^2>1$ 时 $u=-\pi-v$.

总之 $\arcsin x+\arcsin y=$

$$\begin{cases}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),\\ \qquad\qquad \text{若 } xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ \pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),\\ \qquad\qquad \text{若 } x>0,y>0,x^2+y^2>1,\\ -\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),\\ \qquad\qquad \text{若 } x<0,y<0,x^2+y^2>1,\end{cases}$$

即

$$\arcsin x+\arcsin y$$
$$=(-1)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi.$$

其中 $\varepsilon=\begin{cases}0, & \text{若 } xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ \operatorname{sgn}x, & \text{若 } xy>0 \text{ 及 } x^2+y^2>1,\end{cases}$

$(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1)$.

【778】 证明反余弦相加定理:

$$\arccos x+\arccos y$$
$$=(-1)^{\varepsilon}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})+2\pi\varepsilon$$
$$(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1).$$

其中 $\varepsilon=\begin{cases}0, & \text{若 } x+y\geqslant 0,\\ 1, & \text{若 } x+y<0.\end{cases}$

证 设 $u=\arccos x+\arccos y$

因为 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\arccos y\leqslant\pi$,

故 $0\leqslant u\leqslant 2\pi$.

若 $0\leqslant u\leqslant\pi$,

则 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi-\arccos y\leqslant\pi$,

而余弦函数在$[0,\pi]$上是减函数. 因此

$$x\geqslant\cos(\pi-\arccos y)=-y,$$

即 $x+y\geqslant 0$.

同理可得,若 $\pi<u\leqslant 2\pi$,

则 $x+y<0$.

再设 $v=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$,

则 $0\leqslant v\leqslant\pi$.

由和角公式有

$$\cos u=\cos(\arccos x+\arccos y)$$
$$=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=\cos v,$$

因此,若 $0\leqslant u\leqslant\pi$,

则 $u=v$.

若 $\pi<u\leqslant 2\pi$,

则 $u=2\pi-v$,

即 $\arccos x+\arccos y$

$$=(-1)^{\varepsilon}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})+2\pi\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon=\begin{cases}0, & 若 x+y\geqslant 0,\\ 1, & 若 x+y<0.\end{cases}$

【779】 作出以下函数的图形：

(1) $y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})-2\arcsin x$.

解 (1) 因为

$$x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2=1.$$

由 777 题的结果有

$$\begin{aligned}y&=\arcsin x+\arcsin(-\sqrt{1-x^2})\\&=\arcsin\left(x\sqrt{1-(1-x^2)}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\right)\\&=\arcsin(x\mid x\mid-1+x^2).\end{aligned}$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$,

若 $0<x\leqslant 1$ 时，$y=\arcsin(2x^2-1)$

$$=2\arcsin x-\frac{\pi}{2},$$

因此 $y=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & 当 -1\leqslant x\leqslant 0 时,\\ 2\arcsin x-\dfrac{\pi}{2}, & 当 0<x\leqslant 1 时.\end{cases}$

如 779 题图 1 所示

(2) 由 777 题的结果有

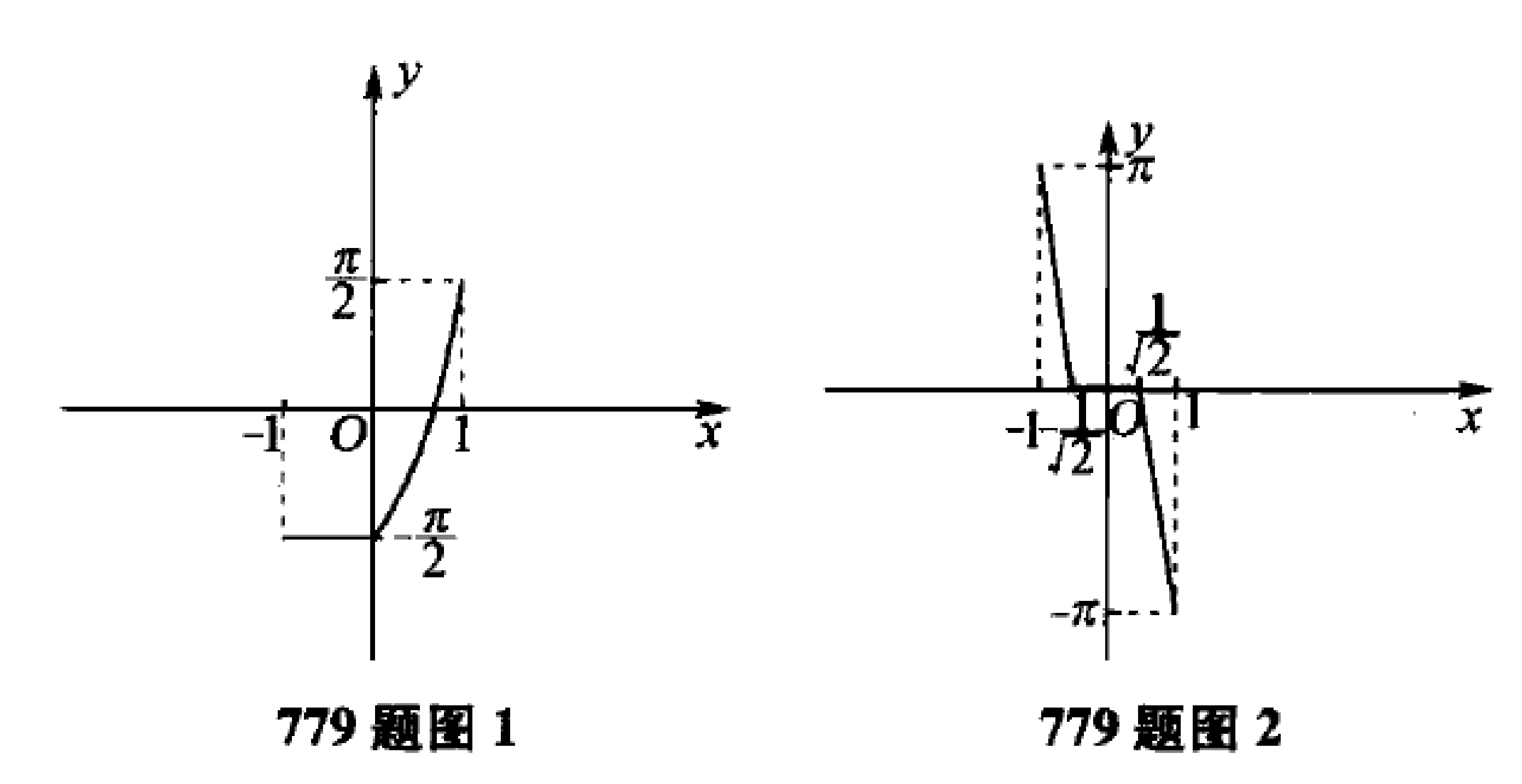
$$2\arcsin x=\arcsin x+\arcsin x$$

$$=\begin{cases}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & 若 \mid x\mid\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi\operatorname{sgn}x-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & 若 \dfrac{1}{\sqrt{2}}<\mid x\mid\leqslant 1,\end{cases}$$

故

$$y=\begin{cases}-(\pi+4\arcsin x), & 当 -1\leqslant x<\frac{1}{\sqrt{2}},\\ 0, & 当 -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi-4\arcsin x, & 当 \frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

如 779 题图 2 所示.



779 题图 1　　　　**779 题图 2**

【780】 设方程式

$$x=\arctan t,\qquad y=\operatorname{arccot} t\qquad(-\infty<t<+\infty)$$

给出函数 $y=y(x)$，求 $y=y(x)$.

问在怎样的域内该函数才有定义?

解 由条件有

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\qquad 0<y<\pi,$$

且 $\qquad \tan x=t,\qquad \cot y=t$

即得 $\qquad \cot y=\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$

且当 $\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$

时 $\qquad 0<\frac{\pi}{2}-x<\pi,$

因此 $\qquad y=\frac{\pi}{2}-x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$

【781】 设 $x=\mathrm{ch}t, y=\mathrm{sh}t(-\infty<t<+\infty)$，在怎样的参数 t 变化域可以把变数 y 看作是变数 x 的单值函数？求出对于各个域上 y 的表达式.

解 由于

$$x=\mathrm{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},$$

$$y=\mathrm{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

所以 $x^2-y^2=1.$

当 $\mathrm{sh}t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\geqslant 0$ 时，

即 $e^t\geqslant e^{-t}$,

或 $e^{2t}\geqslant 1$,

亦即 $t\geqslant 0$ 时，

$$y=\sqrt{x^2-1}.$$

当 $t<0$ 时 $y=-\sqrt{x^2-1}$.

不论 t 取何值，都有 $x\geqslant 1$，故 $\sqrt{x^2-1}$ 有意义.

【782】 要使方程组

$$x=\varphi(t), y=\psi(t) \qquad (\alpha<t<\beta)$$

将 y 定义为 x 的单值函数的必要且充分的条件是什么？

研究实例：$x=\sin^2 t, y=\cos^2 t$.

解 将 y 定义为 x 的单值函数的必要且充分条件为对任意给定的 x，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明，先证必要性，倘若不然，则存在 x_0 及 $t_1\neq t_2$，使 $\varphi(t_1)=\psi(t_2)=x_0$ 且 $\psi(t_1)\neq\psi(t_2)$. 于是，对于这样的 x_0，有两个不同的 y 值 $y_1=\psi(t_1)$，$y_2=\psi(t_2)$ 和它对应. 故 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此，使 $\varphi(t)=x$ 的一切值，$\psi(t)$ 应有同一值.

再证充分性，对任一 x，取 t_0 使 $x=\varphi(t_0)$ 定义与 x 对应 y 为 $y=\psi(t_0)$.

这样定义的函数 $y=y(x)$ 不因 t_0 的不同选取而不同，它由 x 唯一确定. 从而 y 定义为 x 的单值函数.

【783】 问在什么条件下，以下两个方程组

$$x=\varphi(t), y=\psi(t) \qquad (a<t<b)$$

和
$$x=\varphi(\chi(\tau)), y=\psi(\chi(\tau)) \qquad (\alpha<\tau<\beta)$$

能定义同一个函数 $y=y(x)$?

解 当 $\alpha<\tau<\beta$ 时，函数 $x(\tau)$ 的值的集应为区间 (a,b)，即 $x[(\alpha,\beta)]=(a,b)$

【784】 假设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义而且是连续的，且 $A=\inf\limits_{a<x<b}\varphi(x)$，$B=\sup\limits_{a<x<b}\varphi(x)$.

在什么情况下存在在区间 (A,B) 有定义的单值函数 $f(x)$，使得在 $a<x<b$ 时，$\psi(x)=f[\varphi(x)]$?

解 设 $u=\varphi(x)$， $v=\psi(x)$

显然，要求对于使 $\varphi(x)=u$ 的一切 x 值 $(A<u<B)$，函数 $\psi(x)$ 应取同一值. 这时对 $u\in(A,B)$，可定义

$$f(u)=\psi(x)=v,$$

其中 x 为满足 $\varphi(x)=u\ (a<x<b)$ 的任何数. 上述条件保证了这样定义的 $v=f(u)$ 是单值的.

§9. 函数的一致连续性

1. 一致连续性的定义

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任何数值 $x',x''\in X$，由不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

可得出不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，

则称函数 $f(x)$ 在已知集(开区间，闭区间等)$X=\{x\}$ 上为一致连续函数的.

2. 康托尔定理

在有界闭区间 $[a,b]$ 内有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间

上一致连续.

【785】 某工厂的车间制造正方形薄板，其边长 x 可在 1 厘米到 10 厘米范围内取值，为了使(在上述范围内) 不论何种边长薄板的面积 y 与原设计的差小于 ε，问能以多大的公差 δ 加工这些薄板的边长?(1) $\varepsilon = 1$ 平方厘米;(2) $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米;(3) $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米，求 ε 的值.

解 $y = x^2(1 \leqslant x \leqslant 10)$，由于

$$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''||x' + x''| \leqslant 20|x' - x''|.$$

于是对任给的 $\varepsilon > 0$，要 $|x'^2 - x''^2| < \varepsilon$，

只要 $|x' - x''| < \dfrac{\varepsilon}{20}$ 即可.

于是，在加工薄板边长时，只要取公差 $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{20}$，当 $|x' - x''| < \delta$ 时，即可满足要求.

(1) 当 $\varepsilon = 1$ 平方厘米时，$\delta \leqslant \dfrac{1}{20} = 0.05$ 厘米.

(2) 当 $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米时，$\delta \leqslant \dfrac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米.

(3) 当 $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米时，

$$\delta \leqslant \frac{0.0001}{20} = 0.000005 \text{ 厘米}.$$

【786】 圆柱形套筒的宽度为 ε，长度为 δ，将套筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上并沿此曲线滑动，此时套筒的轴仍然保持平行于 Ox 轴，为了使此套筒顺利地通过曲线上由不等式 $-10 \leqslant x \leqslant 10$ 所确定的曲线段，问 δ 应该等于多少?设(1) $\varepsilon = 1$;(2) $\varepsilon = 0.1$;(3) $\varepsilon = 0.01$;(4) ε 为任意小数时.

解 $y = \sqrt[3]{x}$. 对于 $y' \neq y''$，由于

$$|y' - y''| = \left|\frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2}\right|$$

$$=\left|\frac{y'^3-y''^3}{\frac{3}{4}(y'+y'')^2+\frac{1}{4}(y'-y'')^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{|y'^3-y''^3|}{\frac{1}{4}|y'-y''|^2},$$

即 $\frac{1}{4}|y'-y''|^3\leqslant|y'^3-y''^3|=|x'-x''|.$

从而 $|y'-y''|\leqslant\sqrt[3]{4|x'-x''|}.$

对于任给的 $\varepsilon>0$,要

$$|y'-y''|<\varepsilon,$$

只要 $|x'-x''|<\frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0<\delta\leqslant\frac{\varepsilon^2}{4}$,

则当 $|x'-x''|<\delta$

时,恒有 $|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}|<\varepsilon.$

(1) 当 $\varepsilon=1$ 时,$\delta\leqslant\frac{1}{4}$.

(2) 当 $\varepsilon=0.1$ 时,$\delta\leqslant2.5\times10^{-4}$.

(3) 当 $\varepsilon=0.01$ 时,$\delta\leqslant2.5\times10^{-7}$.

(4) 当 ε 为任意数时,$\delta\leqslant\frac{\varepsilon^3}{4}$.

【787】 用"$\varepsilon-\delta$"语言表述法,正面表达以下论断:函数 $f(x)$ 在某集(开区间,闭区间等等)内是连续的,但在这个集内并非一致连续.

解 设集合为 E. 所需论断的"$\varepsilon-\delta$"说法如下:对于任给的 $\varepsilon>0$ 及 $x_0\in E$,总存在一个数 $\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

同时,至少存在一个 $\varepsilon_0>0$,使对于任意给定的 $\delta>0$,至少存在两

点 $x_1, x_2 \in E$,满足 $|x_1 - x_2| < \delta$,但

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0.$$

【788】 证明:函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是连续的,但在此区间内并非一致连续.

证 连续性是显然的,现证 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续. 考虑 $(0,1)$ 内的两个点列

$$x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{n+1},$$

则对于固定的 ε_0,只要 $0 < \varepsilon_0 < 1$,对任意的 $\delta > 0$,当 $n > \sqrt{\frac{1}{\delta}}$ 时,

有 $|x_n - x'_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \delta$,

但 $$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0,$$

因此 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上并非一致连续.

【789】 证明:函数 $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是连续的,但在此区间内并非一致连续.

证 由基本初等函数在其定义域的连续性知,当 $x \neq 0$ 时,$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ 是连续的. 同时 $|f(x)| \leqslant 1$,即 $f(x)$ 是有界的. 现

设 $$x_n = \frac{2}{n}, x'_n = \frac{2}{n+1} \quad (n > 2),$$

则 $$x_n \in (0,1), x'_n \in (0,1).$$

当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时,对任给的 δ,当 $n > \sqrt{\frac{2}{\delta}}$ 时,总有

$$|x_n - x'_n| = \frac{2}{n(n+1)} < \frac{2}{n^2} < \delta.$$

但 $$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0,$$

因此，$f(x)$ 在$(0,1)$ 上并非一致连续.

【790】 证明：函数 $f(x)=\sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty<x<+\infty$ 上是连续的且有界，但在此区间内并非一致连续.

证 由基本初等函数在其定义域内的连续性知，$f(x)=\sin x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $|\sin x^2|\leqslant 1$，即 $f(x)$ 有界. 现证 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内不一致连续.

考虑$(-\infty,+\infty)$ 内的两个点列

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\qquad x'_n=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}\qquad (n=1,2,\cdots),$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时，对任给的 $\delta>0$，只要 n 充分大时，总有

$$|x_n-x'_n|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}+\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}}<\delta.$$

但是 $\quad |f(x_n)-f(x_n)|=1>\varepsilon_0,$

因此，$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内不一致连续.

【791】 证明：如果函数 $f(x)$ 在域 $a\leqslant x<+\infty$ 内有定义并且是连续的，且存在有限的 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)$，则 $f(x)$ 在此域内是一致连续的.

证 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

则任给 $\varepsilon>0$，存在 $R>a$，使得当 $x>R$ 时，

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当 $x'>R,x''>R$ 时

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon,$$

又由于 $f(x)$ 在$[a,R+1]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在$[a,R+1]$ 上一致连续. 故对于上面给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当

$$x'\in[a,R+1],\qquad x''\in[a,R+1],$$

且 $\quad |x'-x''|<\delta_1$ 时，

恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

令 $\delta=\min\{\delta_1,1\}.$

设 $x',x''\in[a,+\infty),$

且 $|x'-x''|<\delta,$

从而 x',x'' 或者同时属于$[a,R+1]$，或者同时满足 $x'>R,x''>R$. 因此，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，故 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上一致连续.

【792】 证明：无界函数 $f(x)=x+\sin x$ 在全轴 $-\infty<x<+\infty$ 上是一致连续的.

证 因为

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|(x'-x'')+(\sin x'-\sin x'')|\\&\leqslant|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|\leqslant 2|x'-x''|,\end{aligned}$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，

则当 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，

恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

故 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

【793】 函数 $f(x)=x^2$ 在以下区间是一致连续的吗？

(1) $(-l,l)$，此处 l 是任意大的正数；

(2) 在区间$(-\infty,+\infty)$ 内.

解 (1) 当 $x',x''\in(-l,l)$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|x'+x''||x'-x''|\\&\leqslant 2l|x'-x''|,\end{aligned}$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2l}$，则当 $x',x''\in(-l,l)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，故 $f(x)$ 在$(-l,l)$ 上一致连续.

(2) 在$(-\infty,+\infty)$ 上，对于 $\varepsilon_0=1$，考虑两点列

$$x_n = n, x'_n = n + \frac{1}{n},$$

则对于任意的 $\delta > 0$，当 $n > \frac{1}{\delta}$ 时，$|x'_n - x_n| = \frac{1}{n} < \delta'$.

但是 $|f(x'_n) - f(x_n)| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^n > \varepsilon_0$，

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.

研究以下函数在指定域内的一致连续性(794 ~ 800).

【794】 $f(x) = \frac{x}{4-x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致连续.

【795】 $f(x) = \ln x \qquad (0 < x < 1)$.

解 取

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\ln 2,$$

考虑点列 $x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{2n} \qquad (n = 2,3,\cdots)$，

对于任给的 $\delta > 0$，当 $n > \frac{1}{2\delta}$ 时，$|x_n - x'_n| = \frac{1}{2n} < \delta$.

但是 $\qquad |f(x_n) - f(x'_n)| = \ln 2 > \varepsilon_0$，

因此，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内非一致连续.

【796】 $f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad (0 < x < \pi)$.

解 由于 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

定义函数 $F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$

显然 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，因而 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上一致连续. 因此 $f(x)$ 也在 $(0,\pi)$ 上一致连续.

【797】 $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}\qquad(0<x<1)$.

解 取 $\varepsilon_0=1$.

令 $x_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$,

$x'_n=\dfrac{1}{n\pi}$ (n 为正整数),

则 x_n 及 x'_n 均属于(0,1). 对任意给定的 $\delta>0$,当 $n>\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\delta}}$ 时,

总有 $|x_n-x'_n|=\dfrac{1}{(2n+1)n\pi}<\dfrac{1}{2\pi n^2}<\delta$.

但是 $|f(x_n)-f(x'_n)|$

$$=\left|e^{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-e^{\frac{1}{n\pi}}\cos n\pi\right|$$

$$=e^{\frac{1}{n\pi}}>1=\varepsilon_0,$$

因此,$f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)上非一致连续.

【798】 $f(x)=\arctan x\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 及 $[0,+\infty)$ 上连续,并且

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

由 791 题知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 及 $[0,+\infty)$ 上均一致连续. 于是,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$,当 $x_1,x_2\in(-\infty,1]$,且 $|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$ 时,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$
成立. 又存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$,当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$ 时,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$
成立. 现取 $\delta=\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$,
则当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty,1]$,或同时属于 $[0,+\infty)$,故恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

因此,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

【799】 $f(x)=\sqrt{x}\qquad(1\leqslant x<+\infty)$.

解 因为，当 $x_1\geqslant 1,x_2\geqslant 1$ 时，有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{2}.$$

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$，且 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 时，恒有 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$，

因此，$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$ 上一致连续.

【800】 $f(x)=x\sin x\qquad(0\leqslant x<+\infty)$.

解 在$[0,+\infty)$ 区间上选取两点列

$$x_n=2n\pi,\qquad x'_n=2n\pi+\frac{1}{n},$$

则
$$|x'_n-x_n|=\frac{1}{n}\to 0(n\to+\infty),$$

而
$$|f(x'_n)-f(x_n)|=\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}$$
$$=2n\pi\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=0$,

$$\lim_{n\to\infty}2n\pi\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}2\pi\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=2\pi,$$

所以
$$|f(x'_n)-f(x_n)|\to 2\pi(n\to\infty).$$

现取 $\varepsilon_0=\pi$，于是，不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有

$$|x'_n-x_n|=\frac{1}{n}<\delta.$$

但
$$|f(x'_n)-f(x_n)|>\pi=\varepsilon_0,$$

因此，$f(x)=x\sin x$ 在区间$[0,+\infty)$ 上不是一致连续的.

【801】 证明：函数 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$

在区间 $J_1=(-1<x<0)$ 和 $J_2=(0<x<1)$

内分别一致连续，但在它们的和

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$$

上并非一致连续.

证　在 $J_1=(-1,0)$ 上

$$f(x)=-\frac{\sin x}{x},\lim_{x\to-0}f(x)=-1,$$

且 $$f(x)=-\frac{\sin x}{x},$$

在 $(-\infty,0]$ 上连续，所以定义

$$F(x)=\begin{cases}-1, & x=0,\\ -\dfrac{\sin x}{x}, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，从而一致连续，因而 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上一致连续. 同理，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上也一致连续. 由于

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

故必存在 $\eta>0(\eta<1)$，使当

$$0<x_1<\eta,\qquad -\eta<x_2<0$$

时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|>1$.

现取 $\varepsilon_0=1$，则不论 $\delta>0$ 取多么小，都存在两点 x_1,x_2，使

$$0<x_1<\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\},-\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}<x_2<0.$$

于是 $$|x_1-x_2|<\delta,$$

但 $$|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon_0,$$

因此，$f(x)$ 在 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$ 上不一致连续.

【801.1】　证明：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 中的每一个区间内一致连续，则此函数在总和区间 $[a,b]$ 内也一致

连续.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上一致连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$,使得当 $x_1,x_2\in[a,c]$,

且 $$|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$$

时,恒有 $$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

同样,存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$,使得当 $x_1,x_2\in[c,b]$,且
$$|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$$

时,恒有 $$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $\delta=\min\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$,

则当 $x_1,x_2\in[a,b]$,且 $|x_1-x_2|<\delta$

时,若 x_1,x_2 位于 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 中的同一区间,则有
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

若 x_1,x_2 位于 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 中的不同区间上,则 c 位于 x_1 和 x_2 之间,所以 $|x_1-c|<\delta$, $|x_2-c|<\delta$,

因而,恒有 $$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-c|+|f(x_2)-c|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

因此,当 $x_1,x_2\in[a,b]$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,恒有
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

【802】 对于 $\varepsilon>0$,求使函数 $f(x)$ 在已知区间内满足一致连续的条件的 $\delta=\delta(\varepsilon)$(任意的!),若

(1) $f(x)=5x-3\qquad(-\infty<x<+\infty)$;

(2) $f(x)=x^2-2x-1\qquad(-2\leqslant x\leqslant 5)$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}\qquad(0.1\leqslant x\leqslant 1)$;

(4) $f(x)=\sqrt{x}\qquad(0\leqslant x<+\infty)$;

(5) $f(x)=2\sin x-\cos x \qquad (-\infty<x<+\infty)$;

(6) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x} \qquad (x\neq 0)$

及 $\qquad f(0)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant \pi)$.

解 (1) $|f(x_1)-f(x_2)|=5|x_1-x_2|$,

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ 即可.

(2) $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2||x_1+x_2-2|$,

由于 $\qquad -2\leqslant x\leqslant 5$,

故 $\qquad |x_1+x_2-2|\leqslant 8$,

于是,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{8}$ 即可.

(3) 当 $0.1\leqslant x_1\leqslant 1, 0.1\leqslant x_2\leqslant 1$ 时,

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{0.01}.$$

于是,取 $\delta=0.01\varepsilon$ 即可.

(4) 当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时,显然有不等式

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

成立.对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2$,则当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有

$$\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2+\delta}\leqslant\sqrt{x_2}+\sqrt{\delta}=\sqrt{x_2}+\varepsilon,$$

同理,有 $\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{x_1}+\varepsilon$,

即 $\qquad |\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$.

(5) $|f(x_1)-f(x_2)|$

$$\begin{aligned}&\leqslant 2|\sin x_1-\sin x_2|+|\cos x_1-\cos x_2|\\&\leqslant 2|x_1-x_2|+\left|\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)\right|\\&=3|x_1-x_2|,\end{aligned}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ 即可.

(6) 任给 $\varepsilon>0$，当 $x_1,x_2\in\left[\frac{\varepsilon}{3},\pi\right]$时，有

$$\begin{aligned}
&|f(x_1)-f(x_2)|\\
&=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\\
&=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_1\sin\frac{1}{x_2}+x_1\sin\frac{1}{x_2}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\\
&\leqslant|x_1|\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|\left|\sin\frac{1}{x_2}\right|\\
&\leqslant|x_1|\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|\\
&=\left(\frac{1}{x_2}+1\right)|x_1-x_2|\leqslant\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}|x_1-x_2|,
\end{aligned}$$

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right\}$，

设 $x_1,x_2\in[0,\pi]$，且 $|x_1-x_2|<\delta$，下面证明必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

不妨设 $x_1<x_2$，若 $x_1\geqslant\frac{\varepsilon}{3}$，则 x_1,x_2 均属于$\left[\frac{\varepsilon}{3},\pi\right]$，故由上面的结论有

$$\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_2)|&\leqslant\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}|x_1-x_2|\\
&<\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

若 $0<x_1<\frac{\varepsilon}{3}$，则

$$x_2=x_2-x_1+x_1<\delta+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\frac{2\varepsilon}{3},$$

故
$$\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_2)|&=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\\
&\leqslant|x_1|+|x_2|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

当 $x_1=0$,则同样有 $x_2<\frac{2\varepsilon}{3}$,

所以 $\quad |f(x_1)-f(x_2)|=\left|0-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant|x_2|<\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon.$

综上所述,当 $x_1,x_2\in[0,\pi]$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

【803】 把闭区间[1,10]划分成多少个彼此相等的线段,才能使函数 $f(x)=x^2$ 在这些线段中每一段上振辐都小于 0.0001?

解 设分为 n 个相等的线段,则对于每段中的任意两点 x_1,x_2 均有 $|x_1-x_2|\leqslant\frac{9}{n}$.

于是
$$|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2||x_1-x_2|\leqslant\frac{(10+10)9}{n}=\frac{180}{n}.$$

按题设,只需 $\frac{180}{n}<0.0001$,

即 $\quad n>1800000$,

因此,把[1,10]等分成至少为 1800000 个等长的线段,就能满足要求.

【804】 证明:在区间 (a,b) 内有穷个一致连续函数的和及其乘积在此区间内仍然是一致连续的.

证 由于有穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数的相加或相乘,故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$,$g(x)$ 都在有限区间 (a,b) 上一致连续,我们先证明.

(1) $f(x)+g(x)$. 任给 $\varepsilon>0$,由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续,存在 $\delta_1>0$,使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

同样,存在 $\delta_2>0$,使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 时,恒有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$,

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,

则当 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,恒有

$$\begin{aligned}&|[f(x_1)+g(x_1)]-[f(x_2)+g(x_2)]|\\ \leqslant&|f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $f(x)+g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

下面我们证明

(2) $f(x)\cdot g(x)$ 在 (a,b) 上连续. 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续,故对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得,当 $x',x''\in(a,b)$,且

$$|x'-x''|<\delta$$

时,恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

特别地,当 $a<x'<a+\delta$, $\quad a<x''<a+\delta$.

时,必有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

由柯西收敛准则,知 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$

存在. 同理

$$f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x),$$
$$g(a+0)=\lim_{x\to a+0}g(x),$$
$$g(b-0)=\lim_{x\to b-0}g(x),$$

存在. 故在 $[a,b]$ 区间上定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时};\\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时};\\ f(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时}.\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}g(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时};\\ g(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时};\\ g(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时}.\end{cases}$$

故 $F(x)\cdot G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续. 所以 $f(x)\cdot g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

注：由证明知，当(a,b)为无穷区间时，(a,b)上一致连续的函数$f(x)$与$g(x)$的和$f(x)+g(x)$也一致连续. 但乘积$f(x)\cdot g(x)$不一定一致连续. 例如，设$(a,b)=(-\infty,+\infty)$，$f(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，但

$$f(x)\cdot f(x)=x^2,$$

在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

【805】 证明：如果单调有界的函数$f(x)$在有穷或无穷的区间(a,b)内是连续的，则此函数在区间(a,b)内是一致连续的.

证 分三种情况讨论

(1) (a,b)为有限区间. 由于$f(x)$在(a,b)上单调有界，故

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x),\quad f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x)$$

均存在且为有限.

在$[a,b]$上定义$F(x)$：

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时；}\\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时；}\\ f(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时.}\end{cases}$$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，从而一致连续，当然在(a,b)上也一致连续. 故$f(x)$在(a,b)上一致连续.

(2) a,b中一个为有限数，一个为无穷大. 不妨设a为有限数，$b=+\infty$(b为有限数，$a=-\infty$的情况，可类似地证明). 因为$f(x)$为单调有界的函数，故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在. 所以，在$[a,+\infty)$上定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } a<x<+\infty \text{ 时，}\\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时，}\end{cases}$$

故$F(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在并为有限数.

由791题的结果知，$F(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，从而$f(x)$在$(a,+\infty)$上一致连续.

(3) $a=-\infty$，$b=+\infty$. 任给$\varepsilon>0$，由(2)的结果知，$f(x)$在

$(0,+\infty)$ 上一致连续,故存在 $\delta_1>0$,使得当 $x',x''\in(0,+\infty)$,且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

同样,$f(x)$ 在$(-\infty,1)$ 上一致连续,故存在 $\delta_2>0$,使得,当 $x',x''\in(-\infty,1)$,且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

令 $\qquad \delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$,

则当 $\qquad |x'-x''|<\delta$,

时,x',x'' 必或者同属于区间 $(0,+\infty)$,或者同属于区间 $(-\infty,1)$,因此,恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,

因此,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

【806】 证明:如果函数 $f(x)$ 在有穷区间(a,b) 内是一致连续的,则存在极限 $A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 和 $B=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

问此定理对于无穷区间(a,b) 是正确的吗?

证 $f(x)$ 在有限区间(a,b) 上一致连续,故对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x',x''\in(a,b)$,且 $|x'-x''|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0,$$

特别,当 $a<x'<a+\delta,a<x''<a+\delta$,时,

恒有 $\qquad |f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$.

由柯西收敛准则

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x)\text{ 存在.}$$

同理 $\qquad B=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 存在.

此定理对无穷区间不成立.例如 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 均不存在.

【806.1】 证明:在有穷区间(a,b) 内有定义且连续的函数 $f(x)$,能用连续的方式延续到闭区间$[a,b]$ 上,其必要和充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 内是一致连续的.

证 必要性:若 $f(x)$ 能用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$

上，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，所以在 (a,b) 上也是一致连续的.

充分性：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，根据 806 题结果知，

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x),$$

与
$$f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x),$$

存在且为有限值，故在 $[a,b]$ 上定义 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时；}\\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时；}\\ f(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时.}\end{cases}$$

显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 $F(x)=f(x)$，即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续延拓.

【807】 函数 $\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$，称作函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的连续模数.（其中 x_1 和 x_2 是 (a,b) 中受条件 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 限制的任意两点）.

证明：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一致连续性的必要且充分条件是 $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

证　必要性：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\eta$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $0<\delta<\eta$，则当 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 时，必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而
$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

充分性：因为 $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$，

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得当 $0<\delta<\eta$ 时，恒有

$\omega_f(\delta) < \varepsilon.$

现设 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 且满足 $|x_1 - x_2| < \eta.$

若 $x_1 = x_2$,则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon,$$

若 $x_1 \neq x_2$,令

$$\delta_1 = |x_1 - x_2|,$$

则 $$0 < \delta_1 < \eta.$$

于是 $$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega_f(\delta_1) < \varepsilon,$$

因此,$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

【808】 若

(1) $f(x) = x^3 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

(2) $f(x) = \sqrt{x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a)$ 及 $(a < x < +\infty)$;

(3) $f(x) = \sin x + \cos x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$(参阅上题)作以下形式的估价:$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^a$

其中 C 和 a 都是常数,

解 (1) 当 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1$

且 $$|x_1 - x_2| < \delta,$$

时 $$|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2||x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leqslant 3\delta.$$

于是 $$\omega_f(\delta) \leqslant 3\delta.$$

(2) 由于 $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$.

当 $0 \leqslant x_1 \leqslant a, 0 \leqslant x_2 \leqslant a$,且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} \leqslant \sqrt{\delta}.$$

于是 $$\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{\delta}.$$

当 $a < x_1 < +\infty, a < x_2 < +\infty$,

且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \dfrac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{a}}.$

于是 $\omega_f(\delta) \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{a}}$.

(3) 因为 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

故
$$|f(x_1) - f(x_2)|$$
$$= \sqrt{2}\left|\sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$
$$= \sqrt{2} \cdot 2\left|\cos\frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right|$$
$$\leqslant \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} \leqslant \sqrt{2}\delta.$$

于是 $\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{2}\delta$.

§10. 函数方程

【809】 证明:对于 x 和 y 的所有实数值满足方程式:
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad ①$$
的唯一的连续函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 为齐次线性函数:
$$f(x) = ax.$$
其中:$a = f(1)$ 是任意的常数.

证 先证:对任何有理数 C,必有
$$f(Cx) = Cf(x).$$
事实上,当 m 与 n 为正整数时
$$f(mx) = f(x + (m-1)x) = f(x) + f((m-1)x)$$
$$= f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \cdots$$
$$= f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = mf(x),$$
$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right),$$
所以 $f\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(x)$.

于是 $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$,

又在 ① 中令 $y=0$,有

$$f(x)=f(x)+f(0).$$

于是 $f(0)=0$,

从而有 $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$,

所以 $f(-x)=-f(x)$.

于是 $f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x)$,

因此,对任何有理数 C,都有

$$f(Cx)=Cf(x)\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

若 C 为无理数,则存在一有理数序列 C_n,使

$$\lim_{n\to\infty}C_n=C.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}C_nx=Cx\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

由 $f(x)$ 的连续性,有

$$f(Cx)=\lim_{n\to\infty}f(C_nx)=\lim_{n\to\infty}C_nf(x)=Cf(x),$$

因而,即对任何实数 C 都

$$f(Cx)=Cf(x)\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

因此,对任何实数 x,有

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax,$$

其中 $a=f(1)$.

【810】 证明:满足方程式①的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性函数.

证 由 809 题的证明知:对任何有理数 C,有

$$f(Cx)=Cf(x).$$

且 $f(0)=0$.

下面,利用 $f(x)$ 的单调性证明上式对任何无理数 C 也成立.我们不妨设 $f(x)$ 为单调增加的,设 C 为无理数,要证明 $f(Cx)=Cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 当 $x=0$,时,显然成立,下面我们只讨

论 $x>0$ 的情形($x<0$ 时可类似地讨论). 取两串有理数$\{r_n\}$ 及 $\{r'_n\}$ 使

$$r_1<r_2<r_3<\cdots<C<\cdots<r'_3<r'_2<r'_1,$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty} r'_n=C.$

由于 $x>0$,故

$$r_1x<r_2x<r_3x<\cdots<Cx<\cdots<r'_3x<r'_2x<r'_1x,$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_nx=\lim\limits_{n\to\infty} r'_nx=Cx.$

由于 $f(x)$ 是单调增加的,故在点 Cx 的左,右极限存在,并且

有 $f(Cx-0)\leqslant f(Cx)\leqslant f(Cx+0).$

而 $f(r_nx)=r_nf(x), f(r'_nx)=r'_nf(x),$

因此 $f(Cx-0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(r_nx)=Cf(x),$

$$f(Cx+0)=\lim_{n\to\infty} f(r'_nx)=Cf(x),$$

故 $f(Cx)=Cf(x),$

故对任何实数 C 及 x 都有

$$f(Cx)=Cf(x).$$

从而 $f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax,$

其中 $a=f(1)$.

【811】 证明:满足方程式①并在某小区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$有界的函数 $f(x)$ 是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明知,对任何有理数 C 有

$$f(Cx)=Cf(x)\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

下面我们证明对于任何无理数 C,上式也成立. 反设存在无理数 C_0 及某实数 x_0,使

$$f(C_0x_0)\neq C_0f(x_0).$$

令 $f(C_0x_0)-C_0f(x_0)=\alpha.$

则 $\alpha\neq 0.$

现选取一有理数列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,使$\lim\limits_{n\to\infty} r_n=C_0$.

于是,对任何正整数 m,有

$$f[m(C_0-r_n)x_0]=mf[(C_0-r_n)x_0]$$
$$=m[f(C_0x_0)-f(r_nx_0)]$$
$$=m(C_0-r_n)f(x_0)+m\alpha$$
$$(n=1,2,3,\cdots;m=1,2,3,\cdots).$$

任给$M>0$,先取定一正整数m,使$m>\frac{2M}{|\alpha|}$对此固定的m,由于

$\lim\limits_{n\to\infty}m(C_0-r_n)x_0=0$,

$$\lim_{n\to\infty}m(C_0-r_n)f(x_0)=0,$$

故可取一个充分大的正整数n,使

$$|m(C_0-r_n)x_0|<\varepsilon,$$
$$|m(C_0-r_n)f(x_0)|<M,$$

令 $\bar{x}=m(C_0-r_n)x_0.$

于是$\bar{x}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,并且

$$|f(\bar{x})|\geqslant m|\alpha|-|m(C_0-r_n)f(x_0)|$$
$$>2M-M=M.$$

由$M>0$的任意性,即知$f(x)$在$(-\varepsilon,\varepsilon)$内无界,与假设矛盾.故对任何无理数$C$,有$f(Cx)=Cf(x)$.

由809题的证明,即可得结论.

【812】 证明:对x和y的所有值满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \qquad ②$$

的唯一不恒等于0的连续函数$f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$是指数函数:$f(x)=a^x$,其中$a=f(1)$为正常数.

证 法一:我们首先证明$f(x)>0$ $(-\infty<x<+\infty)$.事实上,由$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$知$f(x)\geqslant0$.

由于$f(x)\neq0$,故存在x_0,使$f(x_0)>0$.再由

$$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)f(0),$$

可得 $f(0)=1$,

从而对任何实数x,有

$$1=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)\cdot f(-x).$$

故　$f(x)\neq 0$，

因此　$f(x)>0$，

且　$f(-x)=[f(x)]^{-1}$.

当 m 与 n 为正整数时，

$$\begin{aligned}f(mx)&=f((m-1)x+x)\\&=f((m-1)x)f(x)\\&=f((m-2)x)\cdot(f(x))^2\\&=\cdots=[f(x)]^m,\end{aligned}$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n.$$

从而　$f\left(\frac{x}{n}\right)=f(x)^{\frac{1}{n}}$.

于是　$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}$，

又　$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}$.

因此，对任何有理数 C，有

$$f(Cx)=[f(x)]^C\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

对无理数 C，可选取一有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$\lim_{n\to\infty}r_n=C.$$

从而　$\lim\limits_{n\to\infty}r_nx=Cx$.

由 $f(x)$ 及指数函数的连续性，我们有

$$f(Cx)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}[f(x)]^{r_n}=[f(x)]^C.$$

因此，对任何实数 C 及 x，有 $f(Cx)=[f(x)]^C$.

从而　$f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x$，

其中　$a=f(1)>0$.

法二：根据前面的证明，有 $f(x)>0$，令

$$F(x)=\log_a f(x),$$

这里 $a=f(1)>0$，于是 $F(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上连续，并且

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a f(x)f(y)$$
$$=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

由 809 题的结果，知 $F(x)=Ax$

这里 $A=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1.$

从而 $\quad F(x)=x,$

因此 $\quad f(x)=a^x.$

【813】 证明：在区间 $(0,\varepsilon)$ 内有界并且满足方程 ② 的不恒等于 0 的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 题的证明知：$f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$，并且对任何有理数 C，有

$$f(Cx)=[f(x)]^C,f(0)=1.$$

下面证明对任何无理数 C，也有

$$f(Cx)=[f(x)]^C \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

反设存在某无理数 C_0 及某实数 x_0，使得

$$f(C_0x_0)\neq[f(x_0)]^{C_0},$$

因为 $\quad f(0)=1,$

所以 $\quad x_0\neq 0.$

不妨设 $x_0>0$. 设 $\alpha=\dfrac{f(C_0x_0)}{[f(x_0)]^{C_0}}$，

则 $\alpha>0$，$\alpha\neq1$. 若 $\alpha>1$，选取一有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使得

$$r_1<r_2<r_3<\cdots<C_0,$$

且 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}r_n=C_0.$

于是对任何正整数 m，有

$$f[m(C_0-r_n)x_0]=\{f[(C_0-r_n)x_0]\}^m$$
$$=f(C_0x_0)^m\cdot f(-r_nx_0)^m$$
$$=\alpha^m\cdot[f(x_0)]^{m(C_0-r_n)}.$$

对于任给的 $G>0$，先取定一个正整数 m，使 $\alpha^m>2G$. 而对于

此固定的 m 有

$$\lim_{n\to\infty} m(C_0-r_n)x_0=0,\lim_{n\to\infty}[f(x_0)]^{m(C_0-r_n)}=1.$$

故存在一个充分大的 n，使得

$$0<m(C_0-r_n)x_0<\varepsilon,[f(x_0)]^{m(C_0-r_n)}>\frac{1}{2}.$$

于是令 $\bar{x}=m(C_0-r_n)x_0$，

则 $\bar{x}\in(0,\varepsilon)$，且 $f(\bar{x})>2G\cdot\frac{1}{2}=G$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 内无界. 若 $\alpha<1$，则选取有理数列 $\{r'_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$r'_1>r'_2>r'_3>\cdots>C_0,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n=C_0$.

于是对任何正整数 m，有

$$f[-m(C_0-r'_n)x_0]=\alpha^{-m}[f(x_0)]^{-m(C_0-r'_n)},$$

与前面一样的讨论可得到矛盾. 因此，对任何无理数 C，有 $f(Cx)=[f(x)]^C$.

故对任何实数 C 及 x，有 $f(Cx)=[f(x)]^C$.

从而 $f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x$，

这里 $a=f(1)>0$.

【814】 证明：对于 x 和 y 的所有正值满足方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ 是对数函数：$f(x)=\log_a x$，其中 a 是正数常数 $(a\neq 0)$.

证 由 $f(xy)=f(x)+f(y)$，

有 $f(x)=f(x\cdot 1)=f(x)+f(1)$.

从而 $f(1)=0$，由于 $f(x)\not\equiv 0$，故存在 $x_0>0$，使得 $f(x_0)\neq 0$，先考虑 $f(x_0)>0$ 的情况. 由于

$$f(x_0^n)=f(x_0)+f(x_0^{n-1})=\cdots$$
$$=nf(x_0)\to+\infty\qquad(n\to\infty).$$

由连续函数的性质知，在 1 与 x_0^n 之间必存在 $a(a>0)$，使得

$f(a)=1$. 现考虑函数

$$F(x)=f(a^x)\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

显然 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且满足

$$F(x+y)=f(a^{x+y})=f(a^x\cdot a^y)$$
$$=f(a^x)+f(a^y)=F(x)+F(y).$$

由 809 题的结果知

$$F(x)=Ax\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $\quad A=F(1)=f(a)=1,$

即 $\quad F(x)=x.$

亦即 $\quad f(a^x)=x.$

令 $\quad a^x=y,$

则 $\quad x=\log_a y,$

于是 $\quad f(y)=\log_a y\qquad(0<y<+\infty).$

若 $f(x_0)<0$，则设 $g(x)=-f(x)$，

于是 $g(x_0)>0$，且 $g(x)$ 也满足

$$g(xy)=g(x)+g(y).$$

根据前面的证明，有

$$g(y)=\log_{a_1}y\qquad(0<y<+\infty),$$

其中 $a_1>0$. 即

$$-f(y)=\log_{a_1}y,$$

或 $\quad f(y)=-\log_{a_1}y.$

令 $a=\dfrac{1}{a_1}$，则 $a>0$，且

$$f(y)=-\log_{a_1}y=\log_a y\qquad(0<y<+\infty).$$

【815】 证明：对于 x 和 y 的所有正值满足方程

$$f(xy)=f(x)f(y)\tag{③}$$

的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ 是幂函数：$f(x)=x^a$，其中 a 为常数.

证 设 $F(x)=f(e^x)\qquad(-\infty<x<+\infty),$

则 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续,不恒为零的函数,并且满足

$$F(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^x\cdot e^y)$$
$$=f(e^x)\cdot f(e^y)=F(x)\cdot F(y).$$

根据 812 题的结果,有 $F(x)=b^x\quad(-\infty<x<+\infty)$,其中 $b>0$,即 $f(e^x)=b^x\quad(-\infty<x<+\infty)$.

令 $e^x=y$,则 $y\in(0,+\infty)$. 显然存在唯一的 $a\in(-\infty,+\infty)$,使得 $e^a=b$,于是

$$f(y)=b^x=e^{ax}=y^a\qquad(0<y<+\infty).$$

【816】 求对于 x 和 y 的所有实数值满足方程式③的所有连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

解 因为 $f(xy)=f(x)f(y)$,

所以 $\quad f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1).$

于是 $\quad f(1)=0,$

或 $\quad f(1)=1.$

当 $f(1)=0$ 时,对任于任意实数 x,均有

$$f(x)=f(1)\cdot f(x)\equiv 0.$$

当 $f(1)=1$ 时,由于

$$f(1)=f(-1)\cdot f(-1)=1.$$

所以 $\quad f(-1)=\pm 1.$

下面分两种情况讨论:

(1) $f(-1)=1$. 此时由于

$$f(-x)=f(-1)f(x)=f(x),$$

所以问题可以归结为讨论 $0<x<+\infty$. 而当 $0<x<+\infty$ 时,由 815 题的结果有

$$f(x)=x^a\qquad a\text{ 为常数}.$$

再由 $f(-x)=f(x)$,即得

$$f(x)=|x|^a.$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中连续,需 $a\geqslant 0$.

(2) $f(-1)=-1$. 此时有

$$f(-x)=f(-1)\cdot f(x)=-f(x).$$

同(1)一样讨论,可得

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a\qquad(a\geqslant 0).$$

综上所述,所求函数为:① $f(x)\equiv 0$ 或 ② $f(x)=|x|^a(a\geqslant 0)$ 或 ③ $f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a(a\geqslant 0)$.

【817】 证明:不连续函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 满足方程 ③.

证 由于 $f(x)=\operatorname{sgn}x,\qquad f(xy)=\operatorname{sgn}(xy)$

分三种情况讨论:

(1) $xy>0$,此时 x 与 y 同号,故

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=1.$$

(2) $xy<0$,此时 x 与 y 异号,故

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=-1.$$

(3) $xy=0$,此时,x 与 y 中,至少有一个为零,故

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=0.$$

因此,对任何实数 x,y,均有

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y,$$

亦即函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 满足方程

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y).$$

【818】 求对于 x 和 y 的所有实数值满足方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

的所有连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

解 易见函数 $f(x)=\cos ax$ 或 $f(x)=\operatorname{ch}ax$ 满足所给方程. 下面我们将证明满足所给方程的函数具有上述形式. 在方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

中,令 $y=0$,得

$$2f(x)=2f(x)f(0).$$

若 $\qquad f(x)\neq 0,$

则 $\qquad f(0)=1.$

又令 $x=0$,得

$$f(y)+f(-y)=2f(y).$$

从而 $$f(-y)=f(y).$$

由 $f(x)$ 的连续性，知存在 $C>0$，使得当 $x\in[0,C]$ 时，$f(x)>0$，设 $f(C)=a$. 下面分两种情况来讨论：

(1) $0<a\leqslant 1$，此时存在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，使得

$$f(C)=a=\cos\theta.$$

从而 $$f(2C)=2[f(C)]^2-f(0)$$
$$=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$
$$f(3C)=2f(2C)f(C)-f(C)$$
$$=2\cos 2\cdot\cos\theta-\cos\theta=\cos 3\theta.$$

利用数学归纳法可得，对一切自然数 n，均有

$$f(nC)=\cos n\theta,$$

又 $$\left[f\left(\frac{1}{2}C\right)\right]^2=\frac{1}{2}[f(C)+f(0)]$$
$$=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)=\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

由于 $f\left(\frac{1}{2}C\right)>0$，故取正根，得

$$f\left(\frac{1}{2}C\right)=\cos\frac{\theta}{2}.$$

利用数学归纳法可得，对于一切正整数 n，均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}C\right)=\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right).$$

重复利用上面的推理过程，可得对任何自然数 m 和 n，有

$$f\left(\frac{m}{2^n}C\right)=\cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right),$$

因此，对任何形如 $\frac{m}{2^n}$ 的正实数 x_n，有

$$f(Cx_n)=\cos(\theta x_n).$$

由实数的二进制知,任一正实数皆可表为$\frac{m}{2^n}$型数列的极限,故由 $f(x)$ 的连续性知,对任一正实数

$$f(Cx)=\cos(\theta x).\qquad ①$$

由于 $f(-y)=f(y)$,故当 $x<0$ 时,① 式也成立. 当 $x=0$ 时,① 式显然成立. 因此,对任何实数 x 均有

$$f(Cx)=\cos(\theta x).$$

令 $Cx=y, a=\frac{\theta}{C}$,

则 $$f(y)=\cos ay.$$

(2) $a>1$,此时,存在 θ 使得 $f(C)=a=\operatorname{ch}\theta$.

根据双曲余弦的关系式,重复上面的推理过程,可得

$$f(x)=\operatorname{ch}ax.$$

综上所述,所求函数为

$$f(x)\equiv 0,$$

或 $$f(x)=\cos ax,$$

或 $$f(x)=\operatorname{ch}ax.$$

【819】 求对于 x 和 y 的所有实数值满足方程组

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

及

$$f(0)=1 \text{ 且 } g(0)=0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

提示:研究函数

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x).$$

解 设 $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$,

则 $$\begin{aligned}F(x+y)&=f^2(x+y)+g^2(x+y)\\&=[f(x)f(y)-g(x)g(y)]^2\\&\quad+[f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2\end{aligned}$$

$$= [f^2(x)+g^2(x)][f^2(y)+g^2(y)]$$

$$= F(x)F(y).$$

由于 $F(0)=1$,及 $F(x)\neq 0$,故由 812 题的结果有

$$F(x)=a^x \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

其中 $\quad a=F(1)>0.$

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界,故 $F(x)$ 有界,从而 $a=1$. 因此,对于一切实数 x,有 $f^2(x)+g^2(x)=1$.

又 $\quad 0=g(0)=g(x-x)$

$$=f(x)g(-x)+f(-x)g(x),$$

$$1=f(0)=f(x-x)$$

$$=f(x)f(-x)-g(x)g(-x),$$

上面两式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$,然后相加得

$$f(-x)=f(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=f(x).$$

如果上面两式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$,然后相减,则得

$$g(-x)=-g(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=-g(x).$$

从而有 $\quad f(x+y)+f(x-y)$

$$=f(x)f(y)-g(x)g(y)+f(x)f(-y)-g(x)g(-y)$$

$$=2f(x)f(y).$$

于是由 818 题的结果及 $f(x)$ 的有界性得

$$f(x)=\cos ax,$$

再由 $\quad f^2(x)+g^2(x)=1,$

可得 $\quad g(x)=\pm\sin ax.$

【820】 假设:$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$

和 $\quad \Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$

分别是一阶和二阶函数 $f(x)$ 的有限差.

证明:如果函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是连续的且

$$\Delta^2 f(x)\equiv 0,$$

则此函数为线性函数,即 $f(x)=ax+b$.

其中 a 和 b 都是常数.

证 由 $\Delta^2 f(x) \equiv 0$,得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(x+\Delta_2 x) \equiv f(x+\Delta_1 x)-f(x).$$

令 $x=0$,得

$$f(\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(\Delta_2 x)=f(\Delta_1 x)-f(0).$$

令 $\Delta_2 x=n\Delta_1 x$,得

$$f[(n+1)\Delta_1 x]-f(n\Delta_1 x) \equiv f(\Delta_1 x)-f(0).$$

由数学归纳法可得

$$f[(n+1)\Delta_1 x]-f(0) \equiv (n+1)[f(\Delta_1 x)-f(0)].$$

从而有 $f(\Delta_1 x)-f(0)=\frac{1}{n}[f(n\Delta_1 x)-f(0)]$,

特别地,令 $\Delta_1 x=\frac{1}{n}$,有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\frac{1}{n}[f(1)-f(0)]$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)-f(0)=m\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right]=\frac{m}{n}[f(1)-f(0)],$$

所以 $f\left(\frac{m}{n}\right)=a\frac{m}{n}+b$,

其中 $a=f(1)-f(0),b=f(0)$.

于是对任何有理数 x,均有 $f(x)=ax+b$.

利用 $f(x)$ 的连续性,可得上式对任何无理数 x 也成立.事实上,设 x 为无理数,则存在一列有理数 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$,由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}(ar_n+b)=ax+b,$$

因此,对于一切实数 x,均有 $f(x)=ax+b$.